

Teoría clásica de campos

Radouane Gannouji, Olivera Mišković

*Instituto de Física,
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso,
Avenida Universidad 330,
Curauma, Valparaíso, Chile*

Libros y recursos recomendados

Estos apuntes de clase están pensados principalmente para estudiantes de posgrado, aunque también pueden servir perfectamente como apoyo a estudiantes de licenciatura en física. Para la preparación de este documento se han utilizado varios libros:

- Horațiu Năstase, *Classical field theory*

El libro resulta particularmente interesante, ya que aborda una amplia variedad de temas dedicando pocas páginas a cada uno, lo que le permite ir de manera directa al contenido esencial.

- Valery Rubakov, Stephen Wilson, *Classical Theory of Gauge Fields*

Este texto es conceptualmente más profundo, pero cubre un número más reducido de temas.

- Nicholas Manton, Paul Sutcliffe, *Topological Solitons*

Referencia fundamental y eje central de la sección dedicada a los solitones.

Contacto

Por favor, envíenos un correo electrónico si encuentra algún error

radouane.gannouji@pucv.cl

olivera.miskovic@pucv.cl

Más recursos

<https://www.fis.ucv.cl/rgannouji>

<https://www.fis.ucv.cl/omiskovic>

Contenido

I	Fundamentos de la teoría de campos no relativista	5
1.	Sistema de dimensión finita	5
1.1.	Formalismos lagrangiano y hamiltoniano para partículas puntuales	5
1.2.	Corchete de Poisson y cantidades conservadas	10
1.3.	Sistemas integrables	12
1.4.	Pares de Lax	14
1.5.	Teorema de Noether	17
2.	Sistema en dimensión infinita	23
2.1.	Del sistema discreto al campo continuo: acción escalar	23
2.2.	Barra elástica anarmónica: el modelo continuo FPU- β	27
2.3.	Ondas con no linealidad y dispersión: la ecuación de KdV	28
2.4.	Sistemas integrables en dimensión infinita: el caso de KdV	31
3.	Simetrías internas globales	34
3.1.	Campo escalar complejo no relativista	34
3.2.	Teorema de Noether para campos	35
3.3.	Campo escalar complejo y corriente de número de partículas	38
3.4.	Corriente de Noether para el lagrangiano de Gross-Pitaevskii	39
II	Fundamentos de la teoría de campos relativista	41
4.	Simetrías en física	42
4.1.	Motivación	42
4.2.	Grupo	43
4.3.	Variedad	44
4.3.1.	Funciones suaves	46
4.3.2.	Espacio tangente	47
4.4.	Grupo de Lie	50
4.5.	Álgebra de Lie	52
4.6.	Representaciones de grupos de Lie y álgebras de Lie	56

5. El grupo $SO(2)$	60
5.1. Propiedades del grupo y topología	60
5.2. Representaciones del grupo y del álgebra	60
6. El grupo $SO(3)$	62
6.1. Propiedades del grupo y topología	62
6.2. Álgebra del grupo	66
6.3. Representaciones del grupo $SO(3)$	68
6.3.1. Representación fundamental	68
6.3.2. Representaciones de $SO(3)$ en funciones sobre la esfera	70
6.3.3. Matrices de Wigner $D^{(\ell)}$ en representaciones de $SO(3)$	72
6.4. Representaciones del álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$	75
6.4.1. Representación trivial	76
6.4.2. Representación vectorial	76
6.4.3. Representación adjunta	76
6.4.4. Representación irreducible de espín ℓ del álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$	76
7. El grupo $SU(2)$	82
7.1. Propiedades del grupo y topología	82
7.2. Representaciones del grupo	82
8. Grupo de Lorentz	84
8.1. Clasificación de componentes	85
8.2. Descomposición rotación–boost en $SO^+(1, 3)$	86
8.3. Topología del grupo $SO^+(1, 3)$	88
8.4. Álgebra de Lie del grupo de Lorentz $SO^+(1, 3)$	89
8.4.1. Complejificación del álgebra de Lie	92
8.4.2. Generadores complejos y descomposición en dos copias de $\mathfrak{su}(2)$	93
8.5. El grupo $SL(2, \mathbb{C})$	95
9. Grupo de Poincaré	99
9.1. Estructura del grupo de Poincaré	99
9.2. Álgebra de Lie del grupo de Poincaré	100
9.3. Casimires del grupo de Poincaré	102
9.4. Clasificación de partículas: construcción mediante el grupo pequeño	105
10. Campos como aplicaciones a espacios de representación	109
10.1. Representación $(0, 0)$: Campo escalar	109
10.2. Representación $(\frac{1}{2}, 0)$: Espinor de Weyl izquierdo	110
10.3. Representación $(0, \frac{1}{2})$: Espinor de Weyl derecho	111

10.3.1.	Masa de Majorana	115
10.4.	Representación $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$: Espinor de Dirac	116
10.5.	Representación $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$: vector de Minkowski	117
10.6.	Representación $(1, 0)$: Forma antisimétrica autodual	122
10.7.	Representación $(1, 1)$: Tensor de rango 2 simétrico	126
11.	Simetría de gauge	128
11.1.	Simetrías globales versus locales	128
11.2.	Transformaciones de gauge y simetrías asintóticas	130
11.3.	Teoría de Yang-Mills	132
11.4.	Gravedad no masiva	135
11.5.	Gravedad masiva	137
III	Ruptura de simetría	140
12.	Ruptura espontánea de simetría discreta	140
12.1.	Sistema mecánico unidimensional	140
12.2.	Campo escalar real	143
13.	Ruptura espontánea de simetría continua	145
13.1.	Generadores y Hessiana	147
14.	Simetrías de gauge rotas espontáneamente	149
14.1.	Generalización no abeliana	154
14.2.	Higgs en la representación fundamental	155
14.3.	Higgs en la representación adjunta	157
IV	Solitones	160
15.	Los solitones topológicos más simples	160
15.1.	El kink y el antikink	160
15.2.	Propiedades del kink	163
15.2.1.	Tamaño del kink	163
15.2.2.	Kink como un objeto clásico	164
15.2.3.	Kink en movimiento	164
15.3.	Cota de Bogomolny	165
15.4.	Estabilidad	166
15.5.	Aspecto topológico	169
15.6.	Corriente topológica	170

16. Teorema de Derrick	171
16.1. Con campos escalares	171
16.2. Con campos de gauge	174
17. Elementos de la teoría de homotopía	177
17.1. Homotopía de aplicaciones	177
17.2. El grupo fundamental	179
17.3. Grupos de homotopía	181
18. Topología de los solitones	182
18.1. Del grupo de homotopía de orden $n - 1$ al de orden n	182
18.2. Modelo sigma $O(3)$	186

Fundamentos de la teoría de campos no relativista

1. Sistema de dimensión finita

1.1. Formalismos lagrangiano y hamiltoniano para partículas puntuales

La segunda ley de Newton, $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$, exige enumerar todas las fuerzas. Esto resulta incómodo cuando las fuerzas provienen de restricciones o cuando las coordenadas son curvilíneas. Esta dificultad puede evitarse si en lugar de centrarse en las ecuaciones de movimiento se adopta el principio de trabajo. Entre 1740 y 1760, Euler y Lagrange se dieron cuenta de que muchos problemas mecánicos ocultan una formulación más simple: una trayectoria en el espacio de configuraciones es física si y solo si hace que una cantidad escalar, **la acción**, que guarda una relación directa con el trabajo del sistema, sea estacionaria. Este descubrimiento se basó en principios previos de *mínimo tiempo* (como el de Fermat para la luz o la braquistócrona de Bernoulli) y en el recién desarrollado cálculo de variaciones de Euler. Lagrange demostró entonces que la condición de estacionariedad reproduce automáticamente la ley de Newton, pero de forma independiente del sistema de coordenadas y manejando las restricciones de manera elegante.

Para una fuerza conservativa, sabemos que puede ser expresada a partir de un potencial

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial x^i}, \quad (1.1)$$

lo que nos permite escribir la ley de Newton de la forma siguiente

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial V}{\partial x^i}, \quad (1.2)$$

con p_i el momento de la partícula. Siguiendo la idea de Euler y Lagrange, queremos definir una función a partir de la cual obtener esta ley. Por eso, definimos las coordenadas generalizadas

$$q_i \equiv \{q_1, q_2, \dots, q_N\} \quad (1.3)$$

que representan el estado de un sistema, por ejemplo (x, y, z) , $(r, \theta, \phi) \dots$, y sus velocidades generalizadas $\dot{q}_i \equiv \frac{dq_i}{dt}$, a partir de lo cual se define el lagrangiano

$$L \equiv L(q_i, \dot{q}_i, t) = T(\dot{q}_i, t) - V(q_i, t) , \quad (1.4)$$

con T la energía cinética y V la energía potencial. La ecuación de movimiento que describe la trayectoria $(q_i(t), \dot{q}_i(t))$ es dada por la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} . \quad (1.5)$$

Por ejemplo, en el caso de una partícula puntual de masa m sometida a un potencial $V(q)$, tenemos

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q) , \quad (1.6)$$

lo que implica

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} , \quad \frac{\partial L}{\partial q} = -V'(q) . \quad (1.7)$$

Usando la ecuación (1.5) obtenemos

$$m\ddot{q} = -V'(q) , \quad (1.8)$$

lo que es la ecuación de Newton con la fuerza $F = -V'(q)$.

Mientras que el lagrangiano (1.4) es una función que depende del tiempo, resulta más práctico introducir un funcional que no dependa de t , la acción, que es la integral del lagrangiano. Para un sistema de N partículas, la acción es

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt , \quad i = \{1, \dots, N\} . \quad (1.9)$$

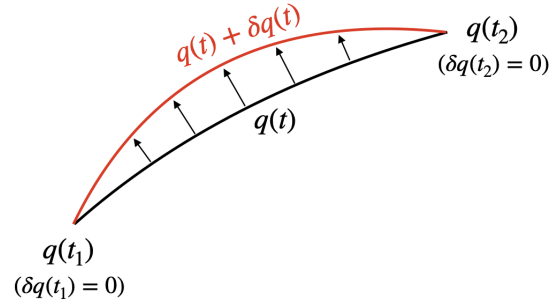
Entonces, la ecuación de Euler-Lagrange (1.5) se puede obtener de la acción de sig-

iente manera. El *principio de mínima acción* (no se busca realmente el mínimo, pero solamente un extremo) nos dice que de todas las trayectorias entre $q_i(t_1)$ y $q_i(t_2)$ el sistema escoge aquella que extremiza la acción S .

Consideramos el caso de $N = 1$, con la acción $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$. Si tenemos un camino $q(t)$, podemos modificarlo un poco $q(t) + \delta q(t)$ para ver si el camino era un extremo, es decir que busquemos $\delta S = 0$ donde “ δ ” es una pequeña variación de la acción

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0. \quad (1.10)$$

Además, el tiempo no varía ($\delta t = 0$), solo lo hacen las coordenadas y las velocidades. En otras palabras, la variación se realiza a tiempo fijo. También se impone la condición de que $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$, es decir, que iniciamos y terminamos siempre en los mismos puntos. Son trayectorias con el mismo estado inicial y final. Bajo estas condiciones, usando la expansión de Taylor, se obtiene



$$\delta S \simeq \int_{t_1}^{t_2} \left[L(q, \dot{q}, t) + \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right] dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (1.11)$$

$$\simeq \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt. \quad (1.12)$$

Pero como $\delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q$, se puede hacer una integración por partes, dando

$$\simeq \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \right] dt \quad (1.13)$$

$$\simeq \int_{t_1}^{t_2} \delta q \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} \quad (1.14)$$

$$\simeq \int_{t_1}^{t_2} \delta q \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q(t_2) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q(t_1) \quad (1.15)$$

$$\simeq \int_{t_1}^{t_2} \delta q \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] dt. \quad (1.16)$$

El principio de mínima acción pide que δS sea nulo para cualquier variación δq , lo que implica la ecuación de Euler-Lagrange (1.5):

$$\frac{\delta S}{\delta q} = \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0. \quad (1.17)$$

Si las condiciones de borde no eliminan los términos adicionales, el principio de mínima acción no se cumple. En ese caso, la derivada variacional $\delta S/\delta q$ no está bien definida, y por lo tanto, la acción S no es diferenciable.

Las ecuaciones obtenidas son de segundo orden y asumen que el lagrangiano no depende de derivadas de orden superior como $\ddot{q}$, $\ddot{\dot{q}}$, etc. Además, como dos lagrangianos que difieren en una derivada total $\dot{f}(q, \dot{q})$, llevan a las mismas ecuaciones de Euler–Lagrange, no es posible bajar el orden de un término superior añadiendo simplemente una derivada total. Por ejemplo, $q\ddot{q}$ no cuenta como un término de orden superior, porque resulta equivalente a $-\dot{q}^2$ al agregar el término $-(\dot{q})'$. Esto se refleja en el hecho de que un sistema dinámico está completamente determinado por sus coordenadas y velocidades iniciales. Para un sistema con n grados de libertad, existen n ecuaciones de Euler–Lagrange, y cada una es de segundo orden. Por lo tanto, una solución general dependerá de $2n$ constantes de integración, que se pueden fijar especificando las condiciones iniciales para q^i y $\dot{q}^i$. La mayoría de los sistemas físicos comparten esta característica: son de segundo orden. Sin embargo, algunos sistemas requieren derivadas de orden superior para describirlos, como sucede con la fuerza de Abraham–Lorentz

$$m\ddot{q} = F_{\text{ext}} + \tau \ddot{\dot{q}}. \quad (1.18)$$

Este término de tercer orden surge de la auto-interacción de la partícula con su propio campo de radiación cuya magnitud está caracterizada por la constante τ . De manera similar, el lagrangiano de Euler–Heisenberg incorpora términos de auto-interacción del fotón con derivadas de orden superior para representar las correcciones cuánticas a la teoría de Maxwell en el régimen de bajas energías. Sin embargo, este curso se centrará principalmente en teorías que conducen a ecuaciones diferenciales de segundo orden.

En mecánica clásica, existen dos formulaciones equivalentes para describir un sistema físico: el formalismo lagrangiano que hemos resumido y también el formalismo hamiltoniano. La diferencia está en la elección de las variables que describen la dinámica del sistema.

En vez de considerar una función de $(q, \dot{q})$ como el lagrangiano para describir un sistema, podemos definir otra función de (q, p) . Para eso, se usa una transformada de Legendre: Si tenemos una función $F(x, y)$ y definimos la derivada con respecto a y como $p = \partial F/\partial y$,

podemos definir una nueva función de (x, p) en vez de (x, y)

$$G(x, p) = yp - F. \quad (1.19)$$

G se llama la transformada de Legendre de F con respecto a la variable y . De hecho,

$$dG = pdy + ydp - dF \quad (1.20)$$

$$= \frac{\partial F}{\partial y} dy + ydp - \frac{\partial F}{\partial x} dx - \frac{\partial F}{\partial y} dy \quad (1.21)$$

$$= ydp - \frac{\partial F}{\partial x} dx, \quad (1.22)$$

lo que muestra que G es una función de x y p . Además, como un diferencial de la función $G(x, p)$ tiene la forma $dG = \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial p} dp$, también encontramos las relaciones

$$y = \frac{\partial G}{\partial p}, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial G}{\partial x}. \quad (1.23)$$

Siguiendo esta idea, se define el hamiltoniano como la transformada de Legendre del lagrangiano con respecto a la variable $\dot{q}$

$$H(q, p) = p\dot{q} - L, \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}. \quad (1.24)$$

En consecuencia, las ecuaciones de Hamilton se obtienen a partir de (1.23)

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \quad (1.26)$$

Finalmente, usando (1.5) obtenemos las ecuaciones de Hamilton en su forma final

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \quad (1.27)$$

Para concluir, mientras que el lagrangiano $L(q, \dot{q})$ define la dinámica en el espacio de configuraciones $(q_i, \dot{q}_i)$, el hamiltoniano $H(q, p)$, describe la dinámica en el espacio de fase (q_i, p_i) .

1.2. Corchete de Poisson y cantidades conservadas

La dinámica de una partícula está relacionada con cómo cambian sus coordenadas y momentos a lo largo del tiempo. La derivada temporal de cualquier cantidad $f = f(q, p, t)$ se puede escribir como

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right). \quad (1.28)$$

Utilizando las ecuaciones de Hamilton (1.27), esto se transforma en

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right), \quad (1.29)$$

lo que nos motiva a introducir un nuevo objeto matemático que describe la evolución temporal de funciones en el espacio de fase.

Consideremos dos funciones $f(q, p)$ y $g(q, p)$. El *corchete de Poisson* entre ellas se define como

$$\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right). \quad (1.30)$$

Este corchete posee las siguientes propiedades fundamentales:

- **Antisimetría:** $\{f, g\} = -\{g, f\}$,
- **Linealidad:** $\{\alpha f + \beta g, h\} = \alpha\{f, h\} + \beta\{g, h\}$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
- **Regla de Leibniz:** $\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g$,
- **Identidad de Jacobi:** $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$.

Estas propiedades se pueden demostrar de manera directa, aunque los cálculos pueden ser algo extensos.

Aplicando esta definición, se obtienen los corchetes de Poisson canónicos

$$\{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad (1.31)$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker que vale 1 si $i = j$ y 0 en caso contrario.

Usando el formalismo, para cualquier función $f(q_i, p_i, t)$, la derivada total respecto al tiempo es

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}. \quad (1.32)$$

En particular, cuando f no depende explícitamente del tiempo, se obtiene

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\}. \quad (1.33)$$

Se puede deducir que $f(q_i(t), p_i(t))$ es una constante del movimiento si conmuta con el hamiltoniano en el sentido de Poisson, es decir, si $\{f, H\} = 0$. En especial, si H no depende del tiempo, se conserva automáticamente ya que $\{H, H\} = 0$.

De manera similar, si q es una coordenada cíclica (o sea, H no depende de q), entonces

$$\{p, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q} = 0, \quad (1.34)$$

lo cual implica que $\frac{dp}{dt} = 0$, es decir, p también se conserva.

Una vez identificadas algunas constantes del movimiento, se pueden generar otras nuevas cantidades conservadas usando corchetes de Poisson. Por ejemplo, si I y J son constantes del movimiento, entonces $\{I, J\}$ también lo es. Para demostrarlo, basta con usar la identidad de Jacobi y notar que

$$\{\{I, J\}, H\} = \{I, \underbrace{\{J, H\}}_{=0}\} + \{\underbrace{\{I, H\}}_{=0}, J\} = 0. \quad (1.35)$$

Como ejemplo, si dos componentes del momento angular se conservan, entonces la tercera también es constante. Recordemos que el momento angular está dado por $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, con componentes:

$$L_1 = r_2 p_3 - r_3 p_2, \quad (1.36)$$

$$L_2 = r_3 p_1 - r_1 p_3, \quad (1.37)$$

$$L_3 = r_1 p_2 - r_2 p_1. \quad (1.38)$$

Entonces, usando la regla de Leibniz, tenemos

$$\begin{aligned} \{L_1, L_2\} &= \{r_2 p_3 - r_3 p_2, r_3 p_1 - r_1 p_3\} \\ &= \{r_2 p_3, r_3 p_1\} - \{r_2 p_3, r_1 p_3\} - \{r_3 p_2, r_3 p_1\} + \{r_3 p_2, r_1 p_3\}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Los dos términos centrales se anulan:

$$\begin{aligned}\{r_2 p_3, r_1 p_3\} &= r_2 \{p_3, r_1 p_3\} + \{r_2, r_1 p_3\} p_3 \\ &= r_2 (r_1 \underbrace{\{p_3, p_3\}}_0 + \underbrace{\{p_3, r_1\}}_0 p_3) + (r_1 \underbrace{\{r_2, p_3\}}_0 + \underbrace{\{r_2, r_1\}}_0 p_3) p_3 = 0.\end{aligned}\quad (1.40)$$

Los términos no nulos son

$$\{L_1, L_2\} = r_2 \underbrace{\{p_3, r_3\}}_{-1} p_1 + p_2 \underbrace{\{r_3, p_3\}}_{+1} r_1 = -r_2 p_1 + r_1 p_2 = L_3.\quad (1.41)$$

Por lo tanto, si dos componentes de $\mathbf{L}$ son constantes del movimiento, entonces todo el vector $\mathbf{L}$ se conserva.

1.3. Sistemas integrables

Los sistemas integrables constituyen una clase particular de sistemas hamiltonianos. Un hamiltoniano definido en un espacio de fase de dimensión $2n$ es *integrable en el sentido de Liouville* si existen n funciones suaves $f_1, \dots, f_n: M \rightarrow \mathbb{R}$ que cumplen

1. $(f_1, \dots, f_n)$ son funciones independientes;
2. $\forall i, j \quad \{f_i, f_j\} = 0$.

Decimos que $f_1, \dots, f_n \in C^\infty(M)$ son independientes si $(df_1)_p, \dots, (df_n)_p$ son linealmente independientes en (casi) todos los puntos de algún subconjunto denso de M . Un subconjunto de M es denso si cada punto de M es límite de una sucesión de puntos del subconjunto. Por ejemplo, si consideramos $M = \mathbb{R}^2$ un plano real y $f_1(x, y) = x$, $f_2(x, y) = (x^2 + y^2)/2$, obtenemos

$$df_1 = dx, \quad (1.42)$$

$$df_2 = xdx + ydy. \quad (1.43)$$

Concluimos que f_1 y f_2 son independientes en todo $\mathbb{R}^2$ excepto en la línea $y = 0$. Por esa razón hemos usado en la definición la palabra *casi*.

Un sistema definido en $\mathbb{R}^4$ con coordenadas (q_1, q_2, p_1, p_2) y hamiltoniano

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2}, \quad (1.44)$$

es integrable. De hecho, considerando $f_1 = H$ y $f_2 = p_1 q_2 - p_2 q_1$, se verifica

$$\{f_1, f_2\} = 0, \quad (1.45)$$

y además

$$df_1 = p_1 dp_1 + p_2 dp_2, \quad df_2 = -p_2 dq_1 + p_1 dq_2 + q_2 dp_1 - q_1 dp_2, \quad (1.46)$$

son independientes salvo si $(p_1, p_2) = (0, 0)$.

El teorema de Liouville–Arnold dice que se pueden introducir para un sistema integrable coordenadas canónicas locales $(\phi_1, \dots, \phi_n, I_1, \dots, I_n)$, denominadas *coordenadas acción-ángulo*, tales que

$$H = H(I_1, \dots, I_n), \quad (1.47)$$

$$f_i = f_i(I_1, \dots, I_n), \quad (1.48)$$

y ϕ_i son ángulos 2π periódicos. Eso significa que la trayectoria en un sistema integrable está confinada a un toro n -dimensional $\mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$ en el espacio de fase.

En este sistema de coordenadas, obtenemos para las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{\phi}_i = \frac{\partial H}{\partial I_i}, \quad (1.49)$$

$$\dot{I}_i = -\frac{\partial H}{\partial \phi_i} = 0, \quad (1.50)$$

con la solución

$$I_i(t) = I_i(0), \quad (1.51)$$

$$\phi_i(t) = \phi_i(0) + \omega_i t. \quad (1.52)$$

Este sistema es integrable en el sentido de que, al encontrar n cantidades conservadas, su dinámica se reduce a un problema trivial.

Las frecuencias ω_i determinan si las trayectorias son periódicas, es decir, cerradas, o si por el contrario son densas en el toro. En el caso $n = 2$, y si el sistema es integrable, aparecen dos frecuencias. Si ω_1/ω_2 es racional, las trayectorias son cerradas y periódicas. En cambio, si ω_1/ω_2 no es racional, las trayectorias no se cierran y resultan densas en el toro.

Un sistema puede poseer más integrales de movimiento independientes que las requeridas para la integrabilidad de Liouville. En particular, si un sistema con n grados de libertad admite $2n - 1$ funciones integrables independientes, se dice que es super-integrable y en este caso todas las trayectorias son periódicas. Un ejemplo es el problema de Kepler, que posee cinco cantidades conservadas independientes, la energía, las tres componentes

del momento angular y el vector de Laplace–Runge–Lenz, lo que implica que el sistema es super-integrable y tiene sus órbitas periódicas.

1.4. Pares de Lax

En algunos sistemas hamiltonianos de dimensión finita, es posible expresar su dinámica mediante un par de matrices que evolucionan a través de una ecuación de conmutador. Esta formulación, conocida como *par de Lax*, no solo permite integrar explícitamente el sistema, sino también proporciona de forma sistemática una familia de cantidades conservadas en involución.

Un **par de Lax** es un par de matrices $L(t)$ y $B(t)$, típicamente dependientes de las variables dinámicas, tales que la evolución temporal de L está gobernada por la ecuación:

$$\dot{L}(t) = [B(t), L(t)] = B(t)L(t) - L(t)B(t), \quad (1.53)$$

donde $[,]$ es el conmutador. Cuando un sistema evoluciona según la ecuación de Lax (1.53), el espectro de $L(t)$, o sea sus valores propios, permanece constante en el tiempo. Eso se puede mostrar usando $U(t)$ que satisface la ecuación matricial

$$\dot{U}(t) = B(t)U(t), \quad U(0) = \mathbb{I}.$$

La solución $U(t)$ es una matriz invertible para todo t , ya que satisface una ecuación lineal homogénea con coeficientes suaves. Por lo tanto, se puede definir la matriz conjugada

$$\tilde{L}(t) \equiv U(t)^{-1}L(t)U(t). \quad (1.54)$$

Derivando respecto al tiempo, se encuentra

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{L}(t) &= \frac{d}{dt}(U^{-1}LU) \\ &= -U^{-1}\dot{U}U^{-1}LU + U^{-1}\dot{L}U + U^{-1}L\dot{U} \\ &= -U^{-1}BLU + U^{-1}[B, L]U + U^{-1}LBU \\ &= -U^{-1}BLU + U^{-1}BLU - U^{-1}LBU + U^{-1}LBU \\ &= 0, \end{aligned} \quad (1.55)$$

implicando que $\tilde{L}(t)$ es constante:

$$\tilde{L}(t) = \tilde{L}(0) = L(0). \quad (1.56)$$

Dado que $L(t)$ es conjugado de $L(0)$, es decir

$$L(t) = U(t)L(0)U(t)^{-1}, \quad (1.57)$$

estas matrices son semejantes por lo cual tienen mismos valores propios (el espectro σ)

$$\forall t, \quad \sigma(L(t)) = \sigma(L(0)). \quad (1.58)$$

Concluimos que la evolución de tipo Lax preserva el espectro de $L(t)$. En otras palabras, los valores propios de $L(t)$ son constantes en el tiempo.

Como consecuencia, todas las cantidades que dependen únicamente del espectro de L , por ejemplo, los polinomios simétricos de sus valores propios, son constantes de movimiento. En particular, para cualquier entero $k \geq 1$, la traza

$$I_k \equiv \text{tr}(L^k), \quad (1.59)$$

es un primer integral del sistema. Estas integrales son invariantes (constantes) porque

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{tr}(L^k) &= \text{tr} \left(\frac{d}{dt} L^k \right) = \text{tr} \left(\sum_{j=0}^{k-1} L^j \dot{L} L^{k-1-j} \right) \\ &= \text{tr} \left(\sum_{j=0}^{k-1} L^j [B, L] L^{k-1-j} \right) \\ &= \text{tr} ([B, L^k]) = 0. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Por ejemplo, la red de Toda describe N partículas unidimensionales con interacción exponencial entre vecinos. Su hamiltoniano es

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} e^{-(q_{i+1}-q_i)}. \quad (1.61)$$

Introduciendo las variables de Flaschka,

$$a_i = \frac{1}{2} e^{-(q_{i+1}-q_i)/2}, \quad (1.62)$$

$$b_i = -\frac{1}{2} p_i, \quad (1.63)$$

se define la matriz de Lax:

$$L = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & b_2 & a_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & b_{N-1} & a_{N-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{N-1} & b_N \end{pmatrix}, \quad (1.64)$$

y la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_1 & 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & -a_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{N-1} \\ 0 & \cdots & 0 & -a_{N-1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.65)$$

Entonces se verifica que

$$\dot{L} = [B, L], \quad (1.66)$$

y el sistema de Toda es integrable en el sentido de Liouville. Las cantidades $\text{tr}(L^k)$ para $k = 1, \dots, N$ proporcionan N integrales en involución.

El método de Lax permite reformular la dinámica de un sistema hamiltoniano como una ecuación de evolución para una matriz L con espectro constante. Las trazas de sus potencias constituyen funciones conservadas, y su mutua conmutatividad bajo un corchete de Poisson adecuado garantiza integrabilidad. Esta estructura algebraica ha demostrado ser central en la clasificación y análisis de sistemas completamente integrables en dimensión finita.

Noten que siempre podemos introducir una coordenada espacial auxiliar que satisface

$$\sigma \in \mathbb{R}, \quad \partial_\sigma L(t) = 0, \quad \partial_\sigma B(t) = 0, \quad (1.67)$$

de modo que las variables originales sigan dependiendo solo del tiempo. También, definimos las coordenadas

$$x^\mu \text{ con } \mu = 0, 1, \quad x^0 = t, \quad x^1 = \sigma, \quad (1.68)$$

y las componentes L_μ

$$L_0(t, \sigma) \equiv B(t), \quad L_1(t, \sigma) \equiv L(t). \quad (1.69)$$

Dado que B no depende de σ , se cumple

$$\partial_1 L_0 = \partial_\sigma B = 0. \quad (1.70)$$

La ecuación de Lax usual

$$\dot{L} = [B, L], \quad (1.71)$$

puede reescribirse como

$$\partial_0 L_1 - \partial_1 L_0 + [L_0, L_1] = 0, \quad (1.72)$$

o, de forma más compacta, como la condición

$$\partial_\mu L_\nu - \partial_\nu L_\mu + [L_\mu, L_\nu] = 0. \quad (1.73)$$

Veremos más tarde que podemos interpretar esta ecuación como una ecuación de curvatura nula y con L_μ como una conexión con valores en un álgebra de Lie. Su tensor de curvatura es

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu L_\nu - \partial_\nu L_\mu + [L_\mu, L_\nu]. \quad (1.74)$$

Por lo tanto, la ecuación de Lax implica una condición de curvatura nula.

1.5. Teorema de Noether

El teorema de Noether establece una correspondencia uno-a-uno entre simetrías continuas de la acción y cantidades conservadas. Consideremos las transformaciones de coordenadas $q^a(t)$ caracterizadas por un parámetro continuo ϵ ,

$$\{t, q\} \mapsto \{\bar{t}(t, q, \epsilon), \bar{q}(t, q, \epsilon)\}, \quad (1.75)$$

y supongamos que la transformación identidad ($t = \bar{t}$, $q = \bar{q}$) ocurre cuando $\epsilon = 0$. Las derivadas respecto al parámetro ϵ evaluadas en la identidad son

$$\tau(t, q) = \left. \frac{d\bar{t}(t, q, \epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0}, \quad (1.76)$$

$$\xi^a(t, q) = \left. \frac{d\bar{q}^a(t, q, \epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0}. \quad (1.77)$$

Las transformaciones infinitesimales tienen el parámetro ϵ pequeño, tal que (1.75) se puede reescribir como

$$\bar{t} = t + \epsilon \tau(t, q), \quad \bar{q}^a = q^a + \epsilon \xi^a(t, q), \quad (1.78)$$

donde τ y ξ^a son funciones de las coordenadas y el tiempo que no dependen de las velocidades. Entonces, al primer orden en la expansión de Taylor en ϵ , las velocidades de las trayectorias transformadas se calculan como

$$\frac{d\bar{q}^a}{d\bar{t}} = \frac{\dot{q}^a + \epsilon \dot{\xi}^a}{1 + \epsilon \dot{\tau}} = \dot{q}^a + \epsilon (\dot{\xi}^a - \dot{q}^a \dot{\tau}), \quad (1.79)$$

donde se han despreciados los términos de orden $O(\epsilon^2)$, y se definen las derivadas totales en el tiempo como

$$\dot{\tau} \equiv \frac{d\tau}{dt}(t, q) = \frac{\partial \tau}{\partial t}(t, q) + \dot{q}^b \frac{\partial \tau}{\partial q^b}(t, q), \quad (1.80)$$

$$\dot{\xi}^a \equiv \frac{d\xi^a}{dt}(t, q) = \frac{\partial \xi^a}{\partial t}(t, q) + \dot{q}^b \frac{\partial \xi^a}{\partial q^b}(t, q). \quad (1.81)$$

Ahora evaluamos el cambio de la acción debido a las transformaciones infinitesimales,

$$\delta S = \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} L(\bar{q}^a, \dot{\bar{q}}^a, \bar{t}) d\bar{t} - \int_{t_1}^{t_2} L(q^a, \dot{q}^a, t) dt \quad (1.82)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} L\left(q^a + \epsilon \xi^a, \dot{q}^a + \epsilon (\dot{\xi}^a - \dot{q}^a \dot{\tau}), t + \epsilon \tau\right) (1 + \epsilon \dot{\tau}) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q^a, \dot{q}^a, t) dt, \quad (1.83)$$

suponiendo que los extremos temporales están fijos, es decir, $\bar{t}_1 = t_1$ y $\bar{t}_2 = t_2$. En la

expansión de Taylor, mantenemos solo los términos a primer orden en ϵ :

$$\delta S = \epsilon \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial t} \tau + \frac{\partial L}{\partial q^a} \xi^a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} (\dot{\xi}^a - \dot{q}^a \dot{\tau}) + L \dot{\tau} \right) dt \quad (1.84)$$

$$= \epsilon \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right) (\xi^a - \dot{q}^a \tau) + \frac{d}{dt} \left(L \tau + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} (\xi^a - \dot{q}^a \tau) \right) dt \quad (1.85)$$

$$= \epsilon \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right) (\xi^a - \dot{q}^a \tau) + \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \xi^a - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \dot{q}^a - L \right) \tau \right] dt. \quad (1.86)$$

El primer término es cero gracias a las ecuaciones de Euler-Lagrange. Queda el resultado de que δS , usando las ecuaciones de movimiento, es una derivada total.

Por otro lado, se dice que las transformaciones (1.75) son una simetría de la teoría si la acción, sin usar las ecuaciones de movimiento, cambia solo para una derivada total,

$$\delta S = \epsilon \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF}{dt} dt. \quad (1.87)$$

En este caso, las ecuaciones de Euler-Lagrange provenientes de $I[q, t]$ y $I[\bar{q}, \bar{t}]$ tienen la misma forma, lo que significa que los funcionales $I[q, t]$ y $I[\bar{q}, \bar{t}]$ son físicamente equivalentes.

El teorema de Noether se obtiene comparando las expresiones (1.86) y (1.87), encontradas de dos maneras diferentes, sin y con usar las ecuaciones de movimiento, dando que existe una cantidad Q conservada,

$$\dot{Q}(q, t) = \frac{dQ}{dt}(q, t) = 0, \quad (1.88)$$

que se llama la carga de Noether, de forma

$$Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \xi^a - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \dot{q}^a - L \right) \tau - F. \quad (1.89)$$

Reconociendo el momento canónico en el primer término, se puede escribir el resultado final para la carga,

$$Q = p_a \xi^a - (p_a \dot{q}^a - L) \tau - F. \quad (1.90)$$

Es importante enfatizar que, para cada parámetro continuo ϵ , existe una carga conservada Q . En otras palabras, el número de cargas conservadas coincide con el número de parámetros independientes de una simetría continua.

Ahora mostraremos algunas aplicaciones del teorema de Noether.

Invariancia por traslaciones temporales

Cuando el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, $L = L(q, \dot{q})$, es invariante bajo traslaciones en el tiempo. Una traslación temporal infinitesimal (1.78) corresponde a

$$\tau = 1, \quad \xi^a = 0.$$

lo que implica desde (1.87)

$$\frac{dF}{dt} \equiv \delta L + L\dot{\tau} = 0 + 0 = 0. \quad (1.91)$$

La carga correspondiente es entonces

$$Q = -(p_a \dot{q}^a - L) = -H, \quad (1.92)$$

donde H es el hamiltoniano, es decir, la **energía** del sistema. Concluimos que la energía está conservada en los sistemas invariantes bajo traslaciones temporales.

Invariancia por traslaciones espaciales

Consideremos una traslación espacial descrita por un desplazamiento infinitesimal de la trayectoria

$$\mathbf{q} \longrightarrow \mathbf{q} + \epsilon \mathbf{a}, \quad t \longrightarrow t,$$

donde $\mathbf{a} = (a^1, a^2, a^3)$ es un vector constante y ϵ es un parámetro infinitesimal. En la notación τ, ξ^a de la ec. (1.78), esto significa

$$\tau = 0, \quad \xi^a(t, \mathbf{q}) = a^a, \quad (1.93)$$

con tres parámetros constantes a^a , es decir, independientes de t y de $\mathbf{q}$. Por lo tanto, se cumple $\dot{\tau} = 0$ y $\dot{\xi}^a = 0$.

Por ejemplo, para un sistema cuya dinámica depende sólo de las velocidades (o de diferencias de posición), el lagrangiano no contiene a $\mathbf{q}$ de manera explícita: $L = L(\dot{\mathbf{q}}, t)$. En consecuencia,

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q^a} \xi^a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \dot{\xi}^a = 0. \quad (1.94)$$

Además, como también $\dot{\tau} = 0$, se obtiene la invariancia de la acción bajo traslaciones espaciales, $\delta L + L\dot{\tau} = 0$, dada por (1.87). En otras palabras, en la condición de

cuasi-invariancia $\delta L + L \dot{\tau} = \frac{dF}{dt}$, se satisface

$$F = 0. \quad (1.95)$$

Aplicando el teorema de Noether, a partir de la expresión general para la carga (1.90) dada por $Q = p_a \xi^a - (p_a \dot{q}^a - L) \tau - F$ y usando (1.93), obtenemos

$$Q = p_a a^a = \mathbf{p} \cdot \mathbf{a}. \quad (1.96)$$

Dado que el vector $\mathbf{a}$ es arbitrario, la carga corresponde al vector del momento lineal $\mathbf{p}$. Más precisamente, la condición $\frac{dQ}{dt} = 0$ equivale a la conservación de cada componente del **momento lineal** por separado,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0. \quad (1.97)$$

Como se esperaba, los tres parámetros independientes a^a llevan a tres cargas conservadas p_a , con $a = 1, 2, 3$.

Invariancia por rotaciones

Sea una rotación infinitesimal alrededor del eje fijo $\mathbf{n}$ (con $|\mathbf{n}| = 1$)

$$\mathbf{q} \longrightarrow \mathbf{q} + \epsilon (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}), \quad t \longrightarrow t,$$

donde $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{n}$ es un vector constante y ϵ es un parámetro infinitesimal. En la notación τ, ξ^a esto corresponde a

$$\tau = 0, \quad \xi^a(t, \mathbf{q}) = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q})^a, \quad \dot{\tau} = 0, \quad \dot{\xi}^a = (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{q}})^a. \quad (1.98)$$

Si el sistema es isotrópico, el lagrangiano no depende de la orientación de los vectores, sino solo de sus longitudes, lo que significa que el lagrangiano depende sólo de invariantes $|\dot{\mathbf{q}}| = \sqrt{\dot{\mathbf{q}}^2}$ y $|\mathbf{q}| = \sqrt{\mathbf{q}^2}$, tal que $L = L(|\dot{\mathbf{q}}|, |\mathbf{q}|)$. Bajo las transformaciones infinitesimales (1.98), el lagrangiano cambia como

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q^a} \xi^a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \dot{\xi}^a = 0, \quad (1.99)$$

porque las derivadas de L son proporcionales a $\mathbf{q}$ y $\dot{\mathbf{q}}$, ambas ortogonales a $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}$ y $\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{q}}$, respectivamente. Por ejemplo,

$$\frac{\partial L}{\partial q^a} \xi^a = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}^2} \frac{\partial \mathbf{q}^2}{\partial q^a} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q})^a = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}^2} 2\mathbf{q} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}) = 0,$$

y similarmente para $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \dot{\xi}^a$. Además, se cumple $L \dot{\tau} = 0$, así que $\delta L + L \dot{\tau} = 0 = \frac{dF}{dt}$, lo que permite encontrar

$$F = 0, \quad (1.100)$$

dando la acción invariante bajo rotaciones. Por lo tanto, se puede aplicar el teorema de Noether. Con la expresión general para la carga (1.90) y usando la forma (1.98) de transformaciones, obtenemos la carga de Noether

$$Q = p_a (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q})^a = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}). \quad (1.101)$$

Como $\boldsymbol{\omega}$ es arbitrario, la cantidad conservada es el **momento angular**

$$\mathbf{J} = \mathbf{q} \times \mathbf{p}. \quad (1.102)$$

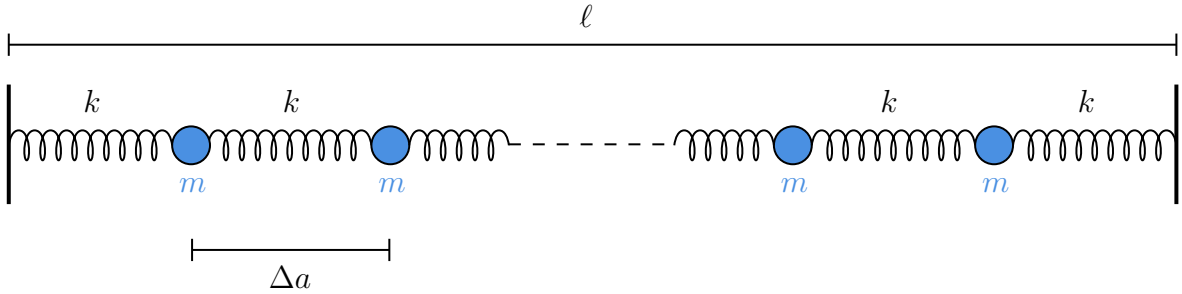
De nuevo, tres parámetros ω^a llevan a tres cargas de Noether J_a .

2. Sistema en dimensión infinita

2.1. Del sistema discreto al campo continuo: acción escalar

En algunas áreas, como la materia condensada, no se estudia el comportamiento del sistema a escalas microscópicas, de longitudes atómicas, por lo que el formalismo desarrollado anteriormente no resulta adecuado. En cualquier caso, un modelo como el anterior sería demasiado primitivo para estos fines. En su lugar, lo que interesa es estudiar las propiedades universales, es decir, comportamientos de observables experimentales que se manifiestan a escalas macroscópicas. Por ejemplo, uno puede querer estudiar el calor específico de un sólido en el límite de un número infinito de átomos, o al menos de un número macroscópicamente grande, $\mathcal{O}(10^{23})$. Bajo estas condiciones, los modelos microscópicos suelen poder simplificarse considerablemente. En particular, a menudo es posible aproximar un modelo de red discreta por un límite continuo, que despreja la estructura discreta del sistema y lo describe mediante grados de libertad efectivos definidos en el continuo.

En este contexto, tomar el límite continuo equivale a describir las fluctuaciones de la red mediante funciones suaves de una variable continua. Esta descripción solo tiene sentido si las fluctuaciones a escala atómica son pequeñas; de lo contrario, se violaría la condición de suavidad. En conclusión, el modelo continuo puede entenderse como un límite apropiado de un sistema discreto.



Como ejemplo, consideramos una barra elástica de longitud fija ℓ , sometida a pequeñas vibraciones longitudinales. Aproximamos la barra por un sistema de partículas de masa m , separadas por una distancia Δa entre sí, y conectadas por resortes sin masa, todos con constante elástica k . La longitud total del sistema es:

$$\ell = (n + 1)\Delta a. \quad (2.1)$$

Sea q_i el desplazamiento del i -ésimo punto respecto a su posición de equilibrio. Entonces,

la energía cinética total del sistema es:

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{m}{2} \dot{q}_i^2. \quad (2.2)$$

La energía potencial está almacenada en los resortes y depende del estiramiento de cada uno. Dado que el estiramiento (o compresión) del i -ésimo resorte, medido respecto a su longitud de equilibrio, es $q_{i+1} - q_i$, la energía potencial total de la barra es dada por la suma

$$U = \frac{1}{2} k \sum_{i=0}^n (q_{i+1} - q_i)^2. \quad (2.3)$$

Aquí se asume que los extremos de la barra están fijos, es decir:

$$q_0 = q_{n+1} = 0. \quad (2.4)$$

El lagrangiano total del sistema discreto es:

$$L = T - U = \sum_{i=1}^n \frac{m}{2} \dot{q}_i^2 - \frac{1}{2} k \sum_{i=0}^n (q_{i+1} - q_i)^2. \quad (2.5)$$

Ahora tomamos el límite continuo, enviando $n \rightarrow \infty$ y $\Delta a \rightarrow 0$ de modo que $\ell = (n+1)\Delta a$ permanezca constante. Para mantener la masa total finita, suponemos que:

$$\frac{m}{\Delta a} \rightarrow \mu \quad (\text{densidad de masa}), \quad (2.6)$$

y para mantener finita la fuerza entre partículas, se asume que

$$k\Delta a \rightarrow Y \quad (\text{módulo de elasticidad}). \quad (2.7)$$

Para la aplicación del límite, es conveniente reescribir el lagrangiano como

$$L = T - U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Delta a \left(\frac{m}{\Delta a} \right) \dot{q}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \Delta a (k\Delta a) \left(\frac{q_{i+1} - q_i}{\Delta a} \right)^2. \quad (2.8)$$

En el límite continuo, reemplazamos el índice i por una variable continua x , de modo que $q_i \rightarrow q(x)$. Además, es estándar usar la variable $\phi(x)$ en vez de $q(x)$, encontrando

$$\frac{q_{i+1} - q_i}{\Delta a} \rightarrow \frac{\phi(x + \Delta a) - \phi(x)}{\Delta a} \rightarrow \partial_x \phi(x). \quad (2.9)$$

De este manera, obtenemos el lagrangiano del sistema continuo:

$$L = \frac{1}{2} \int_0^\ell dx \left(\mu \dot{\phi}^2 - Y(\partial_x \phi)^2 \right). \quad (2.10)$$

Así como en el sistema discreto había una coordenada generalizada q_i para cada partícula, en el sistema continuo hay una coordenada generalizada $\phi(x)$ para cada punto del eje x . Como ϕ también depende del tiempo, se trata de una función de dos variables $\phi(t, x)$, llamada **campo de desplazamiento**.

El lagrangiano es la integral sobre x de la **densidad lagrangiana**:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \mu \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} Y (\partial_x \phi)^2, \quad (2.11)$$

y la acción es un funcional de $\phi(t, x)$,

$$S[\phi] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^\ell dx \mathcal{L} \left(\phi(x, t), \dot{\phi}(x, t), \partial_x \phi(x, t) \right). \quad (2.12)$$

Es posible obtener las ecuaciones de movimiento del campo $\phi(x, t)$ directamente a partir del lagrangiano continuo usando el principio de mínima acción. Para ello, se analiza cómo varía la acción bajo un cambio infinitesimal $\delta\phi$ del campo ϕ :

$$\phi(x, t) \rightarrow \phi(x, t) + \delta\phi(x, t). \quad (2.13)$$

Las derivadas del campo cambian de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \delta\phi(x, t), \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \delta\phi(x, t). \quad (2.15)$$

Sustituyendo estos cambios en la acción, se obtiene:

$$\delta S[\phi] = S[\phi + \delta\phi] - S[\phi] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^\ell dx \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \partial_t \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \phi)} \partial_x \delta\phi \right]. \quad (2.16)$$

Integrando por partes, la variación de la acción se convierte a

$$\begin{aligned} \delta S[\phi] = & \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^\ell dx \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \partial_x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \phi)} \right) \right] \delta\phi \\ & + \int_0^\ell dx \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \delta\phi \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \phi)} \delta\phi \Big|_{x=0}^{x=\ell}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

El principio de mínima acción requiere que $\delta S = 0$ para variaciones infinitesimales del campo que dejan fijo el valor del campo en los instantes inicial y final:

$$\delta\phi(t_1, x) = \delta\phi(t_2, x) = 0. \quad (2.18)$$

Además, como los extremos de la barra están fijos, también se impone:

$$\delta\phi(t, 0) = \delta\phi(t, \ell) = 0. \quad (2.19)$$

Bajo estas condiciones de borde, el segundo y tercer término de la ecuación (2.17) se anulan, y obtenemos la ecuación de Euler-Lagrange para el sistema continuo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \partial_x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \phi)} \right) = 0. \quad (2.20)$$

La ecuación de Euler-Lagrange para un campo escalar en una dimensión espacial es

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \phi)} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (2.21)$$

Para nuestro caso particular (2.11), la ecuación (2.21) se reduce a una ecuación de onda

$$\partial_t^2 \phi - c^2 \partial_x^2 \phi = 0, \quad c = \sqrt{\frac{Y}{\mu}}, \quad (2.22)$$

donde c es la velocidad de propagación de las vibraciones a lo largo de la barra. Estas excitaciones se denominan fonones acústicos. Su cuantización produce **fonones**, los cuantos bosónicos de la vibración de la red que obedecen la estadística de Bose-Einstein.

Hemos logrado así abandonar la descripción discreta en términos de N partículas puntuales, en favor de una que involucra grados de libertad continuos: un campo clásico. La dinámica de este último está especificada por los funcionales L y S , que representan las generalizaciones al continuo del lagrangiano clásico y de la acción, respectivamente. Las aplicaciones de funciones en los números reales o complejos se denominan generalmente *funcionales*. El argumento de un funcional se indica comúnmente entre corchetes $[\dots]$. Por ejemplo, en este caso, S lleva las funciones $\dot{\phi}$ y $\partial_x \phi$ al número real $S[\phi]$.

En este contexto, para aplicar el principio de mínima acción al funcional $S[\phi]$, es necesario que la derivada funcional $\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(x, t)}$ esté bien definida. Esta se define mediante la

relación

$$\delta S[\phi] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^\ell dx \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(x, t)} \delta \phi(x, t), \quad (2.23)$$

lo que implica que la variación de la acción debe poder escribirse únicamente como un término proporcional a $\delta \phi(x, t)$, sin contribuciones de borde. En este sentido, las condiciones de borde (2.18) y (2.19) eliminan todos los términos de borde que aparecen en la segunda línea de la variación (2.17), asegurando que $\delta S[\phi]$ tenga la forma (2.23) y que, por tanto, el funcional de la acción sea diferenciable.

Para construir el hamiltoniano, primero se introducen los momentos canónicos conjugados a los grados de libertad continuos (coordenadas generalizadas), ϕ . La generalización natural de la definición $p_i \equiv \partial_{\dot{x}_i} L$ de la mecánica de partículas puntuales al caso continuo es

$$\pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \partial_\phi \mathcal{L}. \quad (2.24)$$

Al igual que $\phi(x, t)$, el momento canónico $\pi(x, t)$ es un grado de libertad continuo: en cada punto del espacio puede tomar un valor independiente. A partir del lagrangiano, podemos definir el hamiltoniano realizando una transformada de Legendre,

$$H[\phi, \pi] \equiv \int dx \mathcal{H}(\phi, \pi), \quad \mathcal{H}(\phi, \pi) \equiv \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}(\phi), \quad (2.25)$$

donde $\mathcal{H}$ representa la densidad hamiltoniana. **Todas las cantidades que aparecen en $\mathcal{H}$ deben expresarse en función de π y ϕ .** En particular, aplicado al modelo de red (2.11),

$$\mathcal{H}(\phi, \pi) = \frac{\pi^2}{2\mu} + \frac{Y}{2} (\partial_x \phi)^2, \quad (2.26)$$

donde $\pi = \mu \dot{\phi}$. Se observa que $\mathcal{H} \geq 0$ cuando $\mu, Y > 0$, lo que implica la densidad de energía positiva.

2.2. Barra elástica anarmónica: el modelo continuo FPU $-\beta$

El lagrangiano armónico utilizado hasta ahora describe una barra cuyo potencial interatómico se aproxima mediante un pozo cuadrático, lo que implica que $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$ son cuadráticos en ϕ y sus derivadas. Como consecuencia, las ecuaciones de movimiento son lineales en ϕ , y por esta razón el modelo se denomina lineal. Esta imagen es excelente para deformaciones muy pequeñas, pero los cristales reales nunca son perfectamente armónicos: a medida que los átomos se alejan de sus posiciones de equilibrio, la fuerza

restauradora se desvía de la ley de Hooke, lo que conduce a velocidades del sonido dependientes de la amplitud, expansión térmica y dispersión entre fonones. La forma más simple de captar estos efectos consiste en mantener el campo de desplazamiento $\phi(t, x)$ del modelo lineal e incluir los términos no lineales en el desarrollo de la densidad de energía potencial. Retener términos del orden cuártico en la deformación $\partial_x \phi$ corresponde al *modelo Fermi–Pasta–Ulam–Tsingou* β en el límite continuo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \mu \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} Y (\partial_x \phi)^2 - \frac{\lambda}{4} (\partial_x \phi)^4, \quad \lambda > 0. \quad (2.27)$$

Aquí μ es la densidad de masa, Y el módulo de Young y λ mide la corrección anarmónica dominante. Un valor positivo de λ hace que la barra se vuelva efectivamente más rígida a grandes amplitudes, como se observa en la mayoría de los sólidos.

La variación de la acción $S = \int dt dx \mathcal{L}$ conduce a

$$\mu \partial_t^2 \phi - Y \partial_x^2 \phi - \lambda \partial_x [(\partial_x \phi)^3] = 0. \quad (2.28)$$

Los dos primeros términos reproducen la ecuación de onda lineal; el último introduce una corrección a la velocidad de propagación dependiente de la deformación, manteniendo una dinámica de segundo orden en el tiempo (solo aparecen derivadas ∂_t^2).

El momento canónico y la densidad hamiltoniana se obtienen directamente:

$$\pi = \mu \dot{\phi}, \quad \mathcal{H} = \frac{1}{2} \mu \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} Y (\partial_x \phi)^2 + \frac{\lambda}{4} (\partial_x \phi)^4, \quad (2.29)$$

donde se mantiene positiva la densidad de energía, $\mathcal{H} \geq 0$.

2.3. Ondas con no linealidad y dispersión: la ecuación de KdV

Muchas ecuaciones que describen sistemas macroscópicos son modelos fenomenológicos y no derivan de principios fundamentales. Por ello, no siempre es posible obtenerlas a partir de una acción, o solo puede hacerse sin describir sistemas físicos reales. Por ejemplo, la ecuación de onda del modelo de barra elástica describe perturbaciones que se propagan sin cambiar de forma, pero descuida dos efectos físicos importantes. Primero, para ondas de amplitud finita, el medio responde de forma no lineal, como ya se observó en el modelo FPU- β . Segundo, cuando la longitud de onda deja de ser muy grande comparada con la escala microscópica, emergen efectos dispersivos: los distintos modos de Fourier viajan a velocidades diferentes. El equilibrio entre no linealidad y dispersión puede dar lugar a una dinámica rica, como en el caso de los solitones. El ejemplo más simple en el que ambos mecanismos aparecen simultáneamente es la *ecuación de*

Korteweg–de Vries o KdV.

La ecuación de KdV describe la evolución de ondas superficiales unidireccionales en aguas poco profundas, ondas internas largas en fluidos estratificados, ondas ion-acústicas en plasmas, o vibraciones longitudinales en cadenas anarmónicas. El marco general implica un campo escalar real $u(t, x)$, que en el contexto de ondas de agua representa la elevación de la superficie libre. Suponemos que la amplitud de la onda es pequeña, la longitud de onda grande, y que el movimiento es esencialmente unidimensional. La no linealidad proviene del término de aceleración convectiva en las ecuaciones de Euler, mientras que la dispersión tiene su origen en la relación no local entre el desplazamiento de la superficie y el potencial de velocidad.

Bajo una escala adecuada de ondas largas y en un sistema de referencia en movimiento con la velocidad lineal de propagación, el campo de elevación $u(t, x)$ evoluciona según la ecuación

$$\partial_t u + \alpha u \partial_x u + \beta \partial_x^3 u = 0, \quad (2.30)$$

donde α y β son constantes reales cuyos signos y magnitudes dependen del sistema físico (por ejemplo, en aguas poco profundas, $\alpha > 0$, $\beta > 0$). El primer término produce un efecto de empujamiento: una protuberancia positiva ($u > 0$) se propaga más rápido en su cima que en sus extremos, causando que el perfil se deforme. El término de tercera derivada espacial, por el contrario, tiende a dispersar la onda y actúa en contra del empujamiento. La competencia entre estos dos efectos es lo que hace a la ecuación de KdV físicamente interesante.

La ecuación de KdV puede derivarse de un principio variacional, siempre que se elija adecuadamente la variable de campo. Si uno intenta escribir una acción directamente para $u(t, x)$, la derivada temporal de primer orden en (2.30) y la derivada espacial de tercer orden implican una estructura no local de la acción. Un truco común de evitar este problema consiste en introducir un campo potencial $\phi(t, x)$ tal que

$$u = \partial_x \phi. \quad (2.31)$$

En términos de ϕ , se puede construir la densidad lagrangiana local

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \phi_{,x} \phi_{,t} + \frac{\alpha}{6} (\phi_{,x})^3 + \frac{\beta}{2} \phi_{,x} \phi_{,xxx}, \quad (2.32)$$

donde usamos la notación corta para las derivadas parciales, $\phi_{,x} = \partial_x \phi$, $\phi_{,xxx} = \partial_x^3 \phi$, y similarmente para t . La variación de la acción $S = \int dt dx \mathcal{L}$ respecto a ϕ , aplicando la

identidad $u = \phi_x$, da lugar a la ecuación de KdV (2.30) en la forma

$$\partial_t u + \alpha u \partial_x u + \beta \partial_x^3 u = 0, \quad (2.33)$$

con $\alpha, \beta \neq 0$. Podemos fijar los coeficientes α y β a los valores estándares, -6 y 1 , mediante re-escalados adecuados de espacio, tiempo y amplitud, de siguiente manera. Introducimos las variables adimensionales $\tilde{x}$, $\tilde{t}$ y $\tilde{u}$ a través de las definiciones

$$x = L \tilde{x}, \quad t = T \tilde{t}, \quad u = A \tilde{u},$$

con L, T . Aplicando la regla de la cadena, obtenemos

$$u_{,t} = \frac{A}{T} \tilde{u}_{,\tilde{t}}, \quad u_{,x} = \frac{A}{L} \tilde{u}_{,\tilde{x}}, \quad u_{,xxx} = \frac{A}{L^3} \tilde{u}_{,\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}}. \quad (2.34)$$

Sustituyendo en (2.33) y dividiendo por A/T , la ecuación queda

$$\tilde{u}_{,\tilde{t}} + \alpha \frac{AT}{L} \tilde{u} \tilde{u}_{,\tilde{x}} + \beta \frac{T}{L^3} \tilde{u}_{,\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} = 0. \quad (2.35)$$

Para ser concretos, elegimos $\alpha > 0$ y $\beta > 0$. En este caso, siempre se pueden elegir L , T y A de modo que el coeficiente dispersivo sea 1 y el coeficiente no lineal sea -6 :

$$\beta \frac{T}{L^3} = 1, \quad \alpha \frac{AT}{L} = -6. \quad (2.36)$$

Basta, entonces, tomar

$$T = \frac{L^3}{\beta}, \quad A = -\frac{6\beta}{\alpha L^2}. \quad (2.37)$$

Una elección conveniente es $L = \sqrt{\beta/\alpha}$, que produce

$$T = \frac{\sqrt{\beta}}{\alpha^{3/2}}, \quad A = -6. \quad (2.38)$$

Con estos valores, la ecuación (2.35) se reduce a

$$\partial_{\tilde{t}} \tilde{u} - 6 \tilde{u} \partial_{\tilde{x}} \tilde{u} + \partial_{\tilde{x}}^3 \tilde{u} = 0, \quad (2.39)$$

que es la forma canónica de Korteweg–de Vries.

2.4. Sistemas integrables en dimensión infinita: el caso de KdV

Las ecuaciones de evolución que gobiernan la dinámica de nuestro campo son ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDPs), y se consideran integrables si poseen una estructura algebraica análoga a la de los sistemas integrables de dimensión finita, ver Sección 1.4.

Un sistema evolutivo de la forma

$$\partial_t u = F[u], \quad u = u(t, x), \quad (2.40)$$

es **integrable** si se puede escribir como una **ecuación de Lax**

$$\partial_t L = [B, L], \quad (2.41)$$

donde L y B son operadores diferenciales que dependen de $u(t, x)$ y sus derivadas.

En nuestro ejemplo, de la ecuación de KdV, definimos

$$L = -\partial_x^2 + u(t, x), \quad (2.42)$$

$$B = -4\partial_x^3 + 6u\partial_x + 3u_{,x}. \quad (2.43)$$

Entonces, la evolución de L está dada por

$$\partial_t L = [B, L], \quad (2.44)$$

y esta igualdad es equivalente a la ecuación de KdV (2.39).

El operador $L = -\partial_x^2 + u(t, x)$ es el operador de Schrödinger asociado al *potencial* $u(x, t)$, y la evolución de u según KdV preserva su espectro. Por lo tanto, de forma similar al caso finito (1.59), $\text{tr}(L^{n/2})$ es una integral del movimiento. Para obtener las cantidades conservadas, definimos primero la noción de operador pseudo-diferencial que generaliza los operadores diferenciales como

$$L = -\partial_x^2 + u(x), \quad (2.45)$$

para permitir potencias negativas de ∂_x , tales como:

$$P = \partial_x + a_{-1}(x)\partial_x^{-1} + a_{-2}(x)\partial_x^{-2} + \cdots. \quad (2.46)$$

Aquí, ∂_x^{-1} se define formalmente como el operador que satisface:

$$\partial_x \circ \partial_x^{-1} = \mathbb{I}, \quad (2.47)$$

lo que implica que es el operador de integración formal.

Sea

$$P = \sum_{k=-\infty}^N a_k(x) \partial_x^k \quad (2.48)$$

un operador pseudo-diferencial. Entonces, se define el residuo de P como:

$$\text{Res}(P) \equiv a_{-1}(x), \quad (2.49)$$

lo que se traduce en el coeficiente de ∂_x^{-1} en la expansión de P . Esto se llama el residuo del operador P , por analogía con el residuo de una serie de Laurent (que también es el coeficiente de z^{-1}).

Para calcular la raíz cuadrada del operador, utilizamos la expansión de Gel'fand–Dikii. Concretamente, suponemos que la raíz tiene forma

$$\sqrt{L} = i\partial + \sum_{k \geq 1} c_k \partial^{-k}. \quad (2.50)$$

El término $i\partial$ se elige de modo que, al cuadrar la expresión, se recupere el coeficiente $-\partial_x^2$ en (2.45), y c_k se determinan comparando los coeficientes en $\sqrt{L}^2$ y (2.45). Con esta construcción, se obtiene

$$\sqrt{L} = i\partial_x - \frac{i}{2}u\partial_x^{-1} + \frac{i}{4}u_{,x}\partial_x^{-2} - \frac{i}{8}(u_{,xx} + u^2)\partial_x^{-3} + \frac{i}{16}(u_{,xxx} + 6uu_{,x})\partial_x^{-4} + \mathcal{O}(\partial_x^{-5}). \quad (2.51)$$

Entonces,

$$\text{Res}(L^{1/2}) = -\frac{i}{2}u(x), \quad (2.52)$$

y así una densidad conservada es

$$H_1 = \int \text{Res}(L^{1/2}) dx = -\frac{i}{2} \int u(x) dx. \quad (2.53)$$

Este procedimiento genera y otras densidades conservadas, H_n , definidas por

$$H_n = \int \text{Res}(L^{n/2}) dx. \quad (2.54)$$

De hecho, se puede demostrar (ver Gel'fand–Dikii¹) que la traza de $L^{n/2}$ es igual a la integral de su residuo:

$$\text{Tr}(L^{n/2}) = \int \text{Res}(L^{n/2}) dx, \quad (2.55)$$

y esto proporciona una torre de cantidades conservadas locales. Por ejemplo, cuando $n = 3$, tenemos

$$L^{3/2} = -i \partial_x^3 + \frac{3i}{2} u \partial_x + \frac{3i}{4} u_{,x} + \left(\frac{i}{8} u_{,xx} - \frac{3i}{8} u^2 \right) \partial_x^{-1} + \mathcal{O}(\partial_x^{-2}), \quad (2.56)$$

tal que

$$\text{Res}(L^{3/2}) = \frac{i}{8} u_{,xx} - \frac{3i}{8} u^2 \quad \Rightarrow \quad H_3 = \int \left(\frac{i}{8} u_{,xx} - \frac{3i}{8} u^2 \right) dx. \quad (2.57)$$

Como el término $u_{,xx}$ es una derivada total, su integral desaparece (condiciones de contorno apropiadas), y se simplifica a

$$H_3 = -\frac{3i}{8} \int u^2 dx. \quad (2.58)$$

Este funcional es efectivamente conservado,

$$\frac{d}{dt} \int u^2 dx = \int 2uu_{,t} dx = \int (-12u^2 u_{,x} - 2uu_{,xxx}) dx = 0, \quad (2.59)$$

después de la integración por partes y cancelando los términos de borde a través de las condiciones de contrato adecuadas.

¹I. M. Gel'fand, L. A. Dikii, *Asymptotic behavior of the resolvent of Sturm–Liouville equations and the algebra of the KdV equation*, Russian Math Surveys 30 (5) 77-113.

I. M. Gel'fand, L. A. Dikii, *Fractional powers of operators and Hamiltonian systems*, Funct. Anal. Appl. 10 (4) 13-29.

I. M. Gel'fand, L. A. Dikii, *The resolvent and Hamiltonian systems*, Funct. Anal. Appl. 11 (2) 93-105.

3. Simetrías internas globales

3.1. Campo escalar complejo no relativista

No hay nada especial con un campo escalar real, por lo que podemos extender perfectamente el formalismo a un campo escalar complejo $\psi(t, \mathbf{x})$ en d dimensiones espaciales, con la coordenada del espaciotiempo $x^\mu = (t, \mathbf{x})$. Su acción es

$$S[\psi] = \int dt d^d x \mathcal{L}(\psi, \psi^\dagger). \quad (3.1)$$

Para asegurar que S sea real, se exige que

$$\mathcal{L}^\dagger = \mathcal{L} + \partial_\mu K^\mu, \quad (3.2)$$

con $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, donde la divergencia total no produce ninguna contribución en las ecuaciones de Euler-Lagrange, tal que ambas acciones gobiernan la misma dinámica del campo. Una forma conveniente de satisfacer (3.2) es hacer que la derivada temporal aparezca solo en el bilineal $i(\psi^\dagger \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^\dagger)$, cuyo conjugado complejo simplemente cambia el signo, compensado por el factor explícito de i . Los gradientes espaciales y cualquier potencial que dependa solo del módulo $|\psi| = \sqrt{\psi^\dagger \psi}$ son automáticamente reales. Por lo tanto, la densidad lagrangiana local más general, restringida a una derivada temporal y hasta dos derivadas espaciales, invariante bajo simetría galileana, es

$$\mathcal{L} = i \frac{a}{2} (\psi^\dagger \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^\dagger) - b |\nabla \psi|^2 - V(|\psi|^2), \quad (3.3)$$

donde $a \in \mathbb{R}$ y $b > 0$. Por otro lado, un término como $\psi^\dagger \partial_t \psi + \psi \partial_t \psi^\dagger$ es irrelevante porque es una derivada total.

La variación de la acción respecto a $\psi^\dagger$ produce la ecuación de Euler-Lagrange

$$ia \partial_t \psi = -b \nabla^2 \psi + \psi V'(|\psi|^2), \quad (3.4)$$

donde se ha definido el operador de Laplace $\nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla$, y $V' = \frac{dV}{d|\psi|^2}$.

Asumiendo que el campo es libre y sin masa, $V = 0$, y redefiniendo los parámetros constantes como $a = \hbar$ y $b = \hbar^2/2m$, se obtiene la ecuación de Schrödinger libre. En cambio, si se considera el potencial cuártico,

$$V(|\psi|^2) = \frac{g}{2} |\psi|^4, \quad g \in \mathbb{R}, \quad (3.5)$$

se obtiene el siguiente lagrangiano,

$$\mathcal{L}_{\text{GP}} = \frac{i\hbar}{2} \left(\psi^\dagger \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^\dagger \right) - \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi|^2 - \frac{g}{2} |\psi|^4. \quad (3.6)$$

La ecuación de Euler–Lagrange resulta entonces

$$i\hbar \partial_t \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + g |\psi|^2 \psi, \quad (3.7)$$

que es la ecuación de Gross–Pitaevskii, la cual rige los condensados de Bose–Einstein diluidos. Un acoplamiento repulsivo $g > 0$ estabiliza condensados uniformes, mientras que $g < 0$ permite solitones brillantes en una dimensión y provoca inestabilidades por colapso en dimensiones mayores.

3.2. Teorema de Noether para campos

Considérese un conjunto de campos $\{\phi^a(x)\}$ definidos sobre el espacio-tiempo de dimensión $d+1$, con la acción

$$S[\phi] = \int d^{d+1}x \mathcal{L}(\phi^a, \partial_\mu \phi^a, x). \quad (3.8)$$

De manera análoga al caso de sistemas de dimensión finita, podemos aplicar el principio de mínima acción para obtener las ecuaciones de Euler–Lagrange. Al variar los campos en la acción,

$$\delta S[\phi] = \int d^{d+1}x \delta \mathcal{L} = \int d^{d+1}x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} \delta \phi^a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^a)} \delta (\partial_\mu \phi^a) \right), \quad (3.9)$$

e integrando por partes el segundo término, que se escribe como

$$\int d^{d+1}x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^a)} \delta \phi^a \right) - \int d^{d+1}x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^a)} \right) \delta \phi^a,$$

se obtiene

$$\delta S[\phi] = \int d^{d+1}x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^a)} \right) \right] \delta \phi^a + \int d^{d+1}x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^a)} \delta \phi^a \right). \quad (3.10)$$

El último término es una divergencia total y se convierte en un término de borde (véase la discusión más adelante). Suponiendo condiciones de contorno adecuadas, por ejemplo

que el campo esté fijado en el borde del espacio-tiempo, $\delta\phi^a|_{\text{borde}} = 0$, resulta finalmente

$$\delta S[\phi] = \int d^{d+1}x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^a)} \right) \right] \delta\phi^a, \quad (3.11)$$

lo que permite identificar la derivada funcional $\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi^a(x)}$. El principio de mínima acción conduce entonces a las ecuaciones de Euler-Lagrange,

$$\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi^a} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^a)} \right) = 0, \quad (3.12)$$

una para cada campo ϕ^a , como generalización de la expresión (1.17) para un sistema de dimensión finita.

Sea una simetría continua global parametrizada por un número real pequeño ϵ , bajo la cual los campos transforman como

$$\phi^a(x) \longrightarrow \phi^a(x) + \epsilon \delta\phi^a(x), \quad \delta x^\mu = 0. \quad (3.13)$$

Nota que consideramos una *simetría interna global*, lo cual significa que actúa en el *espacio de valores* del campo, *no* sobre las coordenadas de espacio-tiempo, tal que x^μ es fijo ($\delta x^\mu = 0$). En contraste, para simetrías del espacio-tiempo (por ejemplo, traslaciones), $\delta x^\mu \neq 0$ y la corriente de Noether incluye términos adicionales de tipo $\mathcal{L} \delta x^\mu$.

La condición de invarianza de la acción bajo las transformaciones infinitesimales (3.13) requiere que la densidad lagrangiana cambia a lo sumo en una derivada total,

$$\delta \mathcal{L} = \epsilon \partial_\mu F^\mu. \quad (3.14)$$

En este caso, la acción es invariante, porque cambia solo como un término de borde $\delta S = \int d^{d+1}x \partial_\mu F^\mu$, tal que S y $S + \delta S$ describen la misma dinámica. Aplicando la identidad de Noether

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} \delta\phi^a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^a)} \partial_\mu \delta\phi^a, \quad (3.15)$$

integrando por partes y usando las ecuaciones de Euler-Lagrange, se obtiene la **corriente de Noether**

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)} \delta \phi^a - F^\mu, \quad (3.16)$$

que satisface la ley de conservación

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (3.17)$$

La ecuación de continuidad $\partial_\mu j^\mu = 0$ se escribe de manera equivalente como

$$\frac{\partial j^0}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (3.18)$$

y es análoga a la conservación de masa o carga eléctrica. Definimos la *carga* como

$$Q(t) = \int_{\mathbb{R}^d} d^d x \, j^0(t, \mathbf{x}). \quad (3.19)$$

Derivando en el tiempo y aplicando la ecuación de continuidad, se obtiene

$$\frac{dQ}{dt} = \int d^d x \, \frac{\partial j^0}{\partial t} = - \int_V d^d x \, \nabla \cdot \mathbf{j} = - \oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \quad (3.20)$$

Aquí, S es la superficie cerrada que delimita el volumen V , y el elemento de superficie orientado es

$$d\mathbf{S} \equiv \mathbf{n} \, dS, \quad (3.21)$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector unitario normal a S que apunta hacia afuera. La aplicación del teorema de Stokes convierte la integral de divergencia de la corriente $\mathbf{j}$ en una integral de superficie. Físicamente, esto nos indica que toda carga que abandona la región V debe atravesar su frontera como un flujo del vector de corriente $\mathbf{j}$. Este tipo de ley de conservación local se cumple en toda teoría de campo local.

Si ahora tomamos el volumen de integración como todo el espacio, es decir, $S = S_\infty$, y asumimos que los campos desaparecen suficientemente rápido en el infinito espacial, que es una suposición estándar, ya que la mayoría de los campos físicos tienen un alcance corto, entonces

$$- \oint_{S_\infty} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (3.22)$$

lo que implica inmediatamente la conservación de la carga de Noether,

$$\frac{dQ}{dt} = 0. \quad (3.23)$$

3.3. Campo escalar complejo y corriente de número de partículas

Para un campo escalar complejo $\phi(x)$, el lagrangiano invariante bajo cambios de fase globales $U(1)$ es

$$\mathcal{L} = -\partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - V(|\phi|^2), \quad (3.24)$$

donde el término cinético covariante tiene un signo menos por la signatura de la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(- + \cdots +)$, para que el término cinético usual $|\dot{\phi}|^2$ sea positivo en $-\partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi = -\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^\dagger \partial_\nu \phi = |\dot{\phi}|^2 - |\nabla \phi|^2$.

La simetría es dada por las transformaciones de campos

$$\phi(x) \longrightarrow e^{i\alpha} \phi(x), \quad \phi^\dagger(x) \longrightarrow e^{-i\alpha} \phi^\dagger(x), \quad \alpha = \text{const.} \quad (3.25)$$

Las transformaciones infinitesimales se obtienen tratando α como un parámetro pequeño,

$$\delta\phi = e^{i\alpha} \phi - \phi \simeq i\alpha\phi, \quad \delta\phi^\dagger = e^{-i\alpha} \phi^\dagger - \phi^\dagger \simeq -i\alpha\phi^\dagger, \quad (3.26)$$

e implican que el lagrangiano es invariante, $\delta\mathcal{L} = 0$, por lo que $F^\mu = 0$ en (3.14). Aplicando la fórmula general (3.16) para la corriente de Noether en el caso de los campos $\phi^a = (\phi, \phi^\dagger)$, se obtiene

$$\begin{aligned} j^\mu(\alpha) &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\dagger)} \delta\phi^\dagger \\ &= (-\partial^\mu\phi^\dagger) (i\alpha\phi) + (-\partial^\mu\phi) (-i\alpha\phi^\dagger) \\ &= i\alpha (\phi^\dagger \partial^\mu\phi - \phi \partial^\mu\phi^\dagger). \end{aligned} \quad (3.27)$$

El parámetro de simetría se toma fuera de la corriente: $j^\mu(\alpha) = \alpha j^\mu$. El flujo de carga cumple, usando las ecuaciones de Euler-Lagrange,

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (3.28)$$

y la carga conservada,

$$Q = \int d^d x j^0(t, \mathbf{x}) = i \int d^d x (\phi \dot{\phi}^\dagger - \phi^\dagger \dot{\phi}), \quad (3.29)$$

se interpreta como el **número de partículas**, o carga $U(1)$, del campo. En la teoría cuantizada, Q cuenta el número de partículas menos el número de antipartículas, reflejando la conservación de la simetría global $U(1)$.

3.4. Corriente de Noether para el lagrangiano de Gross–Pitaevskii

La densidad lagrangiana no relativista del condensado de Bose (3.6) posee una *simetría interna global* de cambio de fase $U(1)$:

$$\psi(x) \longrightarrow e^{i\alpha} \psi(x), \quad \psi^\dagger(x) \longrightarrow e^{-i\alpha} \psi^\dagger(x), \quad \alpha = \text{const.} \quad (3.30)$$

Al ser una simetría interna, las coordenadas no cambian, $\delta x^\mu = 0$. Para la variación infinitesimal, encontramos similarmente como en el ejemplo anterior

$$\delta\psi = i\alpha \psi, \quad \delta\psi^\dagger = -i\alpha \psi^\dagger, \quad \alpha \ll 1, \quad (3.31)$$

lo que deja $\mathcal{L}_{\text{GP}}$ estrictamente invariante ($\delta\mathcal{L}_{\text{GP}} = 0$), por lo cual $F^\mu = 0$.

Calculando las expresiones auxiliares

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{GP}}}{\partial(\partial_t \psi)} = \frac{i\hbar}{2} \psi^\dagger, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{GP}}}{\partial(\partial_t \psi^\dagger)} = -\frac{i\hbar}{2} \psi, \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{GP}}}{\partial(\partial_i \psi)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_i \psi^\dagger, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{GP}}}{\partial(\partial_i \psi^\dagger)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_i \psi, \quad (3.33)$$

obtenemos las componentes de la corriente $j^\mu = (j^0, j^i)$

$$j^0 = \frac{i\hbar}{2} \psi^\dagger (i\psi) + \left(-\frac{i\hbar}{2} \psi\right) (-i\psi^\dagger) = -\hbar \psi^\dagger \psi, \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} j^i &= -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_i \psi^\dagger (i\psi) - \frac{\hbar^2}{2m} \partial_i \psi (-i\psi^\dagger) \\ &= \frac{\hbar}{2im} (\psi \partial_i \psi^\dagger - \psi^\dagger \partial_i \psi), \end{aligned} \quad (3.35)$$

tal que

$$j^0 = -\hbar |\psi|^2, \quad \mathbf{j} = \frac{\hbar}{2im} (\psi \nabla \psi^\dagger - \psi^\dagger \nabla \psi). \quad (3.36)$$

La identidad de Noether garantiza

$$\partial_t j^0 + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (3.37)$$

lo que es la ecuación de continuidad habitual de la ecuación de Gross–Pitaevskii o Schrödinger. Integrando sobre todo el espacio, obtenemos la carga conservada

$$Q = \int d^d x j^0(t, \mathbf{x}) = -\hbar \int d^d x |\psi(t, \mathbf{x})|^2. \quad (3.38)$$

Como ya hemos visto, en el contexto de la teoría cuántica de campos, $-Q/\hbar$ representa el número total de partículas.

Un argumento de escalamiento simple (del tipo de Derrick) muestra que, para $g > 0$, el campo de Gross–Pitaevskii en $d \geq 2$ no admite ninguna localización de energía finita e independiente del tiempo. La demostración se pospone hasta después de tratar el caso relativista.

Fundamentos de la teoría de campos relativista

Las simetrías de una teoría de campos relativista se dividen en dos tipos fundamentales:

- **Simetrías externas (de espacio-tiempo).** Son aquellas que actúan sobre las coordenadas x^μ . Por ejemplo, las transformaciones del grupo de Poincaré.
- **Simetrías internas.** Son aquellas que actúan únicamente sobre los campos, sin modificar las coordenadas, como por ejemplo la simetría $U(1)$ que hemos visto en el capítulo anterior.

Podríamos imaginar casos en los cuales las transformaciones internas llevan índices de espacio-tiempo y, por lo tanto, esta separación no sería estricta. Sin embargo, el **teorema de Coleman–Mandula** nos dice que, bajo ciertas hipótesis, tal como que la teoría debe ser relativista, el grupo completo de simetría debe ser un producto directo

$$\text{Grupo total de simetría} = \text{Simetrías del espacio-tiempo} \times \text{Grupo interno},$$

esto es, no puede haber mezcla entre ambos grupos.

Obviamente, como cualquier teorema, este resultado se basa **en ciertas hipótesis**, en particular en que las simetrías forman una *álgebra de Lie*. Existe una forma de evitar el teorema y mezclar simetrías internas y de espacio-tiempo: se llama *supersimetría*, y escapa al teorema utilizando una *superálgebra de Lie* en lugar de una álgebra ordinaria. Por eso, el teorema de Coleman–Mandula no se aplica en este caso, y es reemplazado por el teorema de Haag–Łopuszański–Sohnius, que clasifica las posibles extensiones

supersimétricas del grupo de Poincaré.

No vamos a discutir más este tema, pero lo importante es que hemos aprendido que, en el contexto del teorema de Coleman–Mandula, podemos estudiar por separado las simetrías internas y las simetrías del espacio-tiempo. En una primera parte, vamos a estudiar las simetrías del espacio-tiempo.

4. Simetrías en física

4.1. Motivación

Cuando la relatividad especial afirma que **las leyes de la física son covariantes bajo transformaciones de Lorentz**, lo que realmente está estableciendo es cómo deben transformarse las cantidades físicas al cambiar de sistema inercial. Matemáticamente, este comportamiento se codifica mediante una *representación* del grupo de Lorentz:

- Un **campo escalar**, como la temperatura, permanece invariante: sigue la representación trivial.
- Un **campo vectorial**, como el campo eléctrico $\mathbf{E}$, mezcla sus componentes bajo rotaciones y boosts de la forma habitual.

Estos ejemplos ya nos sugieren una idea clave: los distintos tipos de campos físicos no son más que diferentes formas en que las transformaciones de Lorentz pueden actuar sobre los datos definidos en cada punto del espacio-tiempo. El conjunto de datos puede ser de dimensión finita (como los cuatro componentes de un vector) o infinita (por ejemplo, una onda escrita como superposición de modos). Lo esencial es la *regla de transformación*.

Pero al analizar más cuidadosamente las transformaciones de Lorentz, aparece una sorpresa. Existen trayectorias continuas de transformaciones que llevan un sistema de referencia de vuelta a sí mismo, pero que pueden hacer que ciertos objetos hipotéticos cambien de signo. Estos objetos no se pueden describir usando el grupo usual $SO^+(1, 3)$, ya que este no es simplemente conexo: su topología contiene *huecos* que impiden tales comportamientos. La solución es pasar al *recubridor universal* del grupo, denotado $\text{Spin}(1, 3)$. En este grupo ampliado aparecen nuevas representaciones que describen **campos espinoriales**, que son justamente los que permiten modelar electrones, neutrinos y quarks.

Nada de esto se puede formular, y mucho menos entender, sin el lenguaje de la teoría de grupos. Por eso, hacemos ahora una pausa en el desarrollo físico para construir una caja de herramientas que nos permita avanzar con solidez y responder con claridad las siguientes preguntas:

1. Qué es un grupo y qué significa que actúe sobre un conjunto.
2. Cómo las propiedades locales de un grupo de Lie están codificadas en su álgebra de Lie.
3. Por qué la topología global del grupo importa, y cómo conduce a la noción de recubridor universal.

Con estas ideas en mano, la clasificación de campos escalares, vectoriales, espinoriales y de mayor espín no será una lista que haya que memorizar, sino una consecuencia inevitable de la estructura matemática subyacente.

4.2. Grupo

Un **grupo** es un par $(G, \cdot)$, donde G es un conjunto no vacío y $\cdot$ es una operación binaria en G , lo que significa que para cualesquiera dos elementos $g, h \in G$, el producto $g \cdot h$ es nuevamente un elemento de G . Esta operación debe satisfacer los siguientes axiomas:

1. **Asociatividad:** Para todo $g, h, k \in G$, se cumple la regla

$$(g \cdot h) \cdot k = g \cdot (h \cdot k). \quad (4.1)$$

Esto garantiza que no necesitamos paréntesis al escribir múltiples productos.

2. **Elemento identidad:** Existe un único elemento $e \in G$ tal que para todo $g \in G$,

$$e \cdot g = g \cdot e = g. \quad (4.2)$$

Este elemento e se llama la *identidad* del grupo.

3. **Elemento inverso:** Para todo $g \in G$, existe un único elemento $g^{-1} \in G$ tal que

$$g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e. \quad (4.3)$$

El elemento g^{-1} se llama el *inverso* de g .

Si además la operación es *conmutativa*, es decir,

$$g \cdot h = h \cdot g \quad \text{para todo } g, h \in G, \quad (4.4)$$

el grupo se llama un *grupo abeliano*.

Ejemplos:

1. Los enteros con la suma. El conjunto $\mathbb{Z}$ con la suma $+$ es un grupo. La identidad es 0, el inverso de $n \in \mathbb{Z}$ es $-n$, y la suma es asociativa y conmutativa.

2. Los reales distintos de cero con la multiplicación. El conjunto $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ es un grupo bajo la multiplicación. La identidad es 1, el inverso de $x \in \mathbb{R}^*$ es $1/x$, y la multiplicación es asociativa y conmutativa.

3. Matrices $n \times n$ invertibles. El conjunto de todas las matrices reales $n \times n$ con determinante distinto de cero,

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\}, \quad (4.5)$$

es un grupo bajo la multiplicación de matrices. La identidad es la matriz identidad, y cada elemento tiene un inverso dado por el inverso usual de matrices. Este grupo **no** es abeliano.

Los grupos pueden ser finitos o infinitos, abelianos o no abelianos, discretos o continuos. Por ejemplo, el grupo de rotaciones en el plano, $SO(2)$, es continuo y está parametrizado por el ángulo de rotación $\theta \in [0, 2\pi)$. Sus elementos son

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in SO(2). \quad (4.6)$$

Es continuo porque depende suavemente de un parámetro. Ese parámetro recorre un espacio con topología de círculo S^1 (por la periodicidad de θ). En general, los parámetros de un grupo continuo forman un espacio que no tiene por qué ser plano: una variedad.

4.3. Variedad

En un espacio plano, generalmente utilizamos coordenadas cartesianas u otras que se ajusten a las simetrías del problema. Sin embargo, en un espacio genérico, donde no existen simetrías, no hay un sistema de coordenadas preferido. Aún más complicado, puede suceder que no sea posible emplear un único sistema de coordenadas.

Si consideramos una 2-esfera, con coordenadas esféricas (θ, ϕ) , podemos ver que no son bien definidas en $\theta = 0, \pi$ ya que ϕ no está definido. Además, la coordenada ϕ es discontinua en $\phi = 0$ o $\phi = 2\pi$. Por lo tanto, vamos a necesitar varias coordenadas que

cubran todo el espacio. Esta idea es la base de la noción de variedad.

Una variedad diferenciable de dimensión n , es un espacio M con una colección de subconjuntos abiertos O_i tal que

1. $\bigcup_i O_i = M$ (los abiertos O_i cubren M).
2. Para cada i existe un *homeomorfismo*

$$\Phi_i : O_i \longrightarrow U_i, \quad U_i \subset \mathbb{R}^n \text{ abierto.}$$

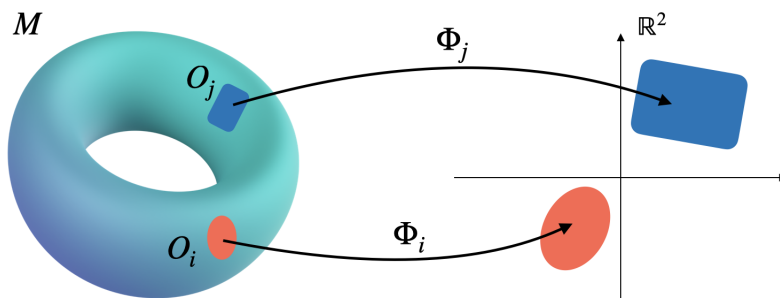
(Homeomorfismo = biyección *continua* con inversa continua, de modo que M es localmente $\mathbb{R}^n$.)

3. Si $O_i \cap O_j \neq \{\emptyset\}$, el mapa de transición

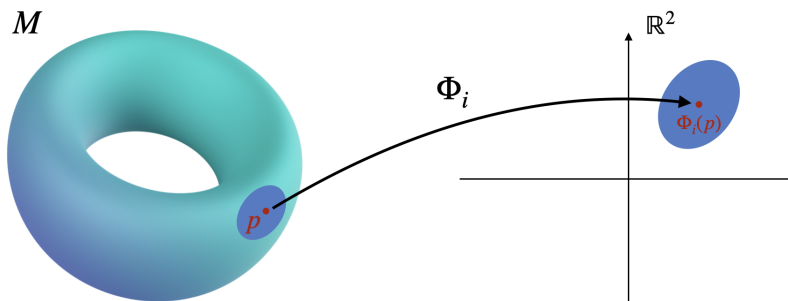
$$\Phi_j \circ \Phi_i^{-1} : \Phi_i(O_i \cap O_j) \longrightarrow \Phi_j(O_i \cap O_j),$$

es C^∞ (suave).

La aplicación Φ_i se llama una *carta* o *sistema de coordenadas* en O_i , y el conjunto de todas las cartas $\{(O_i, \Phi_i)\}$ se llama un *atlas*.



Estas funciones Φ_i nos permiten asociar M o sus partes a un espacio conocido, $\mathbb{R}^n$. De esa manera, podemos asignar coordenadas a los puntos de la variedad.

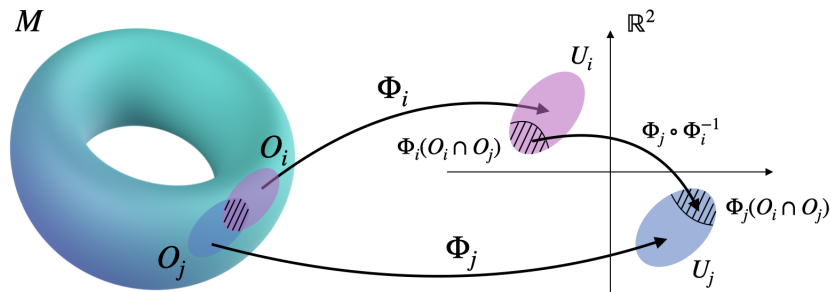


Como $\Phi_i(p)$ es un punto de $\mathbb{R}^n$ (en este caso $\mathbb{R}^2$), tenemos

$$\Phi_i(p) = (x_i^1(p), x_i^2(p), \dots, x_i^n(p)) ,$$

lo que implica que $x_i^\alpha(p)$ son las coordenadas de p . Elegir otra aplicación Φ_j que contiene el punto p es elegir otro sistema de coordenadas.

Para el tercer punto de la definición de una variedad, si $O_i \cap O_j \neq \{\emptyset\}$, esto es, que existen puntos que pertenecen a ambas cartas, o de forma similar, que tenemos dos coordenadas para estos puntos, debemos garantizar que es posible pasar de un sistema de coordenadas a otro de forma suave.

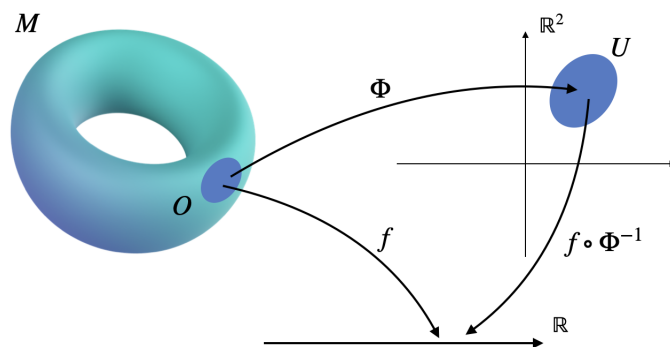


Ejemplos de variedades incluyen la recta $\mathbb{R}$ ($n = 1$), el círculo S^1 ($n = 1$) y la esfera S^2 ($n = 2$).

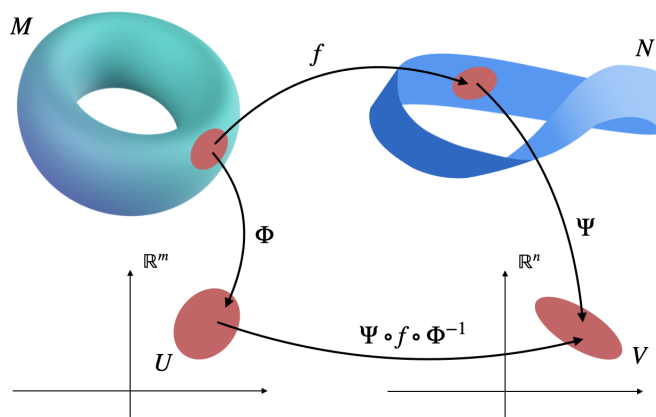
En resumen, para poder trabajar en una variedad necesitamos introducir un atlas. Este consiste en un conjunto de cartas que, región por región, nos permiten “trasladar” partes de la variedad a un espacio euclídeo, donde sabemos cómo hacer los cálculos. Luego, los resultados se vuelven a la variedad usando las cartas inversas. También es importante contar con las aplicaciones que relacionan dos cartas cuando se superponen. En este sentido, estas aplicaciones juegan un rol fundamental en la definición misma de una variedad.

4.3.1. Funciones suaves

Se dice que $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es suave (infinitamente diferenciable) si $f \circ \Phi^{-1} : U \rightarrow \mathbb{R}$ es suave para todo Φ .



De manera análoga, una aplicación $f : M \mapsto N$ es suave (siendo M y N variedades) si $\Psi \circ f \circ \Phi^{-1} : U \mapsto V$ es suave para toda carta (U, Φ) de M y toda carta (V, Ψ) de N , con $f(U) \subseteq V$.



No necesariamente tenemos que $\dim M = \dim N$, pero en el caso de que $\dim M = \dim N$ y que f es un homeomorfismo suave, es decir, que su inverso existe y es suave, f es un difeomorfismo. En este caso, se dice que M y N son difeomorfos, y se denota $M \equiv N$. Esto significa que podemos deformar de forma suave M en N y viceversa.

4.3.2. Espacio tangente

Los vectores se ven como flechas rectas que conectan dos puntos. Aunque esta imagen es inmediata en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, resulta menos evidente en una variedad curva: por ejemplo, en la 2-esfera, una *flecha recta* no permanece sobre la superficie.

Para evitar esa dificultad, recurrimos a la definición algebraica. Pensemos en la velocidad de una partícula, $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$, que se expresa como derivada y es tangente a la curva que describe la trayectoria.

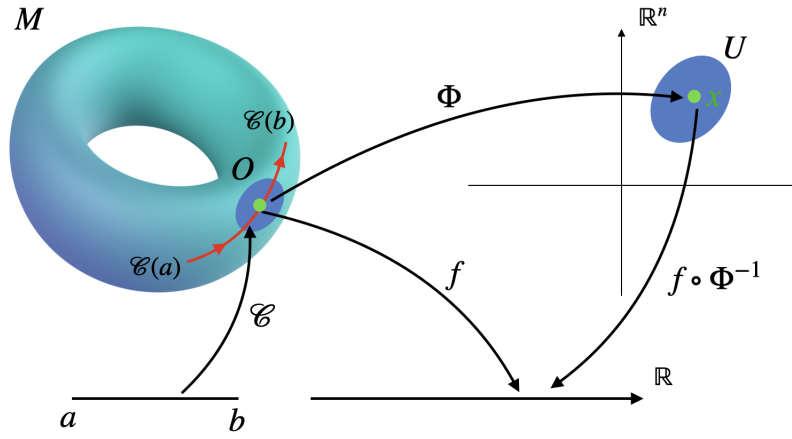
En el plano (x, y) , una curva puede aproximarse cerca de x_0 por

$$y = y(x_0) + a(x - x_0), \quad a \equiv \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_0}, \quad (4.7)$$

y se caracteriza completamente por la derivada (coeficiente a) en un entorno de x_0 . Queremos generalizar esta idea a una variedad M . Sea una curva

$$\mathcal{C} : (a, b) \longrightarrow M, \quad t \mapsto \mathcal{C}(t), \quad (4.8)$$

y una función suave $f : M \rightarrow \mathbb{R}$.

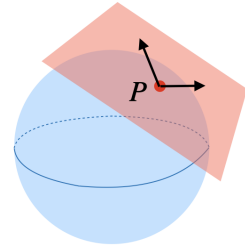


Para calcular la tasa de cambio de f a lo largo de $\mathcal{C}$ en $t = 0$, elegimos una carta Φ alrededor de $p = \mathcal{C}(0)$:

$$\left. \frac{d}{dt} f(\mathcal{C}(t)) \right|_{t=0} = \frac{\partial (f \circ \Phi^{-1})}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu(\mathcal{C}(t))}{dt} \bigg|_{t=0}.$$

Abusando de notación ($\partial f / \partial x^\mu \equiv \partial (f \circ \Phi^{-1}) / \partial x^\mu$), tenemos:

$$\left. \frac{d}{dt} f(\mathcal{C}(t)) \right|_{t=0} = V^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu}, \quad V^\mu \equiv \left. \frac{dx^\mu}{dt} \right|_{t=0}.$$



Concluimos que el operador direccional $V^\mu \partial_\mu$ no depende de la función f , sino sólo de la curva y del punto, por lo que define un **vector tangente** en p .

Distintas curvas por p producen distintos V^μ , pero la base $\{\partial_\mu\}$ es común. El conjunto de todos estos vectores forma el espacio tangente $T_p M$, un espacio vectorial de dimensión $n = \dim M$.

Al cambiar de carta $\Phi \rightarrow \Phi'$, obtenemos

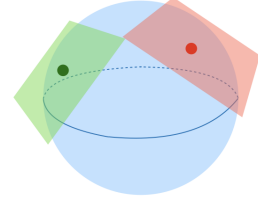
$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} f(\mathcal{C}(t)) \right|_{t=0} &= \left. \frac{\partial(f \circ \Phi'^{-1})}{\partial x'^{\nu}} \right|_p \left. \frac{dx'^{\nu}}{dt} \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{\partial f}{\partial x'^{\nu}} \right|_p \left. \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}} \frac{dx^{\mu}}{dt} \right|_{t=0}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Por lo tanto, encontramos

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}}, \quad (4.10)$$

que es la regla de transformación de las bases del espacio tangente.

Obviamente, en cada punto de la variedad existe un espacio tangente distinto. La reunión disjunta de todos los espacios tangentes forma el **fibrado tangente**:



$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M.$$

Dotado del atlas inducido por las cartas de M , este fibrado es una variedad de dimensión total $2n$: las n coordenadas de la base más las n coordenadas del vector en cada fibra (espacio tangente).

Ya que hemos definido un vector tangente como una derivada direccional, un campo vectorial no es más que una elección suave de un vector tangente en cada punto de la variedad. Más precisamente, es una aplicación que a cada punto $p \in M$ le asigna un operador de derivación $X_p \in T_p M$. En coordenadas, escribimos un campo vectorial como

$$X = X^{\mu}(x) \partial_{\mu}. \quad (4.11)$$

Dado otro campo vectorial $Y = Y^{\nu}(x) \partial_{\nu}$, podríamos preguntarnos si es posible componer estas derivaciones, esto es, aplicar primero Y y luego X a una función f . El resultado es

$$XY(f) \equiv X(Y(f)) = X^{\mu} \partial_{\mu} (Y^{\nu} \partial_{\nu} f) = X^{\mu} (\partial_{\mu} Y^{\nu}) \partial_{\nu} f + X^{\mu} Y^{\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu} f. \quad (4.12)$$

Lo mismo se puede hacer con $YX(f)$. Pero la composición XY no es un campo vectorial: involucra derivadas de segundo orden. Sin embargo, la combinación

$$XY(f) - YX(f) = (X^{\mu} \partial_{\mu} Y^{\nu} - Y^{\mu} \partial_{\mu} X^{\nu}) \partial_{\nu} f, \quad (4.13)$$

es nuevamente de primer orden, y por lo tanto define un campo vectorial.

Este nuevo campo se llama el **corchete de Lie** de X y Y , y se denota

$$[X, Y] = (X^\mu \partial_\mu Y^\nu - Y^\mu \partial_\mu X^\nu) \partial_\nu. \quad (4.14)$$

Este corchete mide cuánto *no conmutan* los campos X y Y cuando se aplican como derivaciones. Desde el punto de vista geométrico, tiene una interpretación clara: si uno se desplaza a lo largo del flujo de X y luego a lo largo del de Y , y después hace lo inverso (primero Y y luego X), el punto final no coincide, y la diferencia infinitesimal está gobernada precisamente por el campo vectorial $[X, Y]$.

Este fenómeno es característico de la estructura diferencial de la variedad: la no conmutatividad de derivadas direccionales refleja que no siempre se puede encontrar un sistema de coordenadas en el que ambos campos sean simultáneamente constantes.

4.4. Grupo de Lie

Un **grupo de Lie** es, al mismo tiempo, un grupo continuo y una variedad suave, de tal forma que la estructura de variedad es compatible con la de grupo. Más precisamente, un par $(G, \cdot)$ es un grupo de Lie si se cumplen:

- G es una variedad diferenciable de clase C^∞ .
- La multiplicación

$$\mu : G \times G \longrightarrow G, \quad \mu(g, h) = g \cdot h, \quad (4.15)$$

es una aplicación C^∞ .

- La inversión

$$\iota : G \longrightarrow G, \quad \iota(g) = g^{-1}, \quad (4.16)$$

también es C^∞ .²

Los grupos de Lie describen *simetrías continuas* en física y geometría.

²En realidad, solo es necesario pedir que μ sea suave. La suavidad de ι se obtiene automáticamente a partir de la de μ , usando el teorema de la función implícita. Aun así, incluimos la hipótesis de suavidad para ambas por motivos pedagógicos.

Definiciones topológicas útiles:

- **Conexo:** una variedad M es conexa si no puede descomponerse como la unión disjunta de dos abiertos no vacíos.
- **Simplemente conexo:** M es simplemente conexa si es conexa y todo lazo cerrado en M puede contraerse a un punto (equivalentemente, su primer grupo fundamental es trivial).
- **Compacto:** M es compacto si toda familia de abiertos que lo cubre admite un subcubrimiento finito. En $\mathbb{R}^n$, es equivalente a pedir que sea cerrado y acotado por el teorema de Heine-Borel.

Por ejemplo, $(0, 1)$ no es compacto porque no es cerrado. Esto se puede demostrar considerando una familia de abiertos. Consideremos los abiertos

$$U_n = \left(0, 1 - \frac{1}{n}\right), \quad n = 2, 3, \dots \quad (4.17)$$

Estos forman un recubrimiento abierto de $(0, 1)$, ya que todo punto $x \in (0, 1)$ pertenece a algún U_n . Si tomamos una cantidad finita de ellos, el mayor intervalo que obtenemos es $\left(0, 1 - \frac{1}{N}\right)$ para cierto N finito. Este intervalo no cubre los puntos en $\left(1 - \frac{1}{N}, 1\right)$, por lo que ninguna subfamilia finita cubre todo $(0, 1)$. En consecuencia, $(0, 1)$ no es compacto: aunque está acotado, no es cerrado, ya que carece de sus puntos límite 0 y 1.

Ejemplos:

1. El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ con la suma vectorial es un grupo de Lie de dimensión n . Es *conexo*, *simplemente conexo* y *abeliano*, pero no es compacto.
2. El grupo general lineal $GL(n, \mathbb{R})$ definido por

$$GL(n, \mathbb{R}) = \left\{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A \neq 0 \right\}, \quad (4.18)$$

es un grupo de dimensión n^2 que no es conexo, pues se descompone en dos componentes según el signo del determinante $\det A$. En consecuencia, no es simplemente conexo. Además, no es compacto. En efecto, un teorema establece que la imagen de un espacio compacto bajo una aplicación continua también es compacta:

Si $f : X \rightarrow Y$ es continua (C^0) y $K \subset X$ es compacto, entonces $f(K) \subset Y$ es compacto.

La aplicación determinante, $\det : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$, es continua. Si $GL(n, \mathbb{R})$ fuera compacto, su imagen sería compacta; pero $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ no es compacta. Entonces, $GL(n, \mathbb{R})$ no es compacto tampoco.

3. El grupo lineal especial $SL(n, \mathbb{R})$ se define como el subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$ constituido por matrices unimodulares:

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\}. \quad (4.19)$$

Para $n = 1$, el caso es trivial: $SL(1, \mathbb{R}) = \{1\}$, luego es conexo, simplemente conexo y compacto. Para $n \geq 2$, $SL(n, \mathbb{R})$ es conexo, pero no simplemente conexo ni compacto. Por ejemplo, contiene el subgrupo $t \mapsto \text{diag}(e^t, e^{-t}, 1, \dots, 1) \cong \mathbb{R}$, que no es compacto.

4. El grupo ortogonal $O(n)$ y su componente $SO(n)$ son definidos por

$$O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^\top A = AA^\top = I\}, \quad SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}, \quad (4.20)$$

donde A (con $A^{-1} = A^\top$) se llama matriz ortogonal. Ambos grupos son de dimensión $n(n-1)/2$, lo que significa que se necesita este número de parámetros independientes reales para especificar un elemento del grupo. El grupo $O(n)$ es compacto y no conexo aunque $SO(n)$ es compacto, conexo pero no es simplemente conexo.

5. El círculo S^1 es definido por

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \simeq \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}). \quad (4.21)$$

Es un grupo de Lie compacto, abeliano, unidimensional y conexo, pero no simplemente conexo.

5. El grupo especial unitario $SU(2)$ se define por

$$SU(2) = \{U \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \mid U^\dagger U = UU^\dagger = I, \det U = 1\}, \quad (4.22)$$

donde U (con $U^{-1} = U^\dagger$) se llama matriz unitaria. Es un grupo de dimensión 3. Es compacto, conexo y *simplemente conexo*. Vamos a ver que actúa como recubridor universal de $SO(3)$, lo que es crucial para describir espinores en física.

4.5. Álgebra de Lie

A todo grupo de Lie, G , se le asocia una estructura infinitesimal: su *álgebra de Lie*, denotada por $\mathfrak{g}$. Esta álgebra codifica el comportamiento local de G cerca del elemento

identidad.

Definición. El álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de un grupo de Lie G es el espacio tangente en la identidad:

$$\mathfrak{g} = T_e G. \quad (4.23)$$

Además de su estructura de espacio vectorial (real o complejo), $\mathfrak{g}$ está dotada de un corchete bilineal

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, \quad (4.24)$$

llamado **corchete de Lie**, que tiene las propiedades:

- **Bilinealidad:** $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ y análogamente en el segundo argumento. Aquí, $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ y a, b son escalares (números).
- **Antisimetría:** $[X, Y] = -[Y, X]$, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. Una consecuencia de la identidad es $[X, X] = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$.
- **Identidad de Jacobi:** $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Ejemplo:

Para el grupo de rotaciones en dos dimensiones, con el elemento

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in SO(2),$$

la derivada en $\theta = 0$ da el generador infinitesimal del álgebra:

$$T = \left. \frac{dR(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.25)$$

El álgebra de Lie $\mathfrak{so}(2)$ está generada por este único elemento, y es abeliana:

$$[T, T] = 0. \quad (4.26)$$

El mapa exponencial. Dado un elemento $X \in \mathfrak{g} = T_e G$, existe una única curva $g(t)$ en G tal que:

$$g(0) = e, \quad \left. \frac{d}{dt} g(t) \right|_{t=0} = X. \quad (4.27)$$

El punto alcanzado en el grupo en $t = 1$ se llama la *exponencial* de X , y se denota por:

$$\exp(X) = g(1). \quad (4.28)$$

Esto define una aplicación suave:

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G, \quad (4.29)$$

llamada **mapa exponencial del grupo de Lie**. En general, $\exp(X)$ pertenece a la componente conexa de la identidad en G .

Caso matricial. Si G es un grupo de matrices, como $GL(n, \mathbb{R})$, $SO(n)$, $SU(n)$, etc., el mapa exponencial es simplemente la serie de potencias usual:

$$\exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k. \quad (4.30)$$

Esta serie converge para toda matriz X , y el resultado pertenece a G si X está en $\mathfrak{g}$.

Ejemplo:

Sea $T \in \mathfrak{so}(2)$ el generador infinitesimal de rotaciones:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.31)$$

Observemos que

$$T^{2n} = (-1)^n I, \quad T^{2n+1} = (-1)^n T. \quad (4.32)$$

Entonces, podemos reagrupar la serie como:

$$\begin{aligned}
\exp(\theta T) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\theta T)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (\theta T)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (\theta T)^{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n}}{(2n)!} I + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n+1}}{(2n+1)!} T \\
&= \cos \theta \cdot I + \sin \theta \cdot T.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Finalmente, sustituimos T y obtenemos:

$$\begin{aligned}
\exp(\theta T) &= \cos \theta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin \theta \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = R(\theta) \in SO(2).
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Este ejemplo muestra cómo toda rotación finita se obtiene como exponencial de un **generador infinitesimal**.

Observaciones importantes:

- Hay elementos de G que no son de la forma $\exp(tX)$ para ningún $X \in \mathfrak{g}$ si G no es conexo. La recíproca es falsa: por ejemplo, en $SL(2, \mathbb{R})$ el elemento

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \tag{4.35}$$

no es un exponencial **real**, $X \neq e^A$. La razón es que si A es real, los autovalores de e^A son e^{λ_i} . Para obtener autovalores reales negativos, los λ_i deben venir en pares conjugados $a \pm i\pi$, lo que produce autovalores negativos iguales. En dimensión 2×2 , e^A sólo puede tener autovalores negativos si ambos son iguales; como $-2 \neq -1/2$, no puede ser e^A .

- El álgebra de Lie determina la estructura local del grupo, pero no la global.

Constantes de estructura. Fijemos una base $\{T_a\}_{a=1}^{\dim G}$ del álgebra de Lie $\mathfrak{g} = T_e G$. Como $[T_a, T_b]$ es un elemento de la álgebra, tenemos $[T_a, T_b] \propto T_c$. Por lo tanto, definimos las *constantes de estructura* f_{ab}^c como los coeficientes que aparecen al expresar el conmutador $[T_a, T_b]$ en la base $\{T_c\}$:

$$[T_a, T_b] = f_{ab}^c T_c. \quad (4.36)$$

Bilinealidad y antisimetría del corchete implican

$$f_{ab}^c = -f_{ba}^c, \quad (4.37)$$

mientras que la identidad de Jacobi $[T_a, [T_b, T_c]] + \text{cic.} = 0$ equivale a la condición algebraica

$$f_{ad}^e f_{bc}^d + f_{bd}^e f_{ca}^d + f_{cd}^e f_{ab}^d = 0. \quad (4.38)$$

Se observa que las constantes de estructura dependen de la base elegida.

Ejemplo:

Para el caso del álgebra $\mathfrak{so}(2)$, con la base $\{T\}$ del ejemplo anterior, tenemos $[T, T] = 0$, por lo cual la constante de estructura es $f_{TT}^T = 0$. Entonces, el álgebra es abeliana.

Un álgebra de Lie es abeliana si y solo si todos sus conmutadores se anulan, es decir, si sus constantes de estructura son nulas. Para un grupo de Lie conexo, el grupo es abeliano si y solo si su álgebra de Lie es abeliana.

Un ejemplo que muestra que la condición de conexidad del grupo es esencial es el grupo ortogonal $O(2)$. Su álgebra de Lie coincide con la de $SO(2)$, es unidimensional y, por tanto, abeliana. Sin embargo, el grupo $O(2)$ no es conexo (tiene dos componentes: rotaciones y reflexiones) y, de hecho, no es abeliano. Por ejemplo, si $R(\theta)$ es una rotación y P una reflexión, se cumple $PR(\theta)P^{-1} = R(-\theta)$, de modo que $PR(\theta) \neq R(-\theta)P$ salvo en casos triviales. Así, el grupo no conmuta aunque su álgebra de Lie sí sea abeliana.

4.6. Representaciones de grupos de Lie y álgebras de Lie

Una **representación** de un grupo de Lie G sobre un espacio vectorial V (real o complejo) es una aplicación suave

$$\rho : G \rightarrow GL(V), \quad (4.39)$$

tal que, para todo $g_1, g_2 \in G$, se cumple

$$\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1) \rho(g_2), \quad \rho(e) = I. \quad (4.40)$$

En otras palabras, ρ es un *homomorfismo de grupos* compatible con la estructura diferenciable. Aquí, $GL(V)$ es el grupo lineal general de V , es decir, el conjunto de todas las transformaciones lineales invertibles de V en sí mismo, con la composición de aplicaciones como operación de grupo, y I es el elemento identidad de $GL(V)$.

Una representación natural de todo grupo de Lie es la **representación adjunta**, que describe cómo el grupo actúa sobre su propia álgebra de Lie por conjugación:

$$\text{Ad}_g(X) \equiv gXg^{-1}, \quad X \in \mathfrak{g}, \quad g \in G. \quad (4.41)$$

Esta acción preserva la estructura de corchete:

$$[\text{Ad}_g(X), \text{Ad}_g(Y)] = \text{Ad}_g([X, Y]). \quad (4.42)$$

Por tanto, $\text{Ad}_g : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})$ es una representación en $\mathfrak{g}$, donde $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ es el grupo de automorfismos de $\mathfrak{g}$, o el conjunto de todas las transformaciones lineales invertibles que preservan el corchete.

Una representación de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ en un espacio vectorial V es una aplicación lineal

$$\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V), \quad (4.43)$$

tal que

$$\varphi([X, Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}. \quad (4.44)$$

Dicho de otro modo, φ es un homomorfismo de álgebras de Lie. Dado que $\mathfrak{gl}(V)$ es el conjunto de endomorfismos de V con el corchete $[A, B] = AB - BA$, esta condición asegura que se respeta la estructura algebraica.

Por ejemplo, en el caso de la **representación adjunta**, cada $X \in \mathfrak{g}$ define un endomorfismo $\text{ad}_X : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, con $\text{ad}_X(Y) = [X, Y]$. En consecuencia, en la base elegida, eso se traduce a

$$(\text{ad}_{T_a})^c_b = f_{ab}^c, \quad (4.45)$$

de modo que ad_X realiza a $\mathfrak{g}$ como un subálgebra de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.

A partir de eso, se puede definir una noción importante, la **forma de Killing o métrica de Cartan**. La *forma de Killing* es la forma bilineal invariante,

$$K_{ab} \equiv \text{Tr}(\text{ad}_{T_a} \text{ad}_{T_b}) = f_{ad}{}^c f_{bc}{}^d, \quad (4.46)$$

que tiene siguientes propiedades clave. Es:

- Simétrica: $K_{ab} = K_{ba}$.
- Invariante: $K([X, Y], Z) + K(Y, [X, Z]) = 0$.

Para un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ finito dimensional, la métrica de Cartan es no degenerada si y solo si $\mathfrak{g}$ es *semisimple*. En este caso, puede introducirse la métrica inversa K^{ab} para *subir y bajar índices* de tensores:

$$X_a \equiv K_{ab} X^b, \quad X^a \equiv K^{ab} X_b. \quad (4.47)$$

La definición de la métrica inversa, $K^{ab} K_{bc} = \delta_c^a$, garantiza que, si primero subimos un índice y luego lo bajamos (o viceversa), recuperamos el mismo tensor.

En particular, podemos bajar un índice en las constantes de estructura,

$$f_{abc} \equiv K_{cd} f_{ab}{}^d, \quad (4.48)$$

de modo que la identidad de Jacobi puede escribirse como $f_{[ab}{}^d f_{c]d}{}^e = 0$. También se puede mostrar que f_{abc} es completamente antisimétrica. Como consecuencia, si los índices a, b, c recorren uno o dos valores (álgebras unidimensionales y bidimensionales), necesariamente $f_{abc} \equiv 0$, y el álgebra es abeliana. En cambio, si recorren tres valores, f_{abc} es proporcional al tensor totalmente antisimétrico ε_{abc} , correspondiendo al caso de álgebras simples tridimensionales.

Observaciones adicionales:

- K_{ab} coincide con el producto escalar euclídeo $2\delta_{ab}$ para $\mathfrak{su}(2)$ y con $(n-2)\delta_{ab}$ para $\mathfrak{so}(n)$ ($n \neq 4$)³.

³El caso $n = 4$ es especial porque $\mathfrak{so}(4)$ no es simple, sino semisimple: se descompone como $\mathfrak{so}(4) \cong \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$. La forma de Killing resulta ser bloque-diagonal, con un bloque proporcional a $2\delta_{ab}$ para cada factor simple. Por ello, la expresión $(n-2)\delta_{ab}$ debe aplicarse por separado a cada componente simple.

- En álgebras no semisimples (p. ej., $\mathfrak{iso}(n)$), la forma de Killing es degenerada. Por lo tanto, se requiere una forma invariante distinta, o un procedimiento de doble extensión, para definir una métrica.

Relación entre representaciones de G y $\mathfrak{g}$. Toda representación suave de un grupo de Lie induce una representación de su álgebra de Lie mediante derivación en la identidad:

$$\varphi(X) \equiv \left. \frac{d}{dt} \rho(\exp(tX)) \right|_{t=0}. \quad (4.49)$$

Esto define un homomorfismo de álgebras de Lie:

$$\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V), \quad (4.50)$$

y se llama la *representación infinitesimal* asociada a ρ .

Representaciones reducibles e irreducibles. Sea V un espacio vectorial y sea $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ una representación. Decimos que:

- La representación es **reducible** si existe un subespacio $W \subset V$, con $W \neq \{0\}, V$, tal que

$$\varphi(X)(W) \subset W, \quad \forall X \in \mathfrak{g}. \quad (4.51)$$

- En caso contrario, la representación es **irreducible**.
- Si $V = V_1 \oplus V_2$ con V_1, V_2 invariantes, entonces $\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2$ es la **suma directa** de representaciones.
- Si además existe una forma bilineal (o hermítica) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tal que cada $\varphi(X)$ es antihermítico respecto a ella, la representación se dice **unitaria**.

Representaciones tensoriales. Dado un grupo de Lie G y una representación $\rho : G \rightarrow GL(V)$, se pueden construir representaciones sobre espacios tensoriales. Por ejemplo, el producto tensorial: $\rho^{(2)}(g) = \rho(g) \otimes \rho(g)$ actúa sobre $V \otimes V$.

5. El grupo $SO(2)$

5.1. Propiedades del grupo y topología

El grupo $SO(2)$ es el grupo de rotaciones en el plano $\mathbb{R}^2$. Está formado por matrices reales ortogonales de 2×2 con determinante 1 (unimodulares):

$$SO(2) \equiv \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in [0, 2\pi) \right\}. \quad (5.1)$$

Cada elemento de $SO(2)$ está completamente determinado por un ángulo de rotación θ , y la multiplicación de matrices corresponde a la adición de ángulos módulo 2π :

$$R(\theta_1) \cdot R(\theta_2) = R(\theta_1 + \theta_2). \quad (5.2)$$

Topológicamente, el grupo $SO(2)$ es homeomorfo al círculo unitario S^1 . Esto se debe a que se puede identificar:

$$SO(2) \simeq \{e^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid \theta \in [0, 2\pi)\} \simeq S^1. \quad (5.3)$$

Por lo tanto, $SO(2)$ es un grupo de Lie compacto, conexo y abeliano. Como variedad, tiene dimensión 1 y topología de un círculo.

5.2. Representaciones del grupo y del álgebra

Existe un teorema que dice que

Toda representación irreducible unitaria de un grupo de Lie **compacto abeliano** es de dimensión uno.

Como $SO(2)$ es un grupo de Lie abeliano y compacto, todas sus representaciones irreducibles son unidimensionales.

Toda representación irreducible unitaria de $SO(2)$ es de la forma:

$$\rho_n(R(\theta)) = e^{in\theta}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (5.4)$$

Esta es una representación bien definida porque:

- $R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_1 + \theta_2)$ implica:

$$\rho_n(\theta_1)\rho_n(\theta_2) = e^{in\theta_1}e^{in\theta_2} = e^{in(\theta_1+\theta_2)} = \rho_n(\theta_1 + \theta_2). \quad (5.5)$$

- La función $e^{in\theta}$ es continua y 2π -periódica, por lo que respeta la topología de $SO(2) \simeq S^1$.

Representaciones irreducibles. Dado que el álgebra es abeliana, sus representaciones irreducibles son simplemente aplicaciones lineales:

$$\rho : \mathfrak{so}(2) \rightarrow \mathfrak{gl}(V), \quad (5.6)$$

donde $\rho(T)$ debe ser un operador lineal que conmuta consigo mismo, es decir, cualquier operador. Pero si exigimos irreducibilidad, entonces, el espacio V debe ser unidimensional,

$$\rho_n(T) = in, \quad (5.7)$$

donde $n \in \mathbb{R}$.

Lo interesante es que cualquier número real clasifica las representaciones de $\mathfrak{so}(2)$, mientras que solo los números enteros clasifican las representaciones del grupo $SO(2)$. Esta diferencia se debe a la topología de $SO(2)$, que es la de un círculo y, por tanto, presenta periodicidad. Dicha periodicidad impone que el parámetro n sea un entero. En cambio, el álgebra de Lie no detecta esta estructura global, ya que describe propiedades locales en torno al elemento identidad del grupo. Por eso, existe un grupo más grande llamado el recubrimiento universal de $SO(2)$, que tiene la misma álgebra de Lie que $SO(2)$, pero cuyas representaciones permiten valores reales de n . Este grupo debe tener una topología similar a $\mathbb{R}$, es decir, sin periodicidad. Ese grupo es $(\mathbb{R}, +)$.

6. El grupo $SO(3)$

6.1. Propiedades del grupo y topología

El grupo $SO(3)$ es el grupo de rotaciones del espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$. Formalmente, se define como:

$$SO(3) \equiv \left\{ R \in GL(3, \mathbb{R}) \mid R^\top R = RR^\top = I, \det R = 1 \right\}. \quad (6.1)$$

En otras palabras, es el grupo de matrices reales ortogonales de tamaño 3×3 unimodulares. Estas matrices preservan longitudes y orientaciones en $\mathbb{R}^3$.

Este conjunto es una subvariedad diferenciable del espacio euclídeo $\mathbb{R}^9$, ya que una matriz 3×3 tiene 9 entradas reales. Las condiciones de ortogonalidad $R^\top R = I$ imponen 6 restricciones independientes (las condiciones simétricas):

$$\text{Número de restricciones} = \frac{3 \cdot (3 + 1)}{2} = 6. \quad (6.2)$$

Por lo tanto, la dimensión de la variedad $SO(3)$ es:

$$\dim(SO(3)) = 9 - 6 = 3. \quad (6.3)$$

Cada elemento de $SO(3)$ representa una rotación del espacio tridimensional, que puede describirse mediante un eje de rotación (un vector unitario) $\hat{n} \in S^2$ y un ángulo de rotación $\theta \in [0, \pi]$. Existe una identificación geométrica importante:

$$(\hat{n}, \theta) \sim (-\hat{n}, -\theta), \quad (6.4)$$

ya que rotar un ángulo θ alrededor del eje $\hat{n}$ es equivalente a rotar un ángulo $-\theta$ alrededor de $-\hat{n}$. En particular, cuando $\theta = \pi$, esta identificación se convierte a $(\hat{n}, \pi) \sim (-\hat{n}, \pi)$, porque π y $-\pi$ representan el mismo ángulo. Denotemos por P la transformación que actúa como $P(\hat{n}, \theta) = (-\hat{n}, -\theta)$. Esta transformación asocia a cada punto $(\hat{n}, \theta)$ de la 3-esfera S^3 su punto antipodal $(-\hat{n}, -\theta)$. Como $\{I, P\}$ forma el grupo $\mathbb{Z}_2$, la 3-esfera con identificaciones antipodales se convierte en el cociente $S^3/\mathbb{Z}_2$, por lo que el conjunto de rotaciones tiene la estructura de un espacio proyectivo real tridimensional, $\mathbb{RP}^3$. En conclusión,

$$SO(3) \simeq S^3/\mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{RP}^3. \quad (6.5)$$

Por lo tanto, como variedad diferenciable, $SO(3)$ es difeomorfa al espacio proyectivo real tridimensional $\mathbb{RP}^3$. Este espacio puede visualizarse como el conjunto de rectas que pasan por el origen en $\mathbb{R}^4$, o equivalentemente, como la 3-esfera unitaria S^3 con los puntos antípodas identificados.

Para probar que $SO(3) \simeq S^3/\mathbb{Z}_2$ podemos usar los cuaterniones. Un cuaternión q puede verse como una generalización del número complejo a cuatro dimensiones reales,

$$q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}, \quad (6.6)$$

donde $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ son símbolos que satisfacen:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \quad \mathbf{ij} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j}, \quad (6.7)$$

y relaciones cíclicas (con signo negativo si intercambiamos el orden). La norma de un cuaternión es:

$$|q|^2 = \bar{q}q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2. \quad (6.8)$$

Entonces, los cuaterniones unitarios son aquellos con $|q| = 1$. Estos forman la 3-esfera:

$$S^3 = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\}. \quad (6.9)$$

Por lo tanto, para mostrar la relación con la esfera, necesitamos establecer una relación entre rotaciones y cuaterniones. Pero una rotación se define como una operación sobre un vector. Para ello, también vamos a asociar un vector a un cuaternión particular: el cuaternión puramente imaginario, con $a = 0$, es decir, con solo la parte vectorial:

$$v = b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}. \quad (6.10)$$

Así forman una copia de $\mathbb{R}^3$. Cuando escribimos un vector 3D como $(1, 0, 0)$, podemos pensarlo como el cuaternión puramente imaginario $v = \mathbf{i}$, y así sucesivamente. Ahora podemos definir la transformación

$$v' = qvq^{-1}, \quad (6.11)$$

donde q es un cuaternión unitario, y v es un vector 3D escrito como cuaternión puramente imaginario. Es fácil probar que v' es de nuevo un cuaternión puramente imaginario, es decir, un vector 3D. De hecho, como $q^{-1} = \bar{q}$, tenemos

$$\overline{qvq^{-1}} = \bar{q}\bar{v}\bar{q} = q(-v)\bar{q} = -qvq^{-1}, \quad (6.12)$$

así que $\bar{v}' = -v'$ es un cuaternión puramente imaginario, i.e., un vector 3D.

Por lo tanto, este mapa $v \mapsto qvq^{-1}$ es una función de $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. El último paso es ver qué tipo de función es. Resulta que esta función:

- Preserva longitudes, $|v'| = |v|$, para todo v ;
- Preserva ángulos;
- Es lineal (en el sentido de espacio vectorial real);
- Su determinante es $+1$.

Así que es una rotación en el espacio 3D. En conclusión, cualquier cuaternión unitario q define una rotación 3D mediante la fórmula $v \mapsto qvq^{-1}$. La manera más simple de verlo es considerar

$$\begin{aligned} q &= a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}, \\ \bar{q} &= a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}, \\ v &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \end{aligned} \tag{6.13}$$

lo que implica que

$$qvq^{-1} = R_q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \tag{6.14}$$

donde R_q es la matriz 3×3 :

$$R_q = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & 2(bc - ad) & 2(bd + ac) \\ 2(bc + ad) & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & 2(cd - ab) \\ 2(bd - ac) & 2(cd + ab) & a^2 - b^2 - c^2 + d^2 \end{pmatrix}. \tag{6.15}$$

Así obtenemos la relación entre las rotaciones y S^3 , pero dos puntos opuestos $\pm q \in S^3$ dan la misma rotación

$$(-q)v(-q)^{-1} = qvq^{-1}. \tag{6.16}$$

Entonces, el espacio de rotaciones $SO(3)$ se obtiene identificando puntos opuestos de la 3-esfera:

$$SO(3) = S^3 / \{\pm 1\} = \mathbb{RP}^3. \tag{6.17}$$

Eso significa que la conjugación define una aplicación 2 : 1, es decir, el mapeo $S^3 \rightarrow SO(3)$ con núcleo $\{\pm 1\}$.

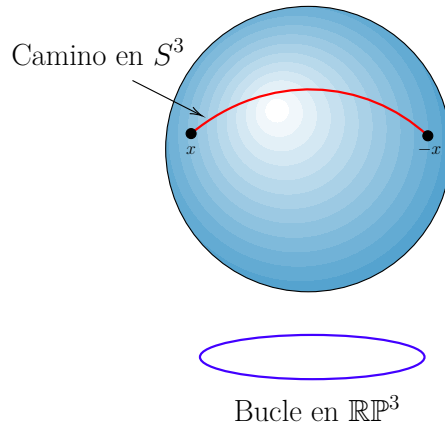
Como S^3 es compacto y la identificación es por un grupo finito ($\mathbb{Z}_2$), el cociente también es compacto:

$$S^3 \text{ compacto} \Rightarrow \mathbb{RP}^3 \text{ compacto} \Rightarrow SO(3) \text{ compacto}.$$

También, como S^3 es conexo por caminos y la proyección $S^3 \rightarrow \mathbb{RP}^3$ es continua y sobreyectiva, se conserva la conexidad:

$$S^3 \text{ conexo} \Rightarrow \mathbb{RP}^3 \text{ conexo} \Rightarrow SO(3) \text{ conexo}.$$

Finalmente, el grupo no es simplemente conexo. Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{RP}^3$ un bucle que se proyecta, mediante π , en un camino en S^3 que empieza en x y termina en $-x$, que es un bucle en $\mathbb{RP}^3$ por la identificación $x = -x$. Entonces, γ es un bucle en $\mathbb{RP}^3$, pero su levantamiento $\tilde{\gamma}$ no corresponde a un bucle en S^3 , sino un camino de x a $-x$.



Esto implica que γ no puede contraerse a un punto en $\mathbb{RP}^3$. Por lo tanto, el bucle representa una clase no trivial de bucles. Se dice que el grupo fundamental π_1 del espacio $\mathbb{RP}^3$ no es trivial. Por lo tanto, existen dos clases de bucles ($\mathbb{Z}_2$):

$$\pi_1(\mathbb{RP}^3) \cong \mathbb{Z}_2 \quad \Rightarrow \quad \pi_1(SO(3)) \cong \mathbb{Z}_2. \quad (6.18)$$

Si realizamos una rotación de 4π , el camino en S^3 recorre desde x a $-x$ y luego de regreso a x , formando un verdadero lazo en S^3 . Dado que S^3 es simplemente conexo:

El lazo correspondiente a una rotación de 4π sí es contráctil.

Por lo tanto, en $SO(3)$, una rotación de 4π es homotópicamente trivial, pero una de 2π no lo es.

En conclusión, el grupo fundamental de $SO(3)$ es:

$$\pi_1(SO(3)) \cong \mathbb{Z}_2, \quad (6.19)$$

con dos clases de homotopía:

- La clase trivial (rotaciones que pueden conectarse continuamente con la identidad);
- La clase no trivial, representada por una rotación de 2π .

6.2. Álgebra del grupo

Dado que todo elemento suficientemente cercano a la identidad en $SO(3)$ puede escribirse como $R(\theta) = \exp(\theta X)$, con $X \in \mathfrak{so}(3)$, la condición $\det R(\theta) = 1$ implica que:

$$\det(\exp(\theta X)) = \exp(\theta \operatorname{tr}(X)) = 1, \quad \text{para todo } \theta. \quad (6.20)$$

Entonces:

$$\operatorname{tr}(X) = 0, \quad (6.21)$$

de modo que las matrices unimodulares se corresponden con elementos del álgebra sin traza. Por otro lado, la relación de ortogonalidad

$$R(\theta)^\top R(\theta) = I, \quad (6.22)$$

se traduce a

$$\exp(\theta X^\top) \exp(\theta X) = \exp(\theta(X^\top + X)) = I, \quad (6.23)$$

es decir

$$X^\top = -X, \quad (6.24)$$

lo que implica que las matrices ortogonales se asocian con matrices del álgebra antisimétricas. Por lo tanto, toda matriz $X \in \mathfrak{so}(3)$ debe ser antisimétrica y tener traza cero. Sin embargo, toda matriz real antisimétrica ya tiene traza cero automáticamente, así que esta condición está contenida en la antisimetría, y no añade nada nuevo.

En conclusión, el espacio tangente de la variedad $\mathfrak{so}(3)$ en la identidad es:

$$\mathfrak{so}(3) \equiv T_I SO(3) = \left\{ X \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid X^\top = -X \right\}. \quad (6.25)$$

Los elementos de $\mathfrak{so}(3)$ se pueden obtener por el cálculo directo, buscando matrices antisimétricas, o por derivación de las matrices $SO(3)$, ya que

$$\left. \frac{dR(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=0} = X. \quad (6.26)$$

Sabemos que los elementos del $SO(3)$ que describen rotaciones alrededor de tres ejes mutuamente ortogonales, tienen la forma

$$R_1(\theta_1) \equiv R_x(\theta_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ 0 & \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix}, \quad (6.27)$$

$$R_2(\theta_2) \equiv R_y(\theta_2) = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{pmatrix}, \quad (6.28)$$

$$R_3(\theta_3) \equiv R_z(\theta_3) = \begin{pmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.29)$$

Dado que los θ_i ($i = 1, 2, 3$) son parámetros independientes de la variedad tridimensional, esto nos permite obtener los generadores $J_i = \left. \frac{dR_i}{d\theta_i} \right|_{\theta_i=0}$ del álgebra,

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.30)$$

Los conmutadores correspondientes son

$$[J_i, J_j] = \varepsilon_{ijk} J_k. \quad (6.31)$$

donde ε_{ijk} es el símbolo de Levi-Civita. Las constantes de estructura son:

$$f_{ij}{}^k = \varepsilon_{ijk}. \quad (6.32)$$

Como ya se señaló, en las álgebras tridimensionales las constantes de estructura son proporcionales al símbolo de Levi-Civita y, en particular, para el álgebra $\mathfrak{so}(3)$ la métrica

de Cartan es proporcional a δ_{ij} . Por lo tanto, el resultado obtenido es el esperado, puesto que $f_{ij}{}^k \propto f_{ij}{}^l \delta_{lk} \propto f_{ijk} \propto \varepsilon_{ijk}$.

6.3. Representaciones del grupo $SO(3)$

6.3.1. Representación fundamental

La representación más natural de $SO(3)$ es su acción sobre el espacio tridimensional real $\mathbb{R}^3$. A esta representación se le llama **representación fundamental** o **representación vectorial** de $SO(3)$.

$$\rho : SO(3) \longrightarrow GL(3, \mathbb{R}), \quad \rho(R)(\mathbf{v}) = R\mathbf{v} \quad (6.33)$$

- El espacio vectorial sobre el que actúa es $V = \mathbb{R}^3$.
- Cada $R \in SO(3)$ es una matriz ortogonal real 3×3 con determinante $+1$.
- La acción es simplemente la multiplicación matricial usual: $\mathbf{v} \mapsto R\mathbf{v}$.
- Esta es una representación **real**, **lineal** y de **dimensión 3**.

Esta representación es irreducible sobre $\mathbb{R}$, ya que no existe un subespacio propio de $\mathbb{R}^3$ que sea invariante bajo todas las rotaciones, salvo los triviales $\{0\}$ y $\mathbb{R}^3$.

Esta representación describe cómo se transforman los vectores del espacio físico tridimensional bajo rotaciones. Es la forma en que $SO(3)$ actúa sobre los objetos geométricos **clásicos**, como posiciones, velocidades, campos vectoriales, etc.

Ejemplo:

Una rotación de ángulo θ alrededor del eje z está representada por la matriz:

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.34)$$

Su acción sobre un vector $\mathbf{v} = (x, y, z)^T$ es simplemente:

$$\rho(R_z(\theta))(\mathbf{v}) = R_z(\theta) \cdot \mathbf{v} \quad (6.35)$$

Las representaciones tensoriales irreducibles de $SO(3)$ actúan sobre espacios de tensores **completamente simétricos**.

De hecho, para las representaciones irreducibles tenemos la siguiente clasificación. Cuando se actúa sobre tensores de rango 0, se obtiene una representación irreducible y trivial, conocida como la representación de espín 0. De forma más interesante, al pasar a tensores de rango 1, se obtiene la representación vectorial, o de espín 1 que hemos visto. Cuando se considera la acción sobre matrices, es decir, tensores de rango 2, sabemos que el espacio total es reducible. La acción sobre las matrices proporcionales a la identidad ya ha sido estudiada: corresponde nuevamente a la representación de espín 0. Para las matrices antisimétricas, tenemos

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix}_{ij} = \epsilon_{ijk} V^k, \quad \text{con } \mathbf{V} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad (6.36)$$

Es decir, la acción sobre matrices antisimétricas equivale a la acción sobre vectores y, por tanto, corresponde a la representación vectorial. En conclusión, no se trata de una nueva representación y no aporta información adicional. Por otro lado, las matrices simétricas y sin traza definen un subespacio invariante sobre el cual actúa nuestra representación, dando lugar a una nueva representación de espín 2, de dimensión 5, es decir, $2\ell + 1$ con $\ell = 2$. Así obtenemos una nueva representación irreducible. En teoría de grupos, esto se expresa como

$$\mathbf{9} = \mathbf{5} \oplus \mathbf{3} \oplus \mathbf{1} \quad (6.37)$$

De forma similar, para tensores de rango 3, los completamente simétricos definen un espacio de dimensión $7 = 2\ell + 1$ con $\ell = 3$, sobre el cual actúa la representación irreducible de espín 3. En cambio, los tensores totalmente antisimétricos de rango 3 son triviales, ya que son proporcionales a ϵ_{ijk} . Los demás tensores, con índices de simetría mixta, se reducen a representaciones de espín más bajo que ya han sido estudiadas.

En conclusión, a partir de la discusión anterior, para obtener una representación irreducible debemos escoger una de las clases de simetría. **Sin simetría**, es decir, usar el producto tensorial completo sin proyectar sobre un tipo de simetría, implica que estamos tratando con una suma directa de representaciones irreducibles, no con una sola. En otras palabras, la acción del grupo no puede mezclar estados de diferentes tipos de simetría, por lo que cada subespacio definido por una simetría es un subespacio invariante. Para clasificar todas las representaciones tensoriales irreducibles, basta con

considerar aquellas que actúan sobre tensores completamente simétricos.

6.3.2. Representaciones de $SO(3)$ en funciones sobre la esfera

Tras haber estudiado la representación fundamental de $SO(3)$, que actúa sobre vectores en $\mathbb{R}^3$, es natural preguntarse cómo este grupo puede actuar sobre espacios funcionales más generales. Un caso de especial interés es el espacio de funciones definidas sobre la esfera S^2 .

Sea S^2 la esfera unitaria en $\mathbb{R}^3$, es decir:

$$S^2 \equiv \left\{ \hat{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\hat{x}| = 1 \right\}. \quad (6.38)$$

Consideramos el espacio de funciones complejas sobre la esfera:

$$\mathcal{F} \equiv \left\{ f : S^2 \rightarrow \mathbb{C} \right\}. \quad (6.39)$$

El grupo $SO(3)$ actúa naturalmente sobre la esfera por rotación:

$$R \in SO(3) : \quad \hat{x} \mapsto R\hat{x}. \quad (6.40)$$

Esto induce una acción del grupo sobre funciones mediante:

$$(R \cdot f)(\hat{x}) \equiv f(R^{-1}\hat{x}) \quad (6.41)$$

Es decir, aplicamos la rotación a las coordenadas (argumento), no a la función en sí.

Esta definición asegura que la composición de acciones se respeta:

$$\begin{aligned} (R_1 \cdot (R_2 \cdot f))(\hat{x}) &= (R_2 \cdot f)(R_1^{-1}\hat{x}) = f((R_2^{-1}R_1^{-1})\hat{x}) = f((R_1R_2)^{-1}\hat{x}) \\ &= ((R_1R_2) \cdot f)(\hat{x}) \end{aligned} \quad (6.42)$$

Si en lugar de definir la acción como $f(R^{-1}\hat{x})$ usáramos directamente $f(R\hat{x})$, obtendríamos:

$$\begin{aligned} (R_1 \cdot (R_2 \cdot f))(\hat{x}) &= (R_2 \cdot f)(R_1\hat{x}) = f(R_2R_1\hat{x}) \\ &\neq f((R_1R_2)\hat{x}) = ((R_1R_2) \cdot f)(\hat{x}). \end{aligned}$$

Esto implicaría que:

$$R_1 \cdot (R_2 \cdot f) = (R_2R_1) \cdot f, \quad (6.43)$$

es decir, la acción compuesta invierte el orden de los elementos del grupo, lo cual **rompe la estructura de acción por la izquierda**. Por esta razón, se utiliza $f(R^{-1}\hat{x})$ en lugar de $f(R\hat{x})$.

Sabemos que los armónicos esféricos $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ son funciones especiales definidas sobre S^2 , construidas como soluciones de la ecuación de Laplace angular:

$$\Delta_{S^2} Y_{\ell m} = -\ell(\ell + 1) Y_{\ell m} \quad (6.44)$$

donde Δ_{S^2} es el operador de Laplace–Beltrami sobre la esfera. Para cada entero $\ell \geq 0$, los índices m toman valores:

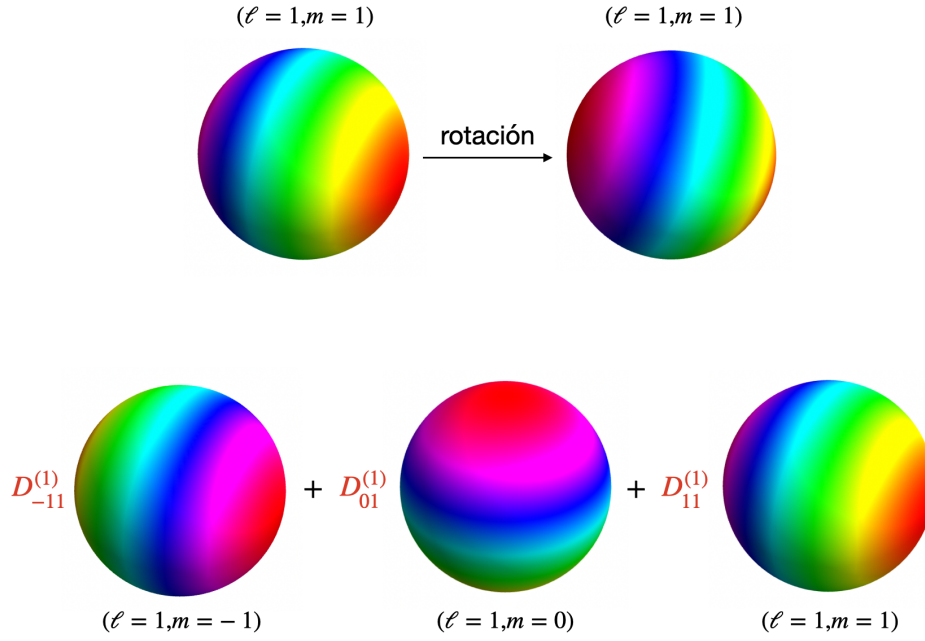
$$m = \{-\ell, -\ell + 1, \dots, \ell - 1, \ell\} \quad (6.45)$$

y el conjunto

$$\mathcal{H}_\ell \equiv \text{span} \{Y_{\ell m} \mid m = -\ell, \dots, \ell\} \quad (6.46)$$

es un subespacio de dimensión $2\ell + 1$ de $L^2(S^2)$, invariante bajo la acción de $SO(3)$. De hecho, bajo una rotación, el modo con $\ell = 0$ no cambia: corresponde a una función constante sobre la esfera. Por tanto, el subespacio $\mathcal{H}_0$ es **trivialmente invariante** bajo la acción de $SO(3)$.

Sin embargo, para $\ell = 1$, la situación es diferente. Tomemos, por ejemplo, el armónico esférico con $m = 1$, y consideremos su **parte real**. Esta función tiene estructura direccional: su forma depende de la orientación del eje en el que se mide.



Geométicamente, si rotamos la esfera mediante una transformación $R \in SO(3)$, la nueva función $R \cdot Y_{1,1}$ ya no coincide con el armónico original, pero sigue siendo una combinación lineal de los tres armónicos con $\ell = 1$:

$$R \cdot Y_{1,1} = \sum_{m'=-1}^1 D_{m'1}^{(1)}(R) Y_{1,m'}. \quad (6.47)$$

Por tanto, aunque cada armónico individual cambia, el subespacio total

$$\mathcal{H}_1 = \text{span}\{Y_{1,-1}, Y_{1,0}, Y_{1,1}\}$$

permanece invariante bajo la acción del grupo. Esto es lo que se quiere decir con que $\mathcal{H}_\ell$ es *invariante bajo* $SO(3)$.

Los armónicos esféricos forman una base ortonormal de $L^2(S^2)$ con el producto interno:

$$\langle Y_{\ell m}, Y_{\ell' m'} \rangle \equiv \int_{S^2} \overline{Y_{\ell m}(\hat{x})} Y_{\ell' m'}(\hat{x}) d\Omega = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}. \quad (6.48)$$

Las matrices D que aparecen en (6.47) son conocidas como matrices de Wigner- D o simplemente matrices D .

6.3.3. Matrices de Wigner $D^{(\ell)}$ en representaciones de $SO(3)$

De manera general, dado que el subespacio $\mathcal{H}_\ell$ es invariante bajo la acción del grupo, la función $R \cdot Y_{\ell m}(\mathbf{n})$ puede escribirse como una combinación lineal de los armónicos

esféricos $Y_{\ell m'}$ para distintos valores de m' :

$$R \cdot Y_{\ell m}(\mathbf{n}) \equiv Y_{\ell m}(R^{-1}\mathbf{n}) = \sum_{m'} c_{mm'} Y_{\ell m'}(\mathbf{n}) \quad (6.49)$$

Usando la relación de ortogonalidad (6.48), se obtiene:

$$c_{mm'} = \int_{S^2} Y_{\ell m'}^*(\mathbf{n}) Y_{\ell m}(R^{-1}\mathbf{n}) d\Omega \quad (6.50)$$

$$= \int_{S^2} Y_{\ell m'}^*(\mathbf{n}) (R \cdot Y_{\ell m})(\mathbf{n}) d\Omega \quad (6.51)$$

$$\equiv D_{m'm}^{(\ell)}(R) \quad (6.52)$$

que vamos a escribir

$$D_{m'm}^{(\ell)}(R) = \langle \ell, m' | R | \ell, m \rangle \quad (6.53)$$

Pero sabemos que todo elemento $R \in SO(3)$ se puede parametrizar por los ángulos de Euler como:

$$R = R_z(\alpha) R_y(\beta) R_z(\gamma), \quad \alpha, \gamma \in [0, 2\pi) \text{ y } \beta \in [0, \pi] \quad (6.54)$$

lo que implica

$$D^{(\ell)}(R_z(\alpha) R_y(\beta) R_z(\gamma)) = D^{(\ell)}(R_z(\alpha)) D^{(\ell)}(R_y(\beta)) D^{(\ell)}(R_z(\gamma)), \quad (6.55)$$

es decir

$$D_{m'm}^{(\ell)}(\alpha, \beta, \gamma) = \langle \ell, m' | D^{(\ell)}(R_z(\alpha)) D^{(\ell)}(R_y(\beta)) D^{(\ell)}(R_z(\gamma)) | \ell, m \rangle, \quad (6.56)$$

Pero la rotación alrededor del eje z es trivial

$$D^{(\ell)}(R_z(\alpha)) | \ell, m \rangle = e^{-im\alpha} | \ell, m \rangle \quad (6.57)$$

De hecho, sabemos que los armónicos esféricos pueden escribirse como

$$Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) = P_{\ell}^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (6.58)$$

por lo que una rotación de un ángulo α alrededor del eje z actúa como

$$Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) \mapsto Y_{\ell}^m(\theta, \varphi - \alpha), \quad (6.59)$$

donde hemos utilizado (6.41). Esto conduce directamente a (6.57).

Es importante notar la diferencia de convención con la mecánica cuántica. En nuestra convención,

$$R_z(\alpha) = \exp(\alpha J_3), \quad (6.60)$$

y a partir de (6.57) se obtiene

$$J_3 |\ell, m\rangle = -i m |\ell, m\rangle, \quad (6.61)$$

en contraste con el resultado habitual en mecánica cuántica,

$$J_3 |\ell, m\rangle = m |\ell, m\rangle. \quad (6.62)$$

A lo largo de este trabajo seguiremos empleando nuestra convención, utilizada en matemáticas y en la mayoría de las áreas de la física, salvo en mecánica cuántica. Además, de este modo se aprende a manejar mejor las convenciones.

Entonces,

$$D_{m'm}^{(\ell)}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-im'\alpha} d_{m'm}^{(\ell)}(\beta) e^{-im\gamma} \quad (6.63)$$

donde $d_{m'm}^{(\ell)}(\beta)$ son las *matrices pequeñas de Wigner*

$$d_{m'm}^{(\ell)}(\beta) = \langle l, m' | R_y(\beta) | l, m \rangle \quad (6.64)$$

Gracias a la exponenciación del álgebra de Lie, sabemos que

$$R_y(\beta) = e^{\beta J_2} \quad (6.65)$$

lo que nos permite escribir

$$d_{m'm}^{(\ell)}(\beta) = \langle l, m' | e^{\beta J_2} | l, m \rangle \quad (6.66)$$

Ejemplo:

Considerando $\ell = 1$, veremos en (6.102) que

$$J_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.67)$$

se obtiene que

$$J_2^0 = \mathbb{I}, \quad J_2^{2p} = (-1)^{p+1} J_2^2, \quad J_2^{2p+1} = (-1)^p J_2 \quad (6.68)$$

lo que nos da

$$e^{\beta J_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta J_2)^n}{n!} = \mathbb{I} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(\beta J_2)^{2p}}{(2p)!} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\beta J_2)^{2p+1}}{(2p+1)!} \quad (6.69)$$

$$= \mathbb{I} + J_2^2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1} \beta^{2p}}{(2p)!} + J_2 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \beta^{2p+1}}{(2p+1)!} \quad (6.70)$$

$$= \mathbb{I} - (\cos \beta - 1) J_2^2 + \sin \beta J_2 \quad (6.71)$$

Por lo tanto

$$d^{(1)}(\beta) = e^{\beta J_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 + \cos \beta) & -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \beta & \frac{1}{2}(1 - \cos \beta) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \beta & \cos \beta & -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \beta \\ \frac{1}{2}(1 - \cos \beta) & \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \beta & \frac{1}{2}(1 + \cos \beta) \end{pmatrix} \quad (6.72)$$

Para cualquier ℓ , la expresión general del elemento $d_{mm'}^{(\ell)}(\beta)$ es:

$$\sum_k (-1)^k \frac{\sqrt{(\ell+m)!(\ell-m)!(\ell+m')!(\ell-m')!}}{(\ell+m-k)!k!(m'-m+k)!(\ell-m'-k)!} \left(\cos \frac{\beta}{2} \right)^{2\ell+m-m'-2k} \left(\sin \frac{\beta}{2} \right)^{m'-m+2k}$$

donde la suma es sobre todos los valores de k para los cuales los factoriales están bien definidos (enteros no negativos). Esta fórmula permite construir $d^{(\ell)}(\beta)$ para cualquier ℓ , aunque en la práctica se utilizan tablas o software para $\ell > 2$.

6.4. Representaciones del álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$

Existen varias representaciones para describir el álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$

6.4.1. Representación trivial

La más simple es la representación en un espacio de dimensión 1 en la cual todos los generadores actúan como cero:

$$\rho_{\text{triv}}(J_i) = 0. \quad (6.73)$$

Esta representación corresponde al caso $\ell = 0$, de dimensión $2\ell + 1 = 1$

6.4.2. Representación vectorial

En esta representación, los generadores actúan como matrices reales 3×3 sobre $\mathbb{R}^3$, que describen rotaciones infinitesimales:

$$(J_1)_{jk} = -\varepsilon_{1jk}, \quad (J_2)_{jk} = -\varepsilon_{2jk}, \quad (J_3)_{jk} = -\varepsilon_{3jk}. \quad (6.74)$$

Este caso corresponde a $\ell = 1$ y tiene dimensión $2\ell + 1 = 3$.

6.4.3. Representación adjunta

La representación sobre el propio álgebra $\mathfrak{so}(3)$, definida por el conmutador:

$$\text{ad}_{J_i}(X) = [J_i, X], \quad (6.75)$$

también tiene dimensión 3, y de hecho es isomorfa a la representación vectorial.

6.4.4. Representación irreducible de espín ℓ del álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$

Para construir la representación irreducible, necesitamos construir el operador de Casimir, es decir un operador que conmuta con todos los generadores del álgebra. En nuestro caso, $\mathbf{J}^2$ conmuta con todos los elementos del álgebra

$$\mathbf{J}^2 \equiv J_1^2 + J_2^2 + J_3^2. \quad (6.76)$$

Por lo tanto, en cualquier representación irreducible, el operador $\mathbf{J}^2$ actúa como un múltiplo del operador identidad

$$\mathbf{J}^2 |v\rangle = \lambda |v\rangle, \quad (6.77)$$

para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, constante en toda la representación.

Lema de Schur: si T conmuta con todos los operadores de una representación irreducible, entonces T es un múltiplo de la identidad.

Dado que el operador de Casimir $\mathbf{J}^2$ conmuta con todos los generadores J_i , en particular

con J_3 , podemos diagonalizar simultáneamente $\mathbf{J}^2$ y J_3 . Supongamos que existe un vector propio $|v\rangle$ tal que:

$$\mathbf{J}^2 |v\rangle = \lambda |v\rangle, \quad (6.78)$$

$$J_3 |v\rangle = -im |v\rangle, \quad (6.79)$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es el valor propio del Casimir (fijo en toda la representación irreducible), y m es el valor propio de J_3 , que puede variar dentro de la representación.

Esto nos motiva a buscar una base de vectores $\{|\lambda, m\rangle\}$ tales que:

$$\mathbf{J}^2 |\lambda, m\rangle = \lambda |\lambda, m\rangle, \quad (6.80)$$

$$J_3 |\lambda, m\rangle = -im |\lambda, m\rangle. \quad (6.81)$$

De ahí, el cálculo es estándar pero lo vamos a escribir.

Definimos los operadores $J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2$ lo que nos permite escribir

$$[J_i, J_j] = \varepsilon_{ijk} J_k, \quad [J_3, J_{\pm}] = \mp i J_{\pm}, \quad J_{\pm}^{\dagger} = -J_{\mp} \quad (6.82)$$

Identidades útiles

$$J_+ J_- = \mathbf{J}^2 - J_3^2 - iJ_3, \quad J_- J_+ = \mathbf{J}^2 - J_3^2 + iJ_3. \quad (6.83)$$

Obtenemos fácilmente

Cadena descendente. Sea $v_n \equiv J_-^n |\ell, m\rangle$ y como $J_3 J_-^n = J_-^n (J_3 + ni)$, tenemos

$$J_3 v_n = -i(m - n)v_n \quad (6.84)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \|v_{n+1}\|^2 &= \langle v_n | (J_-)^{\dagger} J_- | v_n \rangle = -\langle v_n | J_+ J_- | v_n \rangle \\ &= -\langle v_n | \mathbf{J}^2 - J_3^2 - iJ_3 | v_n \rangle \\ &= -\left[\lambda + (m - n)(m - n - 1) \right] \|v_n\|^2. \end{aligned} \quad (6.85)$$

La norma debe siempre ser positiva. Como el factor de (6.85) se hace negativo para $n \gg 1$ salvo que *se anule* antes, existe $m_{\min}$ tal que $\|J_- |\ell, m_{\min}\rangle\|^2 = 0$ es decir

$$\lambda = -m_{\min}(m_{\min} - 1) \quad (6.86)$$

Cadena ascendente. Sea $w_n \equiv J_+^n |\ell, m\rangle$ y como $J_3 J_+^n = J_+^n (J_3 - ni)$, tenemos

$$J_3 w_n = -i(m+n)w_n \quad (6.87)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \|w_{n+1}\|^2 &= \langle w_n | (J_+)^{\dagger} J_+ | w_n \rangle = -\langle w_n | J_- J_+ | w_n \rangle \\ &= -\langle w_n | \mathbf{J}^2 - J_3^2 + iJ_3 | w_n \rangle \\ &= -\left[\lambda + (m+n)(m+n+1) \right] \|w_n\|^2. \end{aligned} \quad (\text{U})$$

El mismo argumento fuerza un $m_{\max}$ con $\|J_+ |\ell, m_{\max}\rangle\|^2 = 0$ es decir

$$\lambda = -m_{\max}(m_{\max} + 1). \quad (6.88)$$

Consecuencias. Igualando las dos expresiones de λ :

$$\begin{aligned} m_{\max}(m_{\max} + 1) &= m_{\min}(m_{\min} - 1) \\ \implies (m_{\max} + m_{\min})(m_{\max} - m_{\min} + 1) &= 0 \\ \implies m_{\min} &= -m_{\max} \end{aligned} \quad (6.89)$$

ya que $m_{\max} > m_{\min} - 1$. Definiendo $\ell \equiv m_{\max} \geq 0$:

$$m \in \{-\ell, -\ell + 1, \dots, \ell\}, \quad \lambda = -\ell(\ell + 1) \quad (6.90)$$

Como la cadena tiene exactamente 2ℓ descensos de $m = \ell$ hasta $m = -\ell$, se sigue que $2\ell \in \mathbb{Z}$, es decir, ℓ es **entero o semientero**, y la dimensión es $2\ell + 1$. Cada representación irreducible de $\mathfrak{so}(3)$ queda entonces caracterizada por este número ℓ (gracias al operador de Casimir), y tiene dimensión $2\ell + 1$. Además tenemos

$$\begin{aligned} J_+ |\ell, m\rangle &= -i\sqrt{\ell(\ell+1) - m(m+1)} |\ell, m+1\rangle, \\ J_- |\ell, m\rangle &= -i\sqrt{\ell(\ell+1) - m(m-1)} |\ell, m-1\rangle, \\ \mathbf{J}^2 |\ell, m\rangle &= -\ell(\ell+1) |\ell, m\rangle, \\ J_3 |\ell, m\rangle &= -im |\ell, m\rangle \end{aligned} \quad (6.91)$$

Ejemplos:

1. Representación irreducible de espín $\ell = 1/2$

El espacio de representación tiene dimensión 2, con base $\{|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle, |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle\}$. Los operadores

J_3, J_+, J_- actúan de la siguiente forma:

$$J_3 \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = -\frac{i}{2} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \quad J_3 \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \frac{i}{2} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \quad (6.92)$$

$$J_+ \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = -i \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \quad J_+ \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = 0 \quad (6.93)$$

$$J_- \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = -i \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle, \quad J_- \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = 0 \quad (6.94)$$

En la base $\left\{ \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \right\}$, las matrices son:

$$J_3 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{i}{2} \end{pmatrix}, \quad J_+ = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad (6.95)$$

Y finalmente:

$$J_1 = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{2} \\ -\frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (6.96)$$

Se observa que estas matrices corresponden a las matrices de Pauli:

$$J_k = -\frac{i}{2} \sigma_k \quad (6.97)$$

2. Representación irreducible de espín $\ell = 1$

El espacio de representación tiene dimensión 3, con base $\{|1, 1\rangle, |1, 0\rangle, |1, -1\rangle\}$. Los operadores J_3, J_+, J_- actúan de la siguiente forma:

$$J_3 |1, 1\rangle = -i |1, 1\rangle, \quad J_+ |1, 0\rangle = -i\sqrt{2} |1, 1\rangle, \quad J_- |1, 1\rangle = -i\sqrt{2} |1, 0\rangle, \quad (6.98)$$

$$J_3 |1, 0\rangle = 0, \quad J_+ |1, -1\rangle = -i\sqrt{2} |1, 0\rangle, \quad J_- |1, 0\rangle = -i\sqrt{2} |1, -1\rangle, \quad (6.99)$$

$$J_3 |1, -1\rangle = i |1, -1\rangle, \quad J_+ |1, 1\rangle = 0, \quad J_- |1, -1\rangle = 0. \quad (6.100)$$

Escribiendo estas acciones en la base ordenada $\{|1, 1\rangle, |1, 0\rangle, |1, -1\rangle\}$, las matrices de los operadores son:

$$J_3 = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}, \quad J_+ = -i\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_- = -i\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.101)$$

Finalmente, las matrices de J_1, J_2 se obtienen como:

$$J_1 = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) = -\frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.102)$$

Nótese que estas matrices corresponden a las de la representación vectorial (6.4.2) únicamente en una base esférica, aunque dicha representación se definió originalmente en una base cartesiana. La relación entre ambas bases es

$$|1, 1\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}(e_x + ie_y), \quad |1, 0\rangle = e_z, \quad |1, -1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_x - ie_y) \quad (6.103)$$

Definiendo

$$U = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.104)$$

tenemos

$$J_a^{(\text{cart})} = U J_a^{(\text{esf})} U^{-1} \quad (6.105)$$

Representaciones semienteras y el grupo de recubrimiento:

A lo largo de estas secciones hemos construido representaciones irreducibles del álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$, clasificadas por un parámetro $\ell = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$, donde la dimensión del espacio de representación es $2\ell + 1$. Estas representaciones incluyen tanto valores enteros como semienteros de ℓ .

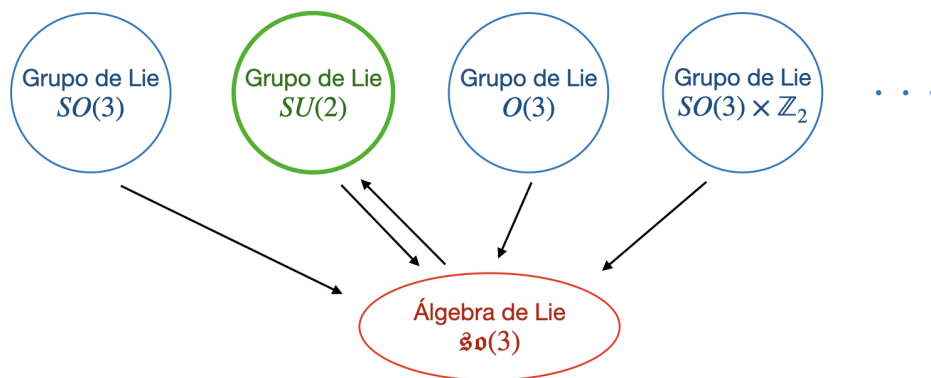
Sin embargo, este resultado plantea una cuestión importante: si $\mathfrak{so}(3)$ es el álgebra de Lie del grupo de rotaciones $SO(3)$, ¿cómo es posible que existan representaciones con ℓ semientero, si $SO(3)$ no admite representaciones irreducibles asociadas a tales valores? La clave es que, aunque $\mathfrak{so}(3)$ admite formalmente representaciones semienteras, **no todas ellas provienen de representaciones honestas del grupo $SO(3)$** . Por representación honesta entendemos una aplicación del grupo $SO(3)$ en el grupo general lineal que respeta la estructura del grupo:

$$D(g_1 g_2) = D(g_1) D(g_2),$$

y que es continua respecto de la topología de $SO(3)$.

Las representaciones con ℓ semientero no pueden levantarse a representaciones honestas de $SO(3)$, debido a la topología del grupo: $SO(3)$ no es simplemente conexo, y tiene un grupo fundamental $\pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}_2$. Esto significa que existe un bucle no contraíble en el grupo, y cualquier intento de representar este bucle mediante matrices lineales puede conducir a un signo global distinto, lo cual impide definir una representación continua del grupo completo.

Para resolver este problema, se introduce el concepto de **grupo de recubrimiento universal**, es decir, un grupo conexo y simplemente conexo que tiene la misma álgebra de Lie. En el caso de $SO(3)$, este grupo es $SU(2)$, el cual sí admite todas las representaciones, tanto enteras como semienteras.



Por lo tanto, concluimos que, para describir todas las posibles representaciones (y por tanto, todos los posibles tipos de campos clásicos que transforman bajo simetrías de rotación), es más natural considerar el grupo de recubrimiento $SU(2)$ como grupo fundamental. A partir del próximo capítulo estudiaremos este grupo en detalle.

7. El grupo $SU(2)$

7.1. Propiedades del grupo y topología

El grupo $SU(2)$ es el grupo de matrices unitarias de 2×2 con determinante 1

$$SU(2) \equiv \left\{ U \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \mid U^\dagger U = I, \det U = 1 \right\}. \quad (7.1)$$

Explícitamente, cualquier elemento de $SU(2)$ puede escribirse como:

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad \text{con } a, b \in \mathbb{C}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1. \quad (7.2)$$

Esto muestra que $SU(2)$ es topológicamente equivalente a la esfera unitaria en cuatro dimensiones reales:

$$SU(2) \cong S^3. \quad (7.3)$$

Por lo tanto, $SU(2)$ es una variedad compacta, conexa y simplemente conexa. Esto contrasta con $SO(3)$, que tiene la misma álgebra de Lie pero una topología diferente (no simplemente conexa).

7.2. Representaciones del grupo

Teorema de Peter–Weyl y clasificación de representaciones:

Sea G un grupo de Lie **compacto y simplemente conexo**, y sea $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. Entonces, toda representación irreducible de dimensión finita del álgebra $\mathfrak{g}$ se puede integrar a una representación irreducible del grupo G , y toda representación irreducible de dimensión finita del grupo G proviene de una del álgebra $\mathfrak{g}$.

Dado que $SU(2)$ es compacto y simplemente conexo, sus representaciones irreducibles unitarias de dimensión finita están en correspondencia uno a uno con las representaciones irreducibles de $\mathfrak{su}(2)$, las cuales ya hemos clasificado: están etiquetadas por un número $\ell = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$, y tienen dimensión $2\ell + 1$.

Cada valor de ℓ define una representación irreducible de dimensión $2\ell + 1$, que se construye a partir de un vector propio máximo de J_3 y de la acción de los operadores $J_\pm$.

Esto justifica rigurosamente la aparición de representaciones de espín semientero en física, que no pueden definirse como representaciones del grupo $SO(3)$, pero sí del grupo

$SU(2)$, que actúa como su recubridor universal.

En conclusión, todas las representaciones del grupo pueden construirse a partir de una representación de su álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$, mediante la fórmula:

$$D^{(\ell)}(\theta, \hat{\mathbf{n}}) = \exp \left(\theta \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{J}^{(\ell)} \right) \quad (7.4)$$

donde $\mathbf{J}^{(\ell)} = (J_1, J_2, J_3)$ son los generadores de $\mathfrak{su}(2)$ en la representación de espín ℓ y θ es el ángulo de rotación, cuya periodicidad depende de la representación:

- Para representaciones de espín entero ($\ell = 0, 1, 2, \dots$), $D^{(\ell)}(\theta, \hat{\mathbf{n}})$ es periódica con $\theta \sim \theta + 2\pi$,
- Para representaciones de espín semi-entero ($\ell = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$), se necesita $\theta \sim \theta + 4\pi$ para volver a la identidad.

Ejemplos:

Para la representación $\ell = \frac{1}{2}$, a partir de (6.95) y (6.96) se tiene

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

Se obtiene entonces

$$D^{(1/2)}(\theta, \hat{\mathbf{n}}) = \cos \frac{\theta}{2} I_2 + 2 \sin \frac{\theta}{2} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{J}) \quad (7.6)$$

lo que muestra una periodicidad de 4π .

En cambio, para la representación $\ell = 1$, a partir de (6.102) y (6.101) se tiene

$$J_1 = -\frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

En este caso se obtiene

$$D^{(1)}(\theta, \hat{\mathbf{n}}) = I_3 + \sin \theta (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{J}) + (1 - \cos \theta) (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{J})^2 \quad (7.8)$$

es decir, una función periódica de periodo 2π .

8. Grupo de Lorentz

El marco geométrico de la relatividad especial es el *espacio-tiempo de Minkowski*, denotado por $\mathbb{R}^{1,3}$, que es un espacio vectorial real de cuatro dimensiones dotado de una forma bilineal simétrica no degenerada con signatura $(-, +, +, +)$. Esta forma bilineal está dada por la *métrica de Minkowski*

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1), \quad (8.1)$$

donde los índices griegos $\mu, \nu, \dots$ van de 0 a 3, con $x^0 = ct$ interpretado como la coordenada temporal (a menudo se toma $c = 1$) y x^i ($i = 1, 2, 3$) como coordenadas espaciales.

Una *transformación de Lorentz* se define como una transformación lineal de las coordenadas del espacio-tiempo que preserva el intervalo entre cualquier par de eventos. Explícitamente, si x^μ son las coordenadas de un evento en un sistema inercial, entonces bajo una transformación de Lorentz tenemos:

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad (8.2)$$

donde Λ^μ_ν es una matriz real 4×4 . La transformación preserva el producto escalar de Minkowski:

$$\eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = \eta_{\rho\sigma} x'^\rho x'^\sigma. \quad (8.3)$$

Insertando (8.2) en el producto escalar y usando linealidad, esta condición se convierte en:

$$\eta_{\rho\sigma} x'^\rho x'^\sigma = \eta_{\rho\sigma} \Lambda^\rho_\mu x^\mu \Lambda^\sigma_\nu x^\nu = x^\mu (\Lambda^\rho_\mu \eta_{\rho\sigma} \Lambda^\sigma_\nu) x^\nu. \quad (8.4)$$

Esto debe ser igual a $\eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$ para todo x^μ , por lo que requerimos la identidad matricial:

$$\Lambda^\rho_\mu \eta_{\rho\sigma} \Lambda^\sigma_\nu = \eta_{\mu\nu}. \quad (8.5)$$

que es un análogo de ortogonalidad para transformaciones que preservan una métrica no euclídea. El conjunto de todas las matrices reales 4×4 que satisfacen (8.5) forma un grupo bajo multiplicación matricial: el *grupo de Lorentz*, denotado por $O(1, 3)$.

8.1. Clasificación de componentes

El grupo de Lorentz se puede descomponer en 4 componentes disjuntas ya que existen 2 restricciones dadas por el determinante y la orientación temporal.

Restricción del determinante. Tomando el determinante de (8.5):

$$\det(\Lambda^T \eta \Lambda) = \det(\eta). \quad (8.6)$$

Como $\det(\Lambda^T) = \det(\Lambda)$ y $\det(\eta) = -1$, se obtiene:

$$(\det \Lambda)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \det \Lambda = \pm 1. \quad (8.7)$$

Esto define dos subconjuntos disjuntos.

Restricción de orientación temporal. Consideramos la componente $(0, 0)$ de (8.5):

$$\eta_{00} = \Lambda^\rho{}_0 \eta_{\rho\sigma} \Lambda^\sigma{}_0 = -(\Lambda^0{}_0)^2 + \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i{}_0)^2 = -1. \quad (8.8)$$

De aquí se deduce:

$$(\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i{}_0)^2 \geq 1 \quad \Rightarrow \quad |\Lambda^0{}_0| \geq 1. \quad (8.9)$$

Así, podemos definir el signo de $\Lambda^0{}_0$ como un segundo invariante discreto:

$$\text{ortocrónico: } \Lambda^0{}_0 \geq 1, \quad \text{no ortocrónico: } \Lambda^0{}_0 \leq -1. \quad (8.10)$$

Estas regiones están desconectadas: dado que $|\Lambda^0{}_0| \geq 1$, cualquier camino continuo entre ellas debe pasar por un intervalo prohibido $-1 < \Lambda^0{}_0 < 1$, lo cual está excluido. Por tanto, este signo es un invariante topológico.

Combinando los dos invariantes con valores en $\mathbb{Z}_2$: $\det \Lambda = \pm 1$ y $\text{signo}(\Lambda^0{}_0)$, obtenemos cuatro componentes desconectadas:

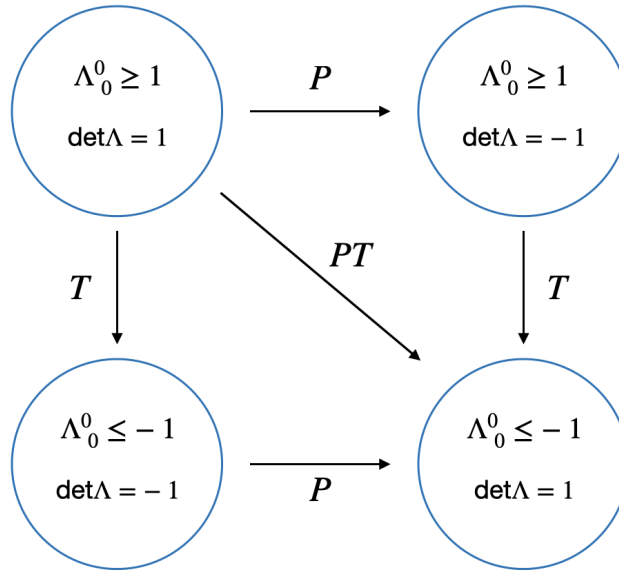
- **Propia ortocrónica:** $\det \Lambda = +1$, $\Lambda^0{}_0 \geq 1$. Contiene la identidad y se denota $SO^+(1, 3)$.
- **Impropia ortocrónica:** $\det \Lambda = -1$, $\Lambda^0{}_0 \geq 1$. Contiene reflexiones espaciales como $P = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Se puede escribir como $P \cdot SO^+(1, 3)$.

- **Propia no ortocrónica:** $\det \Lambda = +1$, $\Lambda^0_0 \leq -1$. Contiene la inversión temporal $T = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, y se puede escribir como $T \cdot SO^+(1, 3)$.
- **Impropia no ortocrónica:** $\det \Lambda = -1$, $\Lambda^0_0 \leq -1$. Contiene la inversión espacio-tiempo $PT = -\mathbb{I}$, que se puede escribir como $PT \cdot SO^+(1, 3)$.

En conclusión, el grupo de Lorentz se descompone como la unión disjunta:

$$O(1, 3) = SO^+(1, 3) \cup P \cdot SO^+(1, 3) \cup T \cdot SO^+(1, 3) \cup PT \cdot SO^+(1, 3)$$

y estas son precisamente las cuatro componentes conexas. Como ninguno de los tres elementos P , T ni PT se puede conectar con la identidad, concluimos que $O(1, 3)$ tiene exactamente cuatro componentes conexas.



8.2. Descomposición rotación–boost en $SO^+(1, 3)$

Sea $\Lambda \in SO^+(1, 3)$, es decir, una transformación de Lorentz conectada continuamente con la identidad (por tanto $\det \Lambda = +1$ y $\Lambda^0_0 \geq 1$). Mostramos que:

Toda $\Lambda \in SO^+(1, 3)$ se puede escribir de forma única como un producto

$$\Lambda = RB,$$

donde R es una rotación espacial y B es un boost puro con velocidad $\mathbf{v}$.

Consideramos el imagen del 4-vector en reposo $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ bajo Λ :

$$u'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu u^\nu = \Lambda^\mu{}_0. \quad (8.11)$$

Esto da la primera columna de Λ , así que $\Lambda^\mu{}_0$ es un 4-vector en otro sistema. Lo escribimos como:

$$\Lambda^\mu{}_0 = (\gamma, \gamma \mathbf{v}) \quad \text{para algún } \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3. \quad (8.12)$$

La condición de normalización de $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$, con $\mu = \nu = 0$, da:

$$\eta_{00} = \eta_{\rho\sigma} \Lambda^\rho{}_0 \Lambda^\sigma{}_0 = -(\Lambda^0{}_0)^2 + \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i{}_0)^2 = -1, \quad (8.13)$$

de donde:

$$\gamma = \Lambda^0{}_0, \quad \gamma^2(1 - \mathbf{v}^2) = 1 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}}. \quad (8.14)$$

Existe entonces un boost puro $B(\mathbf{v})$ en la dirección de $\mathbf{v}$ que lleva $u^\mu = (1, \mathbf{0})$ a $\Lambda^\mu{}_0$.

Construimos ahora el boost inverso. Sea $B(\mathbf{v})$ el boost puro definido antes. Definimos:

$$R \equiv B^{-1}(\mathbf{v})\Lambda. \quad (8.15)$$

Como $B \in SO^+(1, 3)$, también $B^{-1} \in SO^+(1, 3)$, por lo que $R \in SO^+(1, 3)$. Se obtiene:

$$R^\mu{}_0 = B^{-1\mu}{}_\rho \Lambda^\rho{}_0 = \delta^\mu{}_0,$$

ya que $\Lambda^\rho{}_0 = (\gamma, \gamma \mathbf{v})$ es llevado por B^{-1} a $(1, \mathbf{0})$. Por tanto:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathcal{R} \end{pmatrix}. \quad (8.16)$$

Insertando esto en (8.5), se obtiene:

$$\mathcal{R}^T \mathcal{R} = \mathbb{I}_3,$$

entonces $\mathcal{R} \in SO(3)$, y R es una rotación espacial pura. Hemos demostrado la existencia de esta descomposición, falta demostrar su unicidad.

Supongamos que hay dos descomposiciones:

$$\Lambda = R_1 B_1 = R_2 B_2.$$

Entonces:

$$R_2^{-1} R_1 = B_2 B_1^{-1}.$$

El lado izquierdo es una rotación, el derecho un boost. Pero la única transformación de Lorentz que es simultáneamente una rotación y un boost es la identidad. Por tanto:

$$R_1 = R_2, \quad B_1 = B_2.$$

En conclusión, se tiene:

$$\forall \Lambda \in SO^+(1, 3), \quad \exists! R \in SO(3), B = B(\mathbf{v}) \text{ boost}, \quad \Lambda = RB. \quad (8.17)$$

8.3. Topología del grupo $SO^+(1, 3)$

El grupo $SO^+(1, 3)$ es conexo porque constituye la única componente del grupo de Lorentz que contiene a la identidad y se puede recorrer continuamente desde ella.

Como lo hemos visto, cada elemento de $SO^+(1, 3)$ puede escribirse como el producto de una rotación espacial y una boost. El boost puede ser parametrizado por una velocidad $\mathbf{v}$ o una rapidez

$$\boldsymbol{\xi} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \tanh^{-1} \left(\frac{|\mathbf{v}|}{c} \right) \quad (8.18)$$

Por tanto, el grupo es homeomorfo al producto:

$$SO^+(1, 3) \cong \mathbb{R}^3 \times SO(3), \quad (8.19)$$

lo cual implica que $SO^+(1, 3)$ como el grupo $SO(3)$ no es simplemente conexo. Además, como tiene un parámetro, la rapidez, que recorre un intervalo infinito, no es compacto. Podríamos haber utilizado la velocidad en lugar de la rapidez y así concluir que el grupo es compacto, ya que la velocidad está acotada por $|v| < c$ y, por lo tanto, no recorre un rango infinito. Sin embargo, se usa la rapidez porque es el parámetro natural del grupo. De hecho, para dos boosts sucesivos en la misma dirección,

$$\Lambda(\xi_2) \Lambda(\xi_1) = \Lambda(\xi_1 + \xi_2), \quad (8.20)$$

es decir, las rapidezces se *suman linealmente*. En cambio, las velocidades obedecen la ley

no lineal

$$v_{\text{tot}} = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}. \quad (8.21)$$

8.4. Álgebra de Lie del grupo de Lorentz $SO^+(1, 3)$

Sabemos que todos los elementos del grupo pueden ser escritos como

$$\Lambda = e^{tX} \quad \text{con } X \in \mathfrak{so}(1, 3) \quad (8.22)$$

lo que implica que, si consideramos la relación $\Lambda^\top \eta \Lambda = \eta$ y derivamos en $t = 0$, obtenemos

$$X^\top \eta + \eta X = 0. \quad (8.23)$$

Por lo tanto, tenemos

$$\mathfrak{so}(1, 3) = \left\{ X \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \mid X^\top \eta + \eta X = 0 \right\} \quad (8.24)$$

Podemos notar que

$$X^\top \eta + \eta X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\eta X)^\top = -\eta X, \quad (8.25)$$

es decir, que ηX es una matriz antisimétrica. Pero esto no implica que X sea antisimétrica. Como las matrices antisimétricas de 4×4 tienen dimensión 6, se concluye que

$$\dim \mathfrak{so}(1, 3) = 6. \quad (8.26)$$

Escribamos

$$X = \begin{pmatrix} a & \mathbf{b}^\top \\ \mathbf{c} & B \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_3 \end{pmatrix}. \quad (8.27)$$

Entonces

$$X^\top \eta + \eta X = \begin{pmatrix} -2a & \mathbf{c}^\top - \mathbf{b}^\top \\ -\mathbf{b} + \mathbf{c} & B^\top + B \end{pmatrix}. \quad (8.28)$$

Imponer que esto se anule implica

$$a = 0, \quad \mathbf{c} = \mathbf{b}, \quad B^\top = -B. \quad (8.29)$$

Por lo tanto, todo $X \in \mathfrak{so}(1, 3)$ tiene la forma

$$X = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{b}^\top \\ \mathbf{b} & B \end{pmatrix}, \quad B^\top = -B \quad (8.30)$$

Sea $\mathbf{b} = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)^\top$ y escribamos la matriz antisimétrica B en términos de $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \theta_3 & -\theta_2 \\ -\theta_3 & 0 & \theta_1 \\ \theta_2 & -\theta_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.31)$$

Así,

$$X(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \\ \kappa_1 & 0 & \theta_3 & -\theta_2 \\ \kappa_2 & -\theta_3 & 0 & \theta_1 \\ \kappa_3 & \theta_2 & -\theta_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.32)$$

Para exhibir la estructura tensorial, bajemos un índice:

$$X_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\rho} X^\rho{}_\nu. \quad (8.33)$$

La relación $X^\top \eta + \eta X = 0$ es equivalente a

$$X_{\mu\nu} + X_{\nu\mu} = 0, \quad (8.34)$$

por lo que $X_{\mu\nu}$ es antisimétrico. Definimos $\omega_{\mu\nu} \equiv X_{\mu\nu}$, de modo que $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$. Entonces

$$X^\mu{}_\nu = \eta^{\mu\rho} \omega_{\rho\nu}. \quad (8.35)$$

Lo que hemos hecho en esta etapa es expresar nuestra matriz X mediante 6 números que son los $\omega_{\mu\nu}$. Por supuesto, los ω son solo componentes; no son matrices pertenecientes a $\mathfrak{so}(1, 3)$. Así que hemos aprendido que X se puede expresar con 6 números, y ahora queremos expresarlo en una base de matrices que sí pertenecen a $\mathfrak{so}(1, 3)$.

Queremos escribir X como una combinación lineal de matrices fijas, como se hace en cualquier álgebra de Lie:

$$X = \sum_i c_i G_i, \quad \text{con } G_i \in \mathfrak{so}(1, 3),$$

de modo que los coeficientes c_i (en nuestro caso $\omega_{\mu\nu}$) nos indiquen cuánto de cada elemento base está presente en X .

Para ello, expandimos X en una base $J^{\rho\sigma}$ indexada por pares antisimétricos:

$$X^\mu{}_\nu = \frac{1}{2} \omega_{\rho\sigma} (J^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu. \quad (8.36)$$

El factor $1/2$ es convencional; compensa la doble contabilidad bajo $\rho \leftrightarrow \sigma$, ya que $\omega_{\rho\sigma}$ es antisimétrico. A partir de lo cual, obtenemos

$$X_{\lambda\nu} = \eta_{\lambda\mu} X^\mu{}_\nu = \frac{1}{2} \omega_{\rho\sigma} \eta_{\lambda\mu} (J^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu. \quad (8.37)$$

pero $X_{\lambda\nu} = \omega_{\lambda\nu}$. Concluimos que debe cumplirse

$$\eta_{\lambda\mu} (J^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu = \delta_\lambda^\rho \delta_\nu^\sigma - \delta_\lambda^\sigma \delta_\nu^\rho. \quad (8.38)$$

Para aislar $(J^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu$, multiplicamos ambos lados por $\eta^{\mu\lambda}$

$$(J^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu = \eta^{\mu\lambda} (\delta_\lambda^\rho \delta_\nu^\sigma - \delta_\lambda^\sigma \delta_\nu^\rho) \quad (8.39)$$

Finalmente, para expresar todo en términos de la métrica η , escribimos:

$$(J^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu = \eta^{\rho\mu} \delta_\nu^\sigma - \eta^{\sigma\mu} \delta_\nu^\rho. \quad (8.40)$$

De forma explícita, tenemos

$$\begin{aligned} J^{01} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & J^{02} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & J^{03} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ J^{12} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & J^{13} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & J^{23} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es conveniente definir los generadores de boosts y rotaciones como

$$\begin{aligned} K_i &\equiv J^{0i}, \\ J_i &\equiv -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} J^{jk}, \quad \epsilon_{123} = +1 \end{aligned} \quad (8.41)$$

Entonces, cualquier elemento se escribe como

$$X = \sum_{i=1}^3 \kappa_i K_i + \sum_{i=1}^3 \theta_i J_i, \quad (8.42)$$

con $\kappa_i = \omega_{0i}$ y $\theta_i = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \omega_{jk}$.

Finalmente, los conmutadores se deducen de

$$\begin{aligned} [J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}]^\alpha{}_\beta &= (J^{\mu\nu})^\alpha{}_\gamma (J^{\rho\sigma})^\gamma{}_\beta - (J^{\rho\sigma})^\alpha{}_\gamma (J^{\mu\nu})^\gamma{}_\beta \\ &= (\eta^{\mu\alpha} \delta_\gamma^\nu - \eta^{\nu\alpha} \delta_\gamma^\mu) (\eta^{\rho\gamma} \delta_\beta^\sigma - \eta^{\sigma\gamma} \delta_\beta^\rho) - (\eta^{\rho\alpha} \delta_\gamma^\sigma - \eta^{\sigma\alpha} \delta_\gamma^\rho) (\eta^{\mu\gamma} \delta_\beta^\nu - \eta^{\nu\gamma} \delta_\beta^\mu) \\ &= \eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} + \eta^{\mu\sigma} J^{\nu\rho} \end{aligned} \quad (8.43)$$

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\mu\sigma} J^{\nu\rho} + \eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} \quad (8.44)$$

lo que da lugar a

$$[J_i, J_j] = \epsilon_{ijk} J_k, \quad [J_i, K_j] = \epsilon_{ijk} K_k, \quad [K_i, K_j] = -\epsilon_{ijk} J_k \quad (8.45)$$

8.4.1. Complejificación del álgebra de Lie

Sea una álgebra de Lie real $\mathfrak{g}$, es decir, un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ dotado de un corchete bilineal antisimétrico que satisface la identidad de Jacobi. La *complejificación* de $\mathfrak{g}$ es un proceso algebraico que consiste en extender los escalares de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$:

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \equiv \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}. \quad (8.46)$$

Esto produce un espacio vectorial complejo cuya base está formada por los mismos generadores que $\mathfrak{g}$, pero ahora se permiten combinaciones lineales con coeficientes complejos. El corchete se extiende por bilinealidad compleja.

En particular, si $\{T_a\}$ es una base real de $\mathfrak{g}$, entonces un elemento general de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ es de

la forma:

$$X = \sum_a (c_a + id_a) T_a, \quad \text{con } c_a, d_a \in \mathbb{R}. \quad (8.47)$$

Esta operación no cambia la dimensión del espacio (sigue teniendo $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$), pero *permite revelar estructuras algebraicas que no son visibles sobre los reales*, como descomposiciones en subálgebras simples o compactas.

La principal motivación para complejificar es que $\mathfrak{so}(1, 3)$ es una álgebra de Lie real no compacta y simple, mientras que $\mathfrak{so}(1, 3)_{\mathbb{C}}$ admite una descomposición en suma directa de dos subálgebras de tipo $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, lo que facilita su estudio y la clasificación de sus representaciones.

8.4.2. Generadores complejos y descomposición en dos copias de $\mathfrak{su}(2)$

Una vez complejificada el álgebra de Lorentz,

$$\mathfrak{so}(1, 3)_{\mathbb{C}} \equiv \mathfrak{so}(1, 3) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, \quad (8.48)$$

introducimos nuevos generadores complejos definidos por:

$$N_i^{\pm} \equiv \frac{1}{2}(J_i \pm iK_i) \quad (8.49)$$

Obtenemos facilmente

$$[N_i^+, N_j^+] = \epsilon_{ijk} N_k^+, \quad [N_i^-, N_j^-] = \epsilon_{ijk} N_k^-, \quad [N_i^+, N_j^-] = 0 \quad (8.50)$$

Los generadores N_i^+ y N_i^- satisfacen el álgebra de Lie de $\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}$ y ambos conmutan entre sí. Por tanto, el álgebra complejificada se descompone como una suma directa:

$$\mathfrak{so}(1, 3)_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \quad (8.51)$$

Esta descomposición es crucial para entender la estructura de representaciones: toda representación irreducible compleja de $\mathfrak{so}(1, 3)_{\mathbb{C}}$ se describe mediante un par de espines:

$$(j_+, j_-), \quad \text{con } j_{\pm} \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \dots\right\}. \quad (8.52)$$

Cada j_+ y j_- etiqueta una representación irreducible de una copia de $\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}$.

Este trabajo es similar a lo que hemos hecho previamente: el grupo recubridor de $SO^+(1, 3)$ es $SL(2, \mathbb{C})$, cuya álgebra de Lie es $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, la cual es isomorfa a $\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}$.

De hecho, en la representación fundamental ($j = 1/2$), $X \in \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}$ significa

$$X = \alpha_1 \sigma_1 + \alpha_2 \sigma_2 + \alpha_3 \sigma_3, \quad \text{con } \alpha_i \in \mathbb{C}. \quad (8.53)$$

Este espacio tiene dimensión 3 sobre $\mathbb{C}$ y conserva la misma estructura de conmutadores. Ahora, consideramos el álgebra

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \{X \in M_2(\mathbb{C}) \mid \text{tr } X = 0\}, \quad (8.54)$$

que también es de dimensión 3 sobre $\mathbb{C}$, y contiene todas las matrices complejas 2×2 de traza nula. Dado un elemento genérico de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$:

$$X = \begin{pmatrix} z & w \\ v & -z \end{pmatrix}, \quad z, w, v \in \mathbb{C}, \quad (8.55)$$

podemos reescribirlo como combinación lineal compleja de los generadores σ_i :

$$X = \frac{v+w}{2} \sigma_1 + i \frac{w-v}{2} \sigma_2 + z \sigma_3 \quad (8.56)$$

Por lo tanto, todo elemento de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ está en la complejificación de $\mathfrak{su}(2)$, y los conmutadores coinciden, es decir

$$\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \quad (8.57)$$

Para terminar esta sección, podemos notar que para toda transformación de Lorentz propia y ortocrónica Λ , y para toda representación irreducible de dimensión finita

$$D^{(j_1, j_2)} : SO^+(1, 3) \longrightarrow GL(V_{j_1} \otimes V_{j_2}), \quad (8.58)$$

la representación compleja conjugada es equivalente a aquella con los dos espines de $SU(2)$ intercambiados:

$$\left(D^{(j_1, j_2)}(\Lambda)\right)^* \simeq D^{(j_2, j_1)}(\Lambda). \quad (8.59)$$

En efecto, escribimos la transformación como

$$D^{(j_1)}(N^+) \otimes D^{(j_2)}(N^-) \quad (8.60)$$

donde (N^+, N^-) son los generadores complejos definidos mediante (8.49)

$$N_i^\pm = \frac{1}{2}(J_i \pm iK_i). \quad (8.61)$$

En principio, deberíamos escribir en (8.60) la exponencial de una combinación lineal de estos generadores, pero basta considerar sus propiedades algebraicas. Sabemos que

$$(N_i^+)^* = N_i^-, \quad (8.62)$$

lo cual implica:

$$\begin{aligned} \left(D^{(j_1)}(N^+) \otimes D^{(j_2)}(N^-) \right)^* &= D^{(j_1)}(N^+)^* \otimes D^{(j_2)}(N^-)^* \\ &= D^{(j_1)}(N^-) \otimes D^{(j_2)}(N^+) \\ &= D^{(j_2)}(N^+) \otimes D^{(j_1)}(N^-). \end{aligned} \quad (8.63)$$

Por tanto, se concluye que:

$$\left(D^{(j_1, j_2)}(\Lambda) \right)^* \simeq D^{(j_2, j_1)}(\Lambda) \quad (8.64)$$

lo que prueba que la representación conjugada compleja de (j_1, j_2) es equivalente a (j_2, j_1) , como consecuencia de la estructura algebraica del grupo de Lorentz complejo.

8.5. El grupo $SL(2, \mathbb{C})$

En esta sección queremos entender un poco mejor el grupo recubridor de $SO^+(1, 3)$ en particular como a un vector de Minkowski $x^\mu \in \mathbb{R}^{1,3}$ se asocia a una matriz hermítica y cómo actúa $SL(2, \mathbb{C})$ sobre ese objeto.

Cada matriz 2×2 hermítica se puede escribir como:

$$X = x^\mu \sigma_\mu = -x^0 I_2 + x^i \sigma^i, \quad (8.65)$$

donde $\sigma^\mu = (I_2, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ y los σ^i son las matrices de Pauli. Por lo tanto tenemos un isomorfismo entre los vectores del espacio de Minkowski y de las matrices hermíticas de dimensión 2. Usando las definiciones de σ^i obtenemos

$$X = \begin{pmatrix} -x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & -x^0 - x^3 \end{pmatrix} \quad (8.66)$$

es decir que $\det X = -x^\mu x_\mu$ el invariante de Minkowski (intervalo cuadrado). En

conclusión, si pedimos que el intervalo de Minkowski sea invariante (invariante de Lorentz) es equivalente a pedir que bajo alguna transformación el determinante de la matriz X no cambia. En esta dirección, consideramos $A \in SL(2, \mathbb{C})$ y actuamos sobre X mediante:

$$X \mapsto X' = AXA^\dagger. \quad (8.67)$$

Esta acción preserva la hermiticidad:

$$X^\dagger = X \quad \Rightarrow \quad X'^\dagger = (AXA^\dagger)^\dagger = AX^\dagger A^\dagger = AXA^\dagger = X'. \quad (8.68)$$

y también preserva el determinante

$$\det(X') = \det(AXA^\dagger) \quad (8.69)$$

$$= \det(A) \det(X) \det(A^\dagger) \quad (8.70)$$

$$= |\det A|^2 \cdot \det X = \det X, \quad \text{porque } \det A = 1. \quad (8.71)$$

En conclusión la transformación $X \mapsto AXA^\dagger$ define una transformación de Lorentz sobre x^μ . De hecho, como X' es también hermética, tenemos

$$X' = x'^\mu \sigma_\mu, \quad (8.72)$$

para ciertos coeficientes reales x'^μ . Entonces, a partir de (8.67)

$$x'^\mu \sigma_\mu = A(x^\nu \sigma_\nu)A^\dagger \quad (8.73)$$

Esto define linealmente x'^μ en función de x^ν , y por tanto existe una matriz $\Lambda^\mu{}_\nu \in SO^+(1, 3)$ tal que

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu. \quad (8.74)$$

Ejemplos:

Tomamos el siguiente elemento de $SL(2, \mathbb{C})$:

$$A = e^{\frac{\xi}{2}\sigma^3} = \begin{pmatrix} e^{\xi/2} & 0 \\ 0 & e^{-\xi/2} \end{pmatrix}, \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (8.75)$$

Sea un 4-vector $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ que asociamos con una matriz hermítica (8.66).

$$X = \begin{pmatrix} -x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & -x^0 - x^3 \end{pmatrix} \quad (8.76)$$

Aplicando la transformación, obtenemos

$$X' = AXA^\dagger = \begin{pmatrix} e^{\xi/2} & 0 \\ 0 & e^{-\xi/2} \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} e^{\xi/2} & 0 \\ 0 & e^{-\xi/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-x^0 + x^3)e^\xi & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & -(x^0 + x^3)e^{-\xi} \end{pmatrix}. \quad (8.77)$$

Queremos reescribir X' como:

$$X' = x'^\mu \sigma_\mu = \begin{pmatrix} -x'^0 + x'^3 & x'^1 - ix'^2 \\ x'^1 + ix'^2 & -x'^0 - x'^3 \end{pmatrix}. \quad (8.78)$$

Igualando los elementos de las matrices (8.77) y (8.78)

$$x'^0 - x'^3 = (x^0 - x^3)e^\xi, \quad (8.79)$$

$$x'^0 + x'^3 = (x^0 + x^3)e^{-\xi}, \quad (8.80)$$

$$x'^1 = x^1, \quad (8.81)$$

$$x'^2 = x^2. \quad (8.82)$$

Sumando y restando las dos primeras ecuaciones:

$$x'^0 = x^0 \cosh \xi - x^3 \sinh \xi, \quad (8.83)$$

$$x'^3 = -x^0 \sinh \xi + x^3 \cosh \xi. \quad (8.84)$$

Esta es exactamente una transformación de Lorentz (boost en z) con matriz:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \cosh \xi & 0 & 0 & -\sinh \xi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \xi & 0 & 0 & \cosh \xi \end{pmatrix} \in SO^+(1, 3). \quad (8.85)$$

En un segundo ejemplo, podemos considerar

$$A = e^{-i\frac{\theta}{2}\sigma^3} = \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}. \quad (8.86)$$

Siguiendo los mismos pasos, obtenemos

$$x'^0 = x^0, \quad (8.87)$$

$$x'^1 = x^1 \cos \theta - x^2 \sin \theta, \quad (8.88)$$

$$x'^2 = x^1 \sin \theta + x^2 \cos \theta, \quad (8.89)$$

$$x'^3 = x^3 \quad (8.90)$$

Esta transformación corresponde a una rotación de ángulo θ alrededor del eje z , con la matriz de Lorentz:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO^+(1, 3). \quad (8.91)$$

Podemos hacer el cálculo de forma distinta, de hecho sabemos por (8.73) y (8.74) que

$$A\sigma_\mu A^\dagger = \Lambda^\nu{}_\mu \sigma_\nu \quad (8.92)$$

Multiplicando por σ y tomando la traza sobre los índices espinoriales, encontramos

$$\text{Tr}(\sigma^\nu A\sigma_\mu A^\dagger) = \Lambda^\alpha{}_\mu \text{Tr}(\sigma^\nu \sigma_\alpha) = -2\Lambda^\nu{}_\mu \quad (8.93)$$

donde hemos usado la relación

$$\text{Tr}(\sigma_\mu \sigma_\nu) = -2\eta_{\mu\nu} \quad (8.94)$$

lo que implica

$$\Lambda^\nu{}_\mu = -\frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma^\nu A\sigma_\mu A^\dagger) \quad (8.95)$$

9. Grupo de Poincaré

El grupo de Poincaré extiende el grupo de Lorentz al incluir también las traslaciones en el espacio-tiempo. Estas traslaciones no modifican el intervalo entre dos eventos, por lo que, al igual que las transformaciones de Lorentz, preservan la estructura métrica de Minkowski. En consecuencia, el grupo de Poincaré constituye el verdadero grupo de simetrías del espacio de Minkowski.

Una transformación del grupo de Poincaré actúa sobre un punto del espacio-tiempo x^μ como

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu, \quad (9.1)$$

donde $\Lambda^\mu{}_\nu \in \text{SO}^+(1, 3)$ es una transformación de Lorentz propia y ortocrona aunque $a^\mu \in \mathbb{R}^{1,3}$ es un vector de traslación en el espacio-tiempo.

Este conjunto de transformaciones define el **grupo de Poincaré** denotado por

$$\mathcal{P} = \mathbb{R}^{1,3} \rtimes \text{SO}^+(1, 3), \quad (9.2)$$

es decir, es el producto semidirecto del grupo de traslaciones con el grupo de Lorentz.

El producto de dos elementos $(a_1, \Lambda_1), (a_2, \Lambda_2) \in \mathcal{P}$ está dado por

$$(a_2, \Lambda_2) \circ (a_1, \Lambda_1) : x \mapsto \Lambda_1 x + a_1 \mapsto \Lambda_2 (\Lambda_1 x + a_1) + a_2 = \Lambda_2 \Lambda_1 x + \Lambda_2 a_1 + a_2$$

es decir

$$(a_2, \Lambda_2) \circ (a_1, \Lambda_1) = (\Lambda_2 a_1 + a_2, \Lambda_2 \Lambda_1) \quad (9.3)$$

lo que refleja el hecho de que las traslaciones no conmutan con las rotaciones y los boosts, sino que son transformadas por Λ .

9.1. Estructura del grupo de Poincaré

Como variedad diferenciable, el grupo de Poincaré es el producto topológico

$$\mathcal{P} \simeq \mathbb{R}^4 \times \text{SO}^+(1, 3), \quad (9.4)$$

donde $\mathbb{R}^4$ tiene la topología estándar euclídea (variedad de dimensión 4) y $\text{SO}^+(1, 3)$ es como lo hemos visto una variedad de dimensión 6, no compacta, conexa, pero no

simplemente conexa. Por lo tanto, $\mathcal{P}$ es una variedad de dimensión $4 + 6 = 10$, con estructura de grupo de Lie no compacta y conexa, pero tampoco simplemente conexa, por la componente de Lorentz.

El grupo de Poincaré contiene varios subgrupos relevantes, como el subgrupo de traslaciones o de Lorentz. El subgrupo de traslaciones es abeliano y normal en $\mathcal{P}$. Un subgrupo normal $N \trianglelefteq G$ dentro de un grupo G es un subgrupo que permanece estable bajo conjugación por cualquier elemento del grupo G . Es decir

$$\forall g \in G, \forall n \in N, \quad gng^{-1} \in N. \quad (9.5)$$

De forma más explícita, consideramos un elemento arbitrario del grupo de Poincaré (b, Λ) y una traslación pura $(a, \mathbb{I})$. Usando la ley de composición del grupo

$$(b, \Lambda)(a, \mathbb{I})(b, \Lambda)^{-1} = (b, \Lambda)(a, \mathbb{I})(-\Lambda^{-1}b, \Lambda^{-1}) \quad (9.6)$$

$$= (b + \Lambda a, \Lambda)(-\Lambda^{-1}b, \Lambda^{-1}) \quad (9.7)$$

$$= (b + \Lambda a - b, \mathbb{I}) = (\Lambda a, \mathbb{I}) \quad (9.8)$$

Es nuevamente una traslación pura, por lo tanto pertenece al subgrupo T . Como esto es válido para todo $(b, \Lambda) \in \mathcal{P}$ y todo $(a, \mathbb{I}) \in T$, la conjugación nunca saca a T fuera de sí mismo. Por consiguiente, T es un subgrupo normal de $\mathcal{P}$.

Existen otros subgrupos llamados estabilizadores, o grupo pequeño que vamos a ver más tarde porque ayudan a la clasificación de las representaciones.

La cobertura universal de $\mathcal{P}$ está dada por:

$$\tilde{\mathcal{P}} = \mathbb{R}^{1,3} \rtimes \text{SL}(2, \mathbb{C}), \quad (9.9)$$

donde $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ es la cubierta universal de $\text{SO}^+(1, 3)$. Esta estructura es relevante para describir representaciones espinoriales, ya que, como hemos visto, permite definir representaciones con espín semientero, ausentes en $\text{SO}(1, 3)$.

9.2. Álgebra de Lie del grupo de Poincaré

Como el grupo es de dimensión 10, su álgebra de Lie tiene 10 generadores. Hemos discutido anteriormente (8.44) los 6 generadores del grupo de Lorentz $J^{\mu\nu}$

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\mu\sigma} J^{\nu\rho} + \eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} \quad (9.10)$$

con (8.40)

$$(J^{\mu\nu})^\rho{}_\sigma = \eta^{\mu\rho}\delta_\sigma^\nu - \eta^{\nu\rho}\delta_\sigma^\mu \quad (9.11)$$

Pero a diferencia de las rotaciones o los boosts, que actúan linealmente sobre un vector, las traslaciones actúan de manera afín:

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = x^\mu + a^\mu. \quad (9.12)$$

Por tanto, no se puede construir una matriz M tal que $Mx = x + a$, ya que esto no define una transformación lineal: no preserva el origen.

En consecuencia, si queremos construir una representación del grupo de traslaciones, debemos considerar su acción sobre funciones $\phi(x)$. Dicha acción está dada por

$$(T(a)\phi)(x) = \phi(x - a). \quad (9.13)$$

Este desplazamiento del argumento define una acción del grupo sobre el espacio de funciones suaves $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Expandimos para $a^\mu = \epsilon^\mu$ pequeño:

$$\phi(x - \epsilon) = \phi(x) - \epsilon^\mu \partial_\mu \phi(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (9.14)$$

Por tanto, el generador infinitesimal P_μ de traslaciones está dado por:

$$P_\mu = \partial_\mu \quad (9.15)$$

Del mismo modo, si queremos encontrar los generadores de Lorentz actuando sobre funciones $\phi(x)$, debemos estudiar cómo se transforman los argumentos bajo una transformación infinitesimal de Lorentz. Consideramos:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu, \quad \omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}. \quad (9.16)$$

Entonces, en una transformación pasiva:

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu x^\nu = x^\mu - \omega^\mu{}_\nu x^\nu. \quad (9.17)$$

La función se transforma como:

$$\phi(x) \mapsto \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x) = \phi(x - \omega x). \quad (9.18)$$

Expandiendo en serie de Taylor:

$$\phi'(x) = \phi(x) - \omega^\mu{}_\nu x^\nu \partial_\mu \phi(x) + \mathcal{O}(\omega^2). \quad (9.19)$$

Usando la antisimetría de $\omega^{\mu\nu}$, podemos reescribir:

$$\phi'(x) = \phi(x) - \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} (x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) \phi(x). \quad (9.20)$$

Por lo tanto, identificamos los generadores de Lorentz como operadores diferenciales:

$$J^{\mu\nu} = x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu. \quad (9.21)$$

Obviamente se puede fácilmente verificar que tenemos el mismo conmutador (9.10). De forma similar, podemos verificar que

$$[P^\mu, P^\nu] = 0. \quad (9.22)$$

Esto refleja el hecho de que el subgrupo de traslaciones es abeliano: las traslaciones en diferentes direcciones conmutan y finalmente tenemos

$$[J^{\mu\nu}, P^\rho] = \eta^{\nu\rho} P^\mu - \eta^{\mu\rho} P^\nu \quad (9.23)$$

9.3. Casimires del grupo de Poincaré

De forma similar al grupo de Lorentz, queremos construir los operadores que conmutan con todos los generadores del álgebra de Lie, es decir los operadores de Casimir. El álgebra de Poincaré posee dos invariantes independientes.

El primer operador de Casimir es simplemente el cuadrado del operador momento:

$$P^\mu P_\mu = \eta_{\mu\nu} P^\mu P^\nu. \quad (9.24)$$

Este operador conmuta con todos los generadores P^μ de traslaciones (trivialmente, pues

los P^μ conmutan entre sí), y también con los generadores de Lorentz $J^{\rho\sigma}$

$$[J^{\rho\sigma}, P^\mu P_\mu] = [J^{\rho\sigma}, P^\mu] P_\mu + P^\mu [J^{\rho\sigma}, P_\mu] \quad (9.25)$$

$$= (\eta^{\sigma\mu} P^\rho - \eta^{\rho\mu} P^\sigma) P_\mu + P^\mu (\eta^\sigma_\mu P^\rho - \eta^\rho_\mu P^\sigma) \quad (9.26)$$

$$= 0. \quad (9.27)$$

El valor de este operador se interpreta como la masa

$$P^\mu P_\mu = -m^2 \quad (9.28)$$

El segundo Casimir se construye a partir del **vector de Pauli–Lubanski**, definido como

$$W_\mu \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} J^{\nu\rho} P^\sigma, \quad (9.29)$$

con $\epsilon_{0123} = +1$.

Este vector tiene la propiedad de ser ortogonal al momento:

$$W^\mu P_\mu = 0. \quad (9.30)$$

El segundo operador de Casimir es el cuadrado de este vector

$$W^\mu W_\mu \quad (9.31)$$

Es un escalar de Lorentz, construido a partir de los generadores del álgebra, y puede demostrarse que conmuta con todos los $J^{\mu\nu}$ y P^μ , y por tanto es un Casimir del grupo. Su interpretación física depende de m .

Caso: partícula masiva ($P^\mu P_\mu = -m^2 < 0$).

Se puede pasar al sistema de referencia del centro de masa, es decir, al marco donde el momento es puramente temporal:

$$P^\mu = (m, 0, 0, 0). \quad (9.32)$$

En este marco, la definición del vector de Pauli–Lubanski se reduce a:

$$W_0 = 0, \quad (9.33)$$

$$W_i = \frac{1}{2} \epsilon_{i\nu\rho 0} J^{\nu\rho} m = -\frac{m}{2} \epsilon_{ijk} J^{jk} = m J_i \quad (9.34)$$

Entonces

$$W^\mu W_\mu = \delta_{ij} W^i W^j = m^2 \delta_{ij} J^i J^j = m^2 \mathbf{J}^2 \quad (9.35)$$

El operador $\mathbf{J}^2$ tiene como valores propios $-j(j+1)$, donde j es el espín de la partícula. Así, para $m^2 > 0$, el segundo Casimir clasifica la representación según el espín j .

Caso: partícula sin masa ($P^\mu P_\mu = 0$).

En este caso, el cuadrimomento no puede reducirse al reposo, ya que no existe tal marco. Sin embargo, se puede elegir un sistema de referencia en el que

$$P^\mu = (E, 0, 0, E). \quad (9.36)$$

Aquí, el vector de Pauli–Lubanski toma la forma

$$W_0 = -E J_3, \quad W_1 = E(J_1 - K_2), \quad W_2 = E(J_2 + K_1), \quad W_3 = E J_3, \quad (9.37)$$

lo que implica que el segundo operador de Casimir se reduce a

$$W^\mu W_\mu = W_1^2 + W_2^2. \quad (9.38)$$

Como se cumple $[W_1, W_2] = 0$, estos operadores pueden diagonalizarse simultáneamente. Actúan entonces sobre los estados $|w_1, w_2\rangle$ según

$$W_i |w_1, w_2\rangle = w_i |w_1, w_2\rangle, \quad \text{para } i = 1, 2. \quad (9.39)$$

El segundo Casimir es entonces

$$W^\mu W_\mu = w_1^2 + w_2^2. \quad (9.40)$$

Como su valor está fijado, escribimos $w_1 = \rho \cos \alpha$ y $w_2 = \rho \sin \alpha$, con lo cual $W^\mu W_\mu = \rho^2$, y podemos interpretar los estados $|w_1, w_2\rangle$ como parametrizados por el ángulo $\alpha \in [0, 2\pi)$, con la acción

$$W_1 |\alpha\rangle = \rho \cos \alpha |\alpha\rangle, \quad W_2 |\alpha\rangle = \rho \sin \alpha |\alpha\rangle. \quad (9.41)$$

Por lo tanto, los estados físicos de la partícula están etiquetados por el momento p_μ y un ángulo adicional $\alpha \in [0, 2\pi)$. Esto significa que, para cada elección de p_μ , el espacio de Hilbert sigue siendo de dimensión infinita, ahora etiquetado por un parámetro continuo α en lugar de un parámetro discreto y acotado como j_3 . Dicho de otro modo, es como si existiera una infinidad no numerable de especies de partículas. Estas representaciones se conocen como **representaciones de espín continuo** (continuous spin representations), a las que volveremos más adelante. La visión estándar consiste en descartar esta posibilidad, lo que equivale a imponer $w_1 = w_2 = 0$, es decir

$$W^0 = -W_0 = EJ_3 \equiv -EJ^{12}, \quad W_1 = 0, \quad W_2 = 0, \quad W^3 = -EJ^{12} \quad (9.42)$$

o de forma equivalente

$$W^\mu = -J^{12}P^\mu \quad (9.43)$$

El generador J^{12} representa una rotación en el plano xy , o sea, alrededor del eje z , eje de propagación, por eso se interpreta como la helicidad ya que la helicidad es precisamente el momento angular proyectado sobre la dirección del momento.

En resumen, los dos Casimires del grupo de Poincaré permiten clasificar completamente las representaciones irreducibles unitarias del grupo:

- El primer Casimir $P^\mu P_\mu$ determina la *masa*.
- El segundo Casimir $W^\mu W_\mu$ determina el *espín* o *helicidad*.

Este resultado fue formalizado por Wigner, quien clasificó todas las representaciones irreducibles unitarias del grupo de Poincaré según sus valores.

9.4. Clasificación de partículas: construcción mediante el grupo pequeño

Como dijimos, el grupo de Poincaré es un producto semidirecto, donde las traslaciones del espacio-tiempo forman un subgrupo **abeliano normal**. Pero sabemos que los grupos abelianos tienen todas sus representaciones unitarias irreducibles **unidimensionales**, etiquetadas por un 4-vector $p_\mu \in \mathbb{R}^{1,3}$. Por eso es natural comenzar el análisis eligiendo un momento, lo cual define una representación de este subgrupo.

Pero dado que las transformaciones de Lorentz conservan la norma, el valor $p^\mu p_\mu = -m^2$ se mantiene invariante. Por tanto, dos momentos pertenecen a la misma **órbita** si tienen la misma masa invariante, es decir, el mismo valor de $p^\mu p_\mu$, ya que las transformaciones

de Lorentz preservan la norma de Minkowski. Entonces:

- Todos los 4-momentos con $p^\mu p_\mu = -m^2 < 0$ y $p^0 > 0$ (partículas masivas) pertenecen a la misma órbita.
- Todos los vectores nulos p^μ con $p^\mu p_\mu = 0$ y $p^0 > 0$ pertenecen a la órbita sin masa.
- El origen $p^\mu = 0$ constituye su propia órbita trivial (vacío, sin partícula).

Cada órbita corresponde a un tipo de partícula, distinguida por su masa.

Podemos notar que aunque cada p^μ define una representación distinta del subgrupo de traslaciones, dos vectores p^μ diferentes pueden dar lugar a representaciones equivalentes del grupo completo de Poincaré si están relacionados por una transformación de Lorentz. Por lo tanto, no clasificamos las partículas según el vector de 4-momento completo p^μ , sino según su órbita bajo el grupo de Lorentz, es decir, todos los momentos que tienen la misma norma de Minkowski $p^\mu p_\mu$, la cual determina la masa.

Para cada órbita (es decir, para un momento fijo p^μ), definimos el grupo pequeño que deja invariante a p^μ . Luego, clasificamos las representaciones unitarias irreducibles del grupo completo G clasificando las representaciones unitarias irreducibles del grupo pequeño G_p , y luego *induciendo* dichas representaciones de vuelta al grupo G .

Más específicamente, consideremos un estado de partícula caracterizado por un valor propio del operador momento P^μ , asociado a una cierta representación del grupo de Poincaré. Tal estado se etiqueta por su valor propio de momento p^μ :

$$P^\mu |\psi\rangle = p^\mu |\psi\rangle. \quad (9.44)$$

Primero necesitamos encontrar el grupo pequeño, o *subgrupo estabilizador*, asociado a un momento dado p^μ . Este se define como el subgrupo del grupo de Lorentz que deja invariante ese momento. Explícitamente, dado un vector momento p^μ , buscamos todas las transformaciones de Lorentz Λ^μ_ν que satisfacen

$$\Lambda^\mu_\nu p^\nu = p^\mu. \quad (9.45)$$

Este conjunto de transformaciones forma un subgrupo del grupo de Lorentz, llamado el *grupo pequeño* del vector p^μ . La clasificación de las representaciones irreducibles se reduce entonces a encontrar las representaciones irreducibles de este grupo pequeño. Si consideramos una transformación infinitesimal $\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu$. La eq.(9.45) se escribe

$$\omega^\mu_\nu p^\nu = 0 \quad (9.46)$$

Existen tres tipos distintos de vectores de momento p^μ dependiendo del valor del invariante $p^\mu p_\mu$:

- **Caso masivo** ($p^\mu p_\mu = -m^2 < 0$): Siempre se puede elegir un momento en el sistema de reposo $p^\mu = (m, 0, 0, 0)$, lo que implica $\omega^\mu{}_0 = 0$. En este caso, el grupo pequeño es el grupo de rotaciones $SO(3)$, ya que las rotaciones espaciales dejan invariante el vector p^μ :

$$SO(3) = \left\{ \Lambda \in SO(1, 3) \mid \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu = p^\mu, p^\mu = (m, 0, 0, 0) \right\}. \quad (9.47)$$

Las representaciones irreducibles de $SO(3)$ se etiquetan por el número cuántico de espín $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$, correspondientes a partículas de espín j .

- **Caso sin masa** ($p^\mu p_\mu = 0$): Podemos elegir un momento estándar alineado con el eje z : $p^\mu = (E, 0, 0, E)$ y E la energía. Aquí, el grupo pequeño consiste en las transformaciones de Lorentz que dejan invariante este vector nulo. Podemos fácilmente verificar que los vectores de Pauli–Lubanski son los generadores de este grupo. Tenemos

$$W_0 = -W_3 = -EJ_3, \quad W_1 = E(J_1 - K_2), \quad W_2 = E(J_2 + K_1) \quad (9.48)$$

con una álgebra

$$[W_0, W_1] = -EW_2, \quad [W_0, W_2] = EW_1, \quad [W_1, W_2] = 0 \quad (9.49)$$

lo cual es análogo al grupo de isometrías del plano euclídeo, compuesto por dos traslaciones y una rotación, es decir, el grupo $ISO(2)$.

$$ISO(2) = \left\{ \Lambda \in SO(1, 3) \mid \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu = p^\mu, p^\mu = (\omega, 0, 0, \omega) \right\}. \quad (9.50)$$

Por lo tanto, los elementos del grupo se pueden escribir como

$$\begin{aligned} D(\theta, u, v) &= e^{u(J_1+K_2)} e^{v(J_2-K_1)} e^{\theta J_3} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{u^2}{2} & 0 & -u & \frac{u^2}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -u & 0 & 1 & -u \\ -\frac{u^2}{2} & 0 & u & 1 - \frac{u^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \frac{v^2}{2} & v & 0 & \frac{v^2}{2} \\ v & 1 & 0 & v \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{v^2}{2} & -v & 0 & 1 - \frac{v^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9.51)$$

- **Caso taquiónico** ($p^\mu p_\mu > 0$): Se puede elegir un vector de momento de la forma $p^\mu = (0, 0, 0, \kappa)$, es decir, un vector puramente espacial. En este escenario

(no físico), el grupo pequeño es $SO(2,1)$, que posee representaciones unitarias de dimensión infinita. Estas representaciones no son relevantes para describir partículas físicas observadas, pero desde el punto de vista matemático, surgen naturalmente en la teoría de grupos.

Una vez identificado el grupo pequeño G_p para un momento dado p^μ , se construye la representación irreducible del grupo completo de Poincaré $\mathcal{P}$ mediante el método de representaciones inducidas (construcción de Wigner-Mackey): se parte de una representación unitaria irreducible del grupo pequeño G_p y se induce una representación sobre todo el grupo de Poincaré. De este modo, cada representación de partícula queda clasificada de forma única por el valor del operador de Casimir $P^\mu P_\mu$ (la masa) y por una representación irreducible del grupo pequeño (el espín o la helicidad).

En el próximo capítulo hablaremos de campos, en este caso la clasificación ocurre desde un punto de vista distinto. Una partícula es un estado físico, descrito por una representación irreducible unitaria del grupo de Poincaré, aunque un campo es una cantidad matemática definida en cada punto del espacio-tiempo, que se transforma según una representación de dimensión finita (no necesariamente unitaria) del grupo de Lorentz. Un campo se clasifica primero como objeto geométrico (escalar, vector, tensor, espinor...) según su transformación bajo Lorentz, y luego por la ecuación dinámica que satisface.

La diferencia clave radica en que para partículas exigimos representaciones unitarias de dimensión infinita (por el espacio de Hilbert), mientras que para campos consideramos representaciones de dimensiones finitas del grupo de Lorentz sobre espacios vectoriales (no espacios de Hilbert).

10. Campos como aplicaciones a espacios de representación

Dado un grupo de simetría (como el grupo de Lorentz) y una representación D definida sobre un espacio vectorial V , un **campo de tipo D** es una aplicación:

$$\Phi : \mathbb{R}^{1,3} \longrightarrow V, \quad (10.1)$$

es decir, a cada punto del espacio-tiempo de Minkowski x^μ , el campo le asigna un vector $\Phi(x) \in V$ perteneciente al espacio de representación.

Bajo una transformación de Lorentz Λ , el campo $\Phi(x)$ se transforma de la siguiente manera:

$$\Phi(x) \mapsto D(\Lambda) \Phi(\Lambda^{-1}x), \quad (10.2)$$

donde Λ actúa sobre el argumento x como transformación de coordenadas y $D(\Lambda)$ actúa sobre los valores del campo en el espacio V .

Recordemos que D es una representación, $D(\Lambda) \in GL(V)$, es decir, aplicaciones de V en V , y como $\Phi(x) \in V$, se tiene que $D(\Lambda)\Phi(x) \in V$.

10.1. Representación $(0,0)$: Campo escalar

La representación $(0,0)$ es el producto de dos representaciones triviales de $\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}$, por lo tanto el espacio sobre el que actúa es unidimensional:

$$V^{(0,0)} = \mathbb{C}. \quad (10.3)$$

Toda transformación de Lorentz se representa por el número $1 \in \mathbb{C}$, es decir, la acción del grupo es trivial:

$$D(\Lambda) \phi = \phi. \quad (10.4)$$

El campo correspondiente es una función escalar sobre el espacio-tiempo de Minkowski:

$$\phi : \mathbb{R}^{1,3} \longrightarrow \mathbb{C}. \quad (10.5)$$

Dado $\Lambda \in SO^+(1,3)$, el campo se transforma como:

$$\phi(x) \mapsto \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x). \quad (10.6)$$

El valor del campo no cambia; sólo cambia el punto del espacio-tiempo donde se evalúa. El campo $\phi(x)$ representa un *campo escalar complejo*. Es invariante bajo rotaciones y transformaciones de Lorentz. Ejemplos físicos incluyen el campo de Higgs en el Modelo Estándar o campos escalares en teorías cosmológicas como la inflación.

Para construir un lagrangiano, se requieren invariantes bajo transformaciones de Lorentz. Como un campo escalar es en sí mismo un invariante, su inclusión en el lagrangiano resulta trivial. Si el campo es complejo, deberá considerarse una combinación real, ya que el lagrangiano debe ser una cantidad real. Por tanto, para el termino cinético se puede considerar

$$\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* \quad (10.7)$$

que es real e invariante bajo transformaciones de Lorentz, aunque para el potencial podemos considerar cualquier función de $|\phi|^2$. Por ejemplo,

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - |\phi|^2 \quad (10.8)$$

10.2. Representación $(\frac{1}{2}, 0)$: Espinor de Weyl izquierdo

Esta representación actúa sobre un espacio vectorial complejo de dimensión 2, es decir:

$$V^{(\frac{1}{2}, 0)} = \mathbb{C}^2. \quad (10.9)$$

Es el espacio sobre el que actúa $SL(2, \mathbb{C})$, que es el recubridor universal del grupo de Lorentz conexo. El campo correspondiente es una función de Minkowski en $\mathbb{C}^2$:

$$\psi : \mathbb{R}^{1,3} \longrightarrow \mathbb{C}^2, \quad (10.10)$$

donde se escribe típicamente como un espinor con un índice inferior:

$$\psi_\alpha(x), \quad \alpha = 1, 2. \quad (10.11)$$

Bajo una transformación de Lorentz representada por $A \in SL(2, \mathbb{C})$, el campo se transforma como:

$$\psi_\alpha(x) \mapsto \psi'_\alpha(x) = A_\alpha^\beta \psi_\beta(\Lambda^{-1}x), \quad (10.12)$$

donde A^α_β actúa linealmente sobre el índice de espinor y Λ es la transformación de Lorentz asociada a A , como lo hemos visto en el capítulo previo.

Este campo es un *espinor de Weyl izquierdo*. Aparece naturalmente en teorías quirales, y transforma sólo bajo una de las dos copias de $SU(2)_\mathbb{C}$.

Con un único espinor ψ^α , no se puede construir un escalar de Lorentz. Sin embargo, si se tienen dos espinores de Weyl izquierdos, ψ^α y χ^β , se puede formar el invariante:

$$\psi^\alpha \chi^\beta \epsilon_{\alpha\beta}, \quad (10.13)$$

donde $\epsilon_{\alpha\beta}$ es el símbolo completamente antisimétrico:

$$\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1, \quad \epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0. \quad (10.14)$$

Este objeto es invariante bajo $SL(2, \mathbb{C})$ porque:

$$\psi^\alpha \chi^\beta \epsilon_{\alpha\beta} \longmapsto A^\alpha{}_\gamma A^\beta{}_\delta \psi^\gamma \chi^\delta \epsilon_{\alpha\beta} = \psi^\gamma \chi^\delta (A^\alpha{}_\gamma A^\beta{}_\delta \epsilon_{\alpha\beta}) = \psi^\gamma \chi^\delta \epsilon_{\gamma\delta}, \quad (10.15)$$

donde hemos usado la identidad

$$A^\alpha{}_\gamma A^\beta{}_\delta \epsilon_{\alpha\beta} = \det A \epsilon_{\gamma\delta} \quad (10.16)$$

y como $\det A = 1$, tenemos

$$A^\alpha{}_\gamma A^\beta{}_\delta \epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\gamma\delta} \quad (10.17)$$

Por tanto, $\psi^\alpha \chi^\beta \epsilon_{\alpha\beta}$ es un **escalar de Lorentz**, complejo en general. Pero desafortunadamente no podemos construir un término cinético con solamente campos de Weyl izquierdo, necesitamos la parte derecha.

Podemos usar el tensor ϵ para bajar y subir los índices espinoriales

$$\psi_a(x) = \epsilon_{ab} \psi^b(x)$$

10.3. Representación $(0, \frac{1}{2})$: Espinor de Weyl derecho

A diferencia de la representación izquierda, se usa un índice punteado para notar la diferencia, se llama la notación de Van der Waerden

$$\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}(x) \in \mathbb{C}^2, \quad \dot{\alpha} = 1, 2. \quad (10.18)$$

También podemos escribir el campo sin índices; por eso se utiliza la barra para recordar que el campo transforma según la representación $(0, \frac{1}{2})$.

Sabemos que un campo espinorial de Weyl izquierdo se transforma como

$$\psi_\alpha(x) \mapsto \psi'_\alpha(x) = A_\alpha^\beta \psi_\beta(\Lambda^{-1}x) \quad (10.19)$$

lo que implica

$$(\psi_\alpha(x))^* \mapsto (\psi'_\alpha(x))^* = (A_\alpha^\beta)^* (\psi_\beta(\Lambda^{-1}x))^* \quad (10.20)$$

Pero hemos visto previamente que el conjugado de un campo que se transforma bajo una representación (j_1, j_2) es un campo que se transforma bajo la representación (j_2, j_1) . Es decir

$$(\psi_\alpha(x))^* = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}(x) \quad (10.21)$$

lo que implica

$$\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}(x) \mapsto \bar{\psi}'_{\dot{\alpha}}(x) = (A^*)_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \bar{\psi}_{\dot{\beta}}(\Lambda^{-1}x) \quad (10.22)$$

Para que sea contravariante, usamos

$$\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \equiv \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\psi}_{\dot{\beta}} \quad (10.23)$$

lo que nos da

$$\bar{\psi}^{\dot{\gamma}}(x) \mapsto \bar{\psi}'^{\dot{\gamma}}(x) = \epsilon^{\dot{\gamma}\dot{\alpha}} (A^*)_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \bar{\psi}_{\dot{\beta}}(\Lambda^{-1}x) \quad (10.24)$$

Usando la relación (10.17), obtenemos

$$\begin{aligned} A_\gamma^\alpha A_\delta^\beta \epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\gamma\delta} &\Leftrightarrow A_\alpha^\gamma A_\beta^\delta \epsilon^{\alpha\beta} = \epsilon^{\gamma\delta} \Leftrightarrow (A^\top)^\gamma_\alpha A_\beta^\delta \epsilon^{\alpha\beta} = \epsilon^{\gamma\delta} \\ \Leftrightarrow A_\beta^\delta \epsilon^{\alpha\beta} = (A^{-1\top})^\alpha_\gamma \epsilon^{\gamma\delta} &\Leftrightarrow (A^*)_{\dot{\beta}}^{\dot{\delta}} \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = (A^{-1\dagger})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\gamma}} \epsilon^{\dot{\gamma}\dot{\delta}} \end{aligned} \quad (10.25)$$

donde hemos usado el conjugado en la última relación. En resumen, la relación (10.24) se transforma en

$$\bar{\psi}^{\dot{\gamma}}(x) \mapsto \bar{\psi}'^{\dot{\gamma}}(x) = (A^{-1\dagger})^{\dot{\gamma}}_{\dot{\rho}} \epsilon^{\dot{\rho}\dot{\beta}} \bar{\psi}_{\dot{\beta}}(\Lambda^{-1}x) = (A^{-1\dagger})^{\dot{\gamma}}_{\dot{\rho}} \bar{\psi}^{\dot{\rho}}(\Lambda^{-1}x) \quad (10.26)$$

Esto es completamente análogo al caso de los espacios vectoriales, es decir que si los vectores con índices inferiores se transforman con A , los vectores con índices superiores

(base dual) se transforman con A^{-1} . De forma similar, tenemos

$$\begin{aligned}\psi^\alpha(x) = \epsilon^{\alpha\beta}\psi_\beta(x) &\mapsto \epsilon^{\alpha\beta}A_\beta{}^\delta\psi_\delta(\Lambda^{-1}x) = (A^{-1\top})^\alpha{}_\gamma\epsilon^{\gamma\delta}\psi_\delta(\Lambda^{-1}x) \\ &\mapsto (A^{-1\top})^\alpha{}_\gamma\psi^\gamma(\Lambda^{-1}x)\end{aligned}\quad (10.27)$$

Podemos definir un operador que permite transformar nuestros índices espinoriales a índices de Lorentz

$$\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}} = (1, +\boldsymbol{\sigma}), \quad \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta} = (1, -\boldsymbol{\sigma}), \quad (10.28)$$

donde se ha definido

$$\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\epsilon^{\alpha\beta}\sigma^\mu_{\beta\dot{\beta}} \quad (10.29)$$

lo que implica que

$$\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}}\psi^\alpha\bar{\psi}^{\dot{\beta}} \equiv \sigma^\mu\psi\bar{\psi} \quad (10.30)$$

es un vector de Lorentz. De hecho, bajo una transformación de Lorentz, tenemos con (10.26) y (10.27)

$$\begin{aligned}\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}}\psi^\alpha\bar{\psi}^{\dot{\beta}} &\mapsto \sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}}(A^{-1\top})^\alpha{}_\gamma(A^{-1\dagger})^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\gamma}}\psi^\gamma\bar{\psi}^{\dot{\gamma}} \\ &\mapsto (A^{-1})^\mu{}_\nu\sigma^\nu_{\alpha\dot{\beta}}(A^{-1\dagger})^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\gamma}}\psi^\gamma\bar{\psi}^{\dot{\gamma}}\end{aligned}\quad (10.31)$$

usando (8.92), tenemos

$$\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}}\psi^\alpha\bar{\psi}^{\dot{\beta}} \mapsto (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu\sigma^\nu_{\alpha\dot{\beta}}\psi^\alpha\bar{\psi}^{\dot{\beta}} = \Lambda^\mu{}_\nu\sigma^\nu_{\alpha\dot{\beta}}\psi^\alpha\bar{\psi}^{\dot{\beta}} \quad (10.32)$$

es decir

$$\sigma^\mu\psi\bar{\psi} \text{ es un vector de Lorentz}$$

Ahora podemos describir cómo construir Lagrangianos a partir de un espinor de Weyl. El término cinético invariante bajo transformaciones de Lorentz está dado por

$$\mathcal{L}_{\text{cin}} = i\psi^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}}\partial_\mu\bar{\psi}^{\dot{\beta}}, \quad (10.33)$$

y se interpreta comúnmente como el lagrangiano asociado a un espinor de Weyl derecho, ya que la derivada actúa sobre $\bar{\psi}^{\dot{\beta}}$ aunque para describir un espinor de Weyl izquierdo,

usaremos

$$\mathcal{L}_{\text{cin}} = i\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta}\partial_{\mu}\psi_{\beta}, \quad (10.34)$$

lo cual enfatiza la simetría entre las formulaciones en términos de espinores izquierdos y derechos. El coeficiente i sirve para tener un lagrangiano real, de hecho si $\mathcal{L} = i\psi\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\psi}$, tenemos

$$\mathcal{L}^{\dagger} = -i\bar{\psi}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi = i\psi\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\psi} + (\text{derivada total}) \quad (10.35)$$

hemos usado que $\sigma^{\mu\dagger} = \bar{\sigma}^{\mu}$ y hecho una integración por partes.

Podemos notar que estos lagrangianos son invariante bajo transformaciones globales de fase, $U(1)$

$$\psi(x) \mapsto e^{i\alpha}\psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \mapsto e^{-i\alpha}\bar{\psi}(x). \quad (10.36)$$

o de forma infinitesimal

$$\psi(x) \mapsto \psi(x) + i\alpha\psi(x) \equiv \psi(x) + \alpha\delta\psi(x), \quad (10.37)$$

$$\bar{\psi}(x) \mapsto \bar{\psi}(x) - i\alpha\bar{\psi}(x) \equiv \bar{\psi}(x) + \alpha\delta\bar{\psi}(x), \quad (10.38)$$

Sabemos por el teorema de Noether (3.16) que existe una corriente conservada. Si partimos del lagrangiano correspondiente al espinor derecho (10.33), obtenemos una corriente dada por

$$j_{\text{derecho}}^{\mu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi^a)}\delta\phi^a = \psi^{\alpha}\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^{\mu}\bar{\psi}^{\dot{\beta}} \equiv \sigma^{\mu}\psi\bar{\psi} \quad (10.39)$$

la cual está trivialmente conservada, es decir, su divergencia es cero, $\partial_{\mu}j^{\mu} = 0$. La componente temporal de esta corriente es

$$j_{\text{derecho}}^0 = \sigma^0\psi\bar{\psi} = \psi\bar{\psi} \equiv \psi_a\bar{\psi}^{\dot{a}} \quad (10.40)$$

y la carga conservada asociada es simplemente la integral espacial de esta cantidad

$$Q_{\text{derecho}} = \int_V d^3x \psi\bar{\psi} \quad (10.41)$$

Por otro lado, si consideramos el lagrangiano correspondiente al espinor izquierdo (10.34),

la corriente asociada cambia de signo y toma la forma

$$j_{\text{izquierdo}}^\mu = -\bar{\psi}_\alpha \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta} \psi^\beta \equiv -\bar{\sigma}^\mu \psi \bar{\psi} \quad (10.42)$$

lo que implica que la carga conservada es la opuesta

$$Q_{\text{izquierdo}} = -Q_{\text{derecho}} \quad (10.43)$$

Por tanto, la carga del espinor izquierdo es igual a menos la del derecho. Al cuantizarse, esta teoría da lugar a un fermión sin masa de quiralidad izquierda, con helicidad $-\frac{1}{2}$, y a una antipartícula sin masa de quiralidad derecha, con helicidad $+\frac{1}{2}$. Si el fermión de quiralidad izquierda tiene carga $Q = +1$, entonces el fermión de quiralidad derecha tiene carga -1 , como corresponde a una antipartícula.

10.3.1. Masa de Majorana

A este término cinético se le puede añadir un término invariante bajo transformaciones de Lorentz, conocido como el término de masa de Majorana

$$\mathcal{L}_{\text{masa}} = -\frac{1}{2}m \left(\psi^\alpha \psi_\alpha + \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \right), \quad (10.44)$$

El complejo conjugado ha sido agregado para tener un lagrangiano real. Este término rompe explícitamente la simetría global $U(1)$, por lo que deja de existir una cantidad conservada que distinga a la partícula de su antipartícula. Al cuantizar la teoría, se obtiene una partícula de espín $1/2$ que es su propia antipartícula, es decir, una partícula neutra.

En resumen, si $Q \neq 0$, el campo tiene carga eléctrica y el término de masa de Majorana está prohibido, ya que rompe la simetría $U(1)$; esto permite describir una partícula cargada sin masa. En cambio, si $Q = 0$, el campo es neutro y el término de masa de Majorana está permitido, lo que permite describir una partícula neutra y masiva, como un neutrino de Majorana. Esta distinción motiva la introducción de espinores de Dirac para describir partículas cargadas y masivas.

10.4. Representación $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$: Espinor de Dirac

Un espinor de Dirac contiene dos espinores de Weyl (izquierdo y derecho). Se define como

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_\alpha(x) \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}}(x) \end{pmatrix} \quad (10.45)$$

con $\psi_\alpha(x)$ un espinor de Weyl izquierdo $(\frac{1}{2}, 0)$ y $\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}(x)$ un espinor derecho $(0, \frac{1}{2})$. El termino cinetico es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{cin}} &= i\chi^\alpha \sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}} \partial_\mu \bar{\chi}^{\dot{\beta}} + i\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta} \partial_\mu \psi_\beta \\ &= i \begin{pmatrix} \chi^\alpha & \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}} \\ \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta} & 0 \end{pmatrix} \partial_\mu \begin{pmatrix} \psi_\beta \\ \bar{\chi}^{\dot{\beta}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (10.46)$$

lo que nos motiva a definir

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (10.47)$$

y

$$\bar{\Psi} = \begin{pmatrix} \chi^\alpha & \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad (10.48)$$

lo que nos permite escribir el termino cinético como

$$\mathcal{L}_{\text{cin}} = i\bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi \quad (10.49)$$

Se puede notar que

$$\bar{\Psi} = \begin{pmatrix} \chi^\alpha & \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} & \chi^\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} \equiv \psi^\dagger(x) \gamma^0 \quad (10.50)$$

También se nota que

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = \begin{pmatrix} \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu + \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu \end{pmatrix} = -2\eta^{\mu\nu} \mathbb{I}_4 \quad (10.51)$$

llamada **álgebra de Clifford**.

A esta parte cinética podemos ahora agregar un termino de masa

$$m\bar{\Psi}\Psi = m(\chi^\alpha\psi_\alpha + \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}) \equiv m(\chi\psi + \bar{\psi}\bar{\chi}) \quad (10.52)$$

Este término de masa no es del tipo de Majorana (10.44) y puede ser positiva o negativa. Como el término de masa involucra dos fermiones de Weyl distintos, se preserva una simetría $U(1)$, bajo la cual las fases de ψ y χ rotan en sentidos opuestos

$$\psi(x) \mapsto e^{i\alpha}\psi(x), \quad \chi(x) \mapsto e^{-i\alpha}\chi(x) \quad (10.53)$$

El resultado es que, al cuantizar, la acción

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi \quad (10.54)$$

describe una partícula de espín $+\frac{1}{2}$ y carga $+1$, junto con una antipartícula distinta de espín $+\frac{1}{2}$ y carga -1 , ambas con masa $|m|$.

Es posible restringir el espinor de Dirac Ψ para que tenga el mismo contenido que un único fermión de Weyl. En efecto, si $\chi_\alpha = \psi_\alpha$ y $\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}$, se obtiene un **espinor de Majorana**.

10.5. Representación $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$: vector de Minkowski

Es el producto tensorial de los espacios $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, uno con índice sin punto (representación $(1/2, 0)$) y otro con índice con punto (representación $(0, 1/2)$). Es decir, los objetos en esta representación tienen dos índices

$$V_{\alpha\dot{\beta}}(x), \quad (10.55)$$

con $\alpha, \dot{\beta} = 1, 2$. Este objeto transforma bajo la acción de $SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$ como:

$$V_{\alpha\dot{\beta}} \mapsto A_\alpha{}^\gamma A_{\dot{\beta}}^{*\dot{\delta}} V_{\gamma\dot{\delta}}. \quad (10.56)$$

La representación $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ tiene dimensión

$$(2j_+ + 1)(2j_- + 1) = (2)(2) = 4, \quad (10.57)$$

lo cual es como el espacio de un vector de Minkowski. De hecho, existe un isomorfismo entre vectores de Minkowski V^μ y objetos $V_{\alpha\dot{\beta}}$

$$V_{\alpha\dot{\beta}}(x) = V^\mu(x) \sigma_{\mu\alpha\dot{\beta}} \quad (10.58)$$

o de forma equivalente, multiplicando por $\bar{\sigma}$ y tomando la traza

$$V^\mu = -\frac{1}{2}\text{Tr}(V \bar{\sigma}^\mu) \quad (10.59)$$

ya que

$$\text{Tr}(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu) = -2\eta^{\mu\nu}. \quad (10.60)$$

Es decir que estas matrices, σ^μ , sirven como *punto* entre los vectores de Minkowski y los objetos espinoriales. Por tanto, el campo $V^\mu(x)$ es un campo vectorial en el espacio-tiempo.

El grupo de Lorentz $SO(1, 3)$ por sí solo es homogéneo y no distingue ninguna dirección temporal particular. Bajo transformaciones de Lorentz únicamente, la representación $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ya es irreducible. No se descompone de manera natural en componentes espaciales o temporales de forma invariante bajo Lorentz. Para lograr una descomposición más fina, es necesario seleccionar explícitamente un sistema de referencia o una dirección preferida, lo cual rompe la simetría completa de Lorentz. Sin embargo, elegir una dirección preferida de manera arbitraria carece de sentido físico a menos que dicha dirección provenga de la estructura del grupo subyacente.

El grupo de Poincaré incluye traslaciones. Los generadores de traslación introducen una noción preferida de momento, y por lo tanto una dirección privilegiada asociada al 4-vector de momento P^μ . Una vez fijado un sistema de referencia (dado por el vector de momento), la representación de Lorentz se descompone naturalmente en componentes irreducibles del grupo pequeño (ver sección 9.4):

$$(j_L, j_R) \xrightarrow{\text{grupo pequeño}} \bigoplus_{s=|j_L-j_R|}^{j_L+j_R} s \quad (10.61)$$

En conclusión sabemos que los campos transforman bajo representaciones de dimensión finita (generalmente no unitarias) del grupo de Lorentz, y se clasifican algebraicamente por pares (j_L, j_R) . Sin embargo, una descomposición más fina en estados de espín requiere introducir una dirección de momento (es decir, invocar la simetría de Poincaré). Por el contrario, las partículas transforman bajo representaciones unitarias de dimensión infinitas del grupo completo de Poincaré, y se clasifican directamente mediante dos operadores de Casimir: el cuadrado de la masa y el espín o helicidad. Esta clasificación incorpora automáticamente una elección de autoestado de momento y produce representaciones irreducibles de espín etiquetadas explícitamente por el espín de $SO(3)$ o helicidad en el caso de $ISO(2)$.

Para un campo vectorial masivo, el grupo pequeño es $SO(3)$. Por lo tanto, para un campo A^μ , la componente temporal A^0 se transforma como un escalar bajo rotaciones, mientras que las tres componentes espaciales se transforman como un vector. Esto permite descomponer la representación $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ en

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \longrightarrow 3 \oplus 1. \quad (10.62)$$

Es decir, tenemos tres componentes correspondientes a un campo vectorial masivo, junto con un grado de libertad adicional. Podemos trabajar con el sistema completo o, si queremos describir únicamente el campo vectorial masivo, debemos imponer una condición que elimine el componente extra. No tenemos la libertad de imponer esta condición arbitrariamente: debe surgir de las ecuaciones de movimiento. Recordando que en el sistema de referencia en reposo, dado en (9.47), el cuadrimomento es $p^\mu = (m, 0, 0, 0)$, lo que implica que $A_0 = 0$ es equivalente a la condición $p_\mu A^\mu = 0$. Esta es una condición invariante de Lorentz y, por lo tanto, válida en cualquier sistema de referencia.

En conclusión, para reducir nuestra teoría a un campo puramente vectorial, debe imponerse una ecuación de la forma

$$p_\mu A^\mu = 0, \quad (10.63)$$

o, en el espacio físico,

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (10.64)$$

Un ejemplo estándar es la teoría de Proca

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu, \quad (10.65)$$

con $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. La ecuación de movimiento se obtiene a partir de

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 0, \quad (10.66)$$

donde

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -F^{\mu\nu}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = -m^2 A^\nu. \quad (10.67)$$

Esto implica la ecuación de Proca

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = m^2 A^\nu. \quad (10.68)$$

Ahora bien, como las derivadas conmutan aunque el tensor F es antisimétrico, tenemos

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (10.69)$$

lo que implica, usando la ecuación anterior,

$$m^2 \partial_\nu A^\nu = 0. \quad (10.70)$$

Dado que $m \neq 0$, se deduce inmediatamente que

$$\partial_\nu A^\nu = 0. \quad (10.71)$$

Es decir, esta teoría describe únicamente un campo vectorial masivo, con 3 grados de libertad físicos.

En el caso de una teoría sin masa, la situación es un poco más compleja. En este caso, el grupo pequeño es $ISO(2)$. Para entenderlo, primero debemos analizar el caso de una partícula antes de pasar al de un campo. Como vimos en la Sección 9.4, este grupo posee tres generadores que satisfacen la siguiente álgebra

$$[W_0, W_1] = -EW_2, \quad [W_0, W_2] = EW_1, \quad [W_1, W_2] = 0, \quad (10.72)$$

donde W_0 corresponde a una rotación alrededor del eje de propagación de la partícula con momento $p^\mu = (E, 0, 0, E)$. Definimos los generadores complejos $W_\pm = W_1 \pm iW_2$, lo que da lugar a las relaciones

$$[W_0, W_\pm] = \pm iEW_\pm, \quad [W_+, W_-] = 0. \quad (10.73)$$

Consideramos un estado tal que $W_0|h\rangle = iEh|h\rangle$. Entonces,

$$W_0(W_\pm|h\rangle) = iE(h \pm 1)W_\pm|h\rangle, \quad (10.74)$$

es decir, $W_\pm|h\rangle$ es un nuevo vector propio con valor propio $h \pm 1$. Por lo tanto,

$$W_\pm|h\rangle \propto |h \pm 1\rangle. \quad (10.75)$$

Dado que el operador W_+W_- conmuta con todos los generadores del álgebra, define un

operador de Casimir. Para una representación unitaria e irreducible se cumple

$$W_+ W_- = \rho^2 \mathbf{1}, \quad (10.76)$$

lo que implica

$$W_\pm |h\rangle = \rho |h \pm 1\rangle. \quad (10.77)$$

De forma más general,

$$W_\pm^p |h\rangle = \rho^p |h \pm p\rangle. \quad (10.78)$$

Esta representación es infinita y describe un número infinito de valores de helicidad para la partícula. Por ejemplo, si la partícula tiene helicidad inicial 2, la acción sucesiva de $W_\pm$ genera nuevos estados con helicidades arbitrarias. Este tipo de representación fue denominada **continuous-spin particle**, nombre inadecuado ya que los valores de helicidad no son continuos, pero guardamos el nombre histórico. También se le conoce como **infinite-spin particle**, denominación más adecuada aunque técnicamente se refiere a helicidad y no a espín.

Estas representaciones fueron históricamente descartadas por considerarse no físicas. En particular, se pensaba que era imposible construir una teoría de campos acoplada a la materia que pudiera describir este tipo de sistema. Sin embargo, trabajos recientes sugieren que sí es posible⁴.

La visión estándar es entonces descartar estas partículas, lo que equivale a imponer $\rho = 0$

$$W_1 |\text{cualquier estado}\rangle = 0, \quad W_2 |\text{cualquier estado}\rangle = 0, \quad (10.79)$$

es decir, las dos traslaciones actúan de manera trivial. Ahora bien, considerando nuestro campo A^μ , podemos analizar cómo actúan estas traslaciones sobre el campo. Obtenemos:

$$W_1 W_2 \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} + (A_2 u - A_1 v) p^\mu + (A_0 - A_3) \begin{pmatrix} \frac{u^2+v^2}{2} \\ -v \\ u \\ \frac{u^2+v^2}{2} \end{pmatrix}, \quad (10.80)$$

donde las matrices están dadas en (9.51). Por lo tanto, la acción de las traslaciones

⁴Continuous-spin particle field theory with helicity correspondence, arXiv:1404.0675

es trivial si se cumple $A_0 = A_3$ y $A_1 = A_2 = 0$. Sin embargo, esta condición no es aceptable, ya que nos dejaría con un solo grado de libertad para una partícula sin masa de espín 1.

Observamos que el segundo término es proporcional al momento p^μ , lo cual sugiere que podemos imponer la condición $A_0 = A_3$ y asumir que los campos A^μ y $A^\mu + (A_2 u - A_1 v) p^\mu$ representan el mismo estado físico. Es decir, la acción de W_1 y W_2 es trivial dentro de una clase de equivalencia. Esta es precisamente la **transformación de gauge**: podemos modificar A^μ sin alterar la física, y los generadores W_1 y W_2 actúan como generadores de las transformaciones de gauge. En efecto, la relación de equivalencia

$$A^\mu \sim A^\mu + \lambda p^\mu, \quad \lambda = A_2 u - A_1 v, \quad (10.81)$$

en el espacio de momentos, corresponde en el espacio real a la relación

$$A^\mu(x) \sim A^\mu(x) + \partial_\mu \phi(x). \quad (10.82)$$

10.6. Representación (1, 0): Forma antisimétrica autodual

Recordamos de (6.37) que, para la clasificación de las representaciones irreducibles de $SO(3)$, basta con estudiar la acción sobre tensores simétricos y sin traza. Por lo tanto, la representación (1, 0) vive en el espacio tensorial simétrico de dos espinos izquerdos

$$V^{\alpha\beta} = V^{\beta\alpha}, \quad \alpha, \beta = 1, 2. \quad (10.83)$$

De hecho, la parte antisimétrica es trivial, ya que es proporcional a $\epsilon_{\alpha\beta}$. No existe una parte de traza, ya que en el espacio espinorial no disponemos de una métrica, es decir, de un tensor simétrico que permita subir o bajar los índices. Solo existe el tensor antisimétrico $\epsilon_{\alpha\beta}$.

Este espacio tiene dimensión 3, ya que se trata de dos índices simétricos que toman dos valores:

$$\dim = \frac{2(2+1)}{2} = 3. \quad (10.84)$$

Bajo $A \in SL(2, \mathbb{C})$,

$$V^{\alpha\beta} \mapsto V'^{\alpha\beta} = A^\alpha_\gamma A^\beta_\delta V^{\gamma\delta}. \quad (10.85)$$

Para mapear $V^{\alpha\beta}$ al espacio de tensores de rango 2 en el espacio-tiempo, debemos utilizar σ^μ , pero este tensor posee dos índices de tipo distinto, $\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}}$. Por lo tanto, podemos

definir

$$T^{\mu\nu} = \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^{\mu} \bar{\sigma}^{\nu\dot{\beta}}_{\gamma} V^{\alpha\gamma} \quad (10.86)$$

donde hemos usado que $\bar{\sigma}^{\nu\dot{\beta}}_{\gamma} = \epsilon_{\gamma\delta} \bar{\sigma}^{\nu\dot{\beta}\delta}$. Pero sabemos que

$$\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^{\mu} \bar{\sigma}^{\nu\dot{\beta}}_{\gamma} = 2\eta^{\mu\nu} \epsilon_{\alpha\gamma} + 2i\sigma_{\alpha\gamma}^{\mu\nu} \quad \text{con} \quad \sigma_{\alpha\beta}^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} \left(\sigma_{\alpha\dot{\delta}}^{\mu} \bar{\sigma}^{\nu\dot{\delta}}_{\beta} - \sigma_{\alpha\dot{\delta}}^{\nu} \bar{\sigma}^{\mu\dot{\delta}}_{\beta} \right) \quad (10.87)$$

Se puede demostrar fácilmente; lo verificamos para $\mu = 1, \nu = 2$ y $\alpha = 1, \gamma = 2$. Tenemos, por el lado izquierdo

$$\sigma_{1\dot{\beta}}^1 \bar{\sigma}^{2\dot{\beta}}_2 = \epsilon_{21} \sigma_{1\dot{\beta}}^1 \bar{\sigma}^{2\dot{\beta}1} = -\sigma_{12}^1 \bar{\sigma}^{221} = -\sigma_{12}^1 \epsilon^{2\dot{1}} \epsilon^{12} \sigma_{2\dot{1}}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{1\dot{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}_{2\dot{1}} = i \quad (10.88)$$

Por el lado derecho, obtenemos lo mismo, $\dots$.

Por tanto, (10.86) se escribe

$$T^{\mu\nu} = \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^{\mu} \bar{\sigma}^{\nu\dot{\beta}}_{\gamma} V^{\alpha\gamma} = 2\eta^{\mu\nu} \epsilon_{\alpha\gamma} V^{\alpha\gamma} + 2i\sigma_{\alpha\gamma}^{\mu\nu} V^{\alpha\gamma} = 2i\sigma_{\alpha\gamma}^{\mu\nu} V^{\alpha\gamma} \quad (10.89)$$

En conclusión, definimos el tensor en el espacio de Minkowski construido a partir de la representación $(1, 0)$ como

$$\sigma_{\alpha\gamma}^{\mu\nu} V^{\alpha\gamma} \quad (10.90)$$

Este tensor es automáticamente antisimétrico, pero posee únicamente 3 componentes independientes. Sin embargo, si quisiéramos identificarlo con el tensor electromagnético, deberíamos tener 6 componentes independientes. Para entender esta diferencia, consideramos el tensor electromagnético $F^{\mu\nu}$ y su dual, que definimos como

$$*F^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \quad (10.91)$$

Tenemos $*(F) = -F$, lo que permite definir

$$F_+^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \left(F^{\mu\nu} - i * F^{\mu\nu} \right) \quad (10.92)$$

$$F_-^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \left(F^{\mu\nu} + i * F^{\mu\nu} \right) \quad (10.93)$$

los cuales satisfacen

$$*F_+^{\mu\nu} = iF_+^{\mu\nu}, \quad *F_-^{\mu\nu} = -iF_-^{\mu\nu} \quad (10.94)$$

Son conocidos como el tensor autodual y el tensor anti-autodual. Tenemos finalmente

$$F^{\mu\nu} = F_+^{\mu\nu} + F_-^{\mu\nu} \quad (10.95)$$

Cada uno tiene 3 componentes independientes. Podemos verificar que (10.90) es autodual y, por tanto, corresponde a

$$F_+^{\mu\nu} = \sigma_{\alpha\gamma}^{\mu\nu} V^{\alpha\gamma} \quad (10.96)$$

Si consideramos a $F_+^{\mu\nu}$ como un nuevo campo, no podríamos introducir un término de masa en el lagrangiano, ya que $F_+^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^+ = 0$. Sin embargo, podríamos considerar el término

$$\mathcal{L} = \partial^\mu F_{\mu\nu}^{(+)} \partial_\rho F^{(+)\rho\nu} \quad (10.97)$$

que define lo que podríamos llamar una teoría de espín 1 autodual. Esta teoría posee 3 grados de libertad, en lugar de los 2 del electromagnetismo.

De forma similar, a partir de la representación $(0, 1)$ podemos definir

$$F_-^{\mu\nu} = \bar{\sigma}_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}^{\mu\nu} V^{\dot{\alpha}\dot{\gamma}} \quad (10.98)$$

En conclusión, el tensor de Maxwell puede construirse a partir de la representación

$$(1, 0) \oplus (0, 1) \quad (10.99)$$

Es lo esperado, ya que a partir de la representación $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ podemos definir 4-vectores (A_μ) ; la derivada también transforma como un 4-vector (∂_μ) , y por tanto el producto $(\partial_\mu A_\nu)$

$$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \otimes (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (0, 0) \oplus (1, 0) \oplus (0, 1) \oplus (1, 1) \quad (10.100)$$

corresponde a un escalar, dos tensores antisimétricos y un tensor simétrico sin traza que vamos a estudiar en la próxima sección.

Veamos que a partir de esta construcción, a partir de la derivada de un 4-vector,

construimos naturalmente un tensor antisimétrico es decir que toma la forma

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (10.101)$$

y podemos definir el lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (10.102)$$

El factor es convencional. También se puede considerar el término

$$\mathcal{L} = {}^*F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (10.103)$$

pero este es un término topológico, en el sentido de que constituye una derivada total y, por lo tanto, no afecta las ecuaciones de movimiento. No obstante, eso no implica que no es interesante: se le conoce como el **término de Pontryagin**.

Observamos que el tensor (10.101) posee una simetría adicional. En efecto, la teoría es invariante bajo la transformación

$$A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu \phi, \quad (10.104)$$

conocida como simetría de gauge. Esta simetría no genera una carga conservada, ya que el teorema de Noether se aplica únicamente a simetrías globales. Por ejemplo, una simetría del tipo

$$\Phi \mapsto e^{i\alpha} \Phi \simeq \Phi + i\alpha \Phi \quad (10.105)$$

donde α es constante, sí conduce a una ley de conservación. En nuestro caso, la transformación es local (depende del punto del espacio-tiempo) y no da lugar a una corriente conservada, pero impone una restricción sobre las ecuaciones de movimiento y, por ende, sobre los grados de libertad. Esto permite, en particular, que el campo vectorial conserve solo 2 grados de libertad físicos, en lugar de 3 como lo hemos visto en la sección 10.5

Obviamente, esta simetría puede romperse al introducir un término de masa, lo que conduce al llamado lagrangiano de Proca:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu \quad (10.106)$$

Finalmente, si construimos directamente una teoría basada en la representación $(1, 0) \oplus (0, 1)$, sin hacer referencia a una derivada de un 4-vector, podemos considerar un lagrangiano de la forma

$$\mathcal{L} = \alpha \partial^\mu F_{\mu\nu} \partial_\rho F^{\rho\nu} + \beta \partial_\mu F_{\rho\sigma} \partial^\mu F^{\rho\sigma} + \gamma \partial_\mu F_{\rho\sigma} \partial^\rho F^{\mu\sigma} + m F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (10.107)$$

Por construcción, esta teoría describe un campo de espín 1 representado por el tensor antisimétrico $F_{\mu\nu}$, con hasta 6 grados de libertad, o menos si aparecen restricciones adicionales. Su estructura recuerda a la teoría de Kalb-Ramond⁵.

10.7. Representación $(1, 1)$: Tensor de rango 2 simétrico

El espacio de la representación $(1, 1)$ define objetos con dos índices espinoriales izquierdos y dos derechos:

$$T^{\alpha\beta\dot{\gamma}\dot{\delta}} = T^{\beta\alpha\dot{\gamma}\dot{\delta}}, \quad T^{\alpha\beta\dot{\gamma}\dot{\delta}} = T^{\alpha\beta\dot{\delta}\dot{\gamma}} \quad (10.108)$$

Esto da una dimensión:

$$\dim = \frac{2(2+1)}{2} \times \frac{2(2+1)}{2} = 9. \quad (10.109)$$

De forma similar a los casos previos, podemos construir un tensor de rango 2 usando la base de matrices σ^μ , que conecta los índices espinoriales con los vectoriales

$$h_{\mu\nu} \equiv \sigma_\mu^{\alpha\dot{\gamma}} \sigma_\nu^{\beta\dot{\delta}} T_{\alpha\beta\dot{\gamma}\dot{\delta}} \quad (10.110)$$

Es un tensor simétrico y sin traza ya que

$$\eta^{\mu\nu} \sigma_\mu^{\alpha\dot{\gamma}} \sigma_\nu^{\beta\dot{\delta}} = -2\varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\dot{\gamma}\dot{\delta}} \quad \text{y} \quad \epsilon^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta\dot{\gamma}\dot{\delta}} = \epsilon^{\dot{\gamma}\dot{\delta}} T_{\alpha\beta\dot{\gamma}\dot{\delta}} = 0 \quad (10.111)$$

Este campo posee 9 posibles grados de libertad, por lo que a primera vista no parece describir una partícula de espín 2. Sin embargo, esta cuenta aún no toma en cuenta todas las simetrías del sistema: podemos utilizar la simetría completa del grupo de Poincaré, y no solo la del grupo de Lorentz, para reducir aún más el número de grados de libertad físicos.

En el caso masivo, y considerando el sistema de referencia en reposo $p^\mu = (m, 0, 0, 0)$, el tensor simétrico sin traza $h_{\mu\nu}$ se descompone naturalmente bajo el grupo de rotaciones espaciales $SO(3)$, que corresponde al grupo pequeño (9.47). El campo se transforma

⁵On the duality of massive Kalb-Ramond and Proca fields, arXiv:2109.05030

como

$$h_{\mu\nu} \mapsto R_\mu^\alpha R_\nu^\beta h_{\alpha\beta}, \quad (10.112)$$

lo que implica que bajo una rotación, h_{00} se transforma como un escalar, es decir, como un campo de espín 0 y dimensión 1:

$$h_{00} \mapsto R_0^\alpha R_0^\beta h_{\alpha\beta} = R_0^0 R_0^0 h_{00} = h_{00}. \quad (10.113)$$

De forma análoga, h_{0i} se transforma como un vector:

$$h_{0i} \mapsto R_0^\alpha R_i^\beta h_{\alpha\beta} = R_0^0 R_i^j h_{0j} = R_i^j h_{0j}, \quad (10.114)$$

por lo tanto se comporta como un campo de espín 1 y dimensión 3.

Finalmente, h_{ij} se transforma como un tensor de segundo orden bajo rotaciones:

$$h_{ij} \mapsto R_i^\alpha R_j^\beta h_{\alpha\beta} = R_i^k R_j^l h_{kl}. \quad (10.115)$$

Este objeto posee dimensión 6, pero la condición de traza nula $\eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = 0$ reduce el número de componentes independientes a 5, como se espera para un campo de espín 2. Por lo tanto, bajo la reducción $SO(3)$, la representación $(1, 1)$ se descompone como:

$$(1, 1) \longrightarrow 5 \oplus 3 \oplus 1 \quad (10.116)$$

Si nos interesa únicamente construir una teoría para un campo de espín 2, será necesario construir un lagrangiano que, de manera análoga al caso de espín 1, elimine los grados de libertad adicionales mediante las ecuaciones de movimiento.

En el caso sin masa, al igual que en el caso del campo de espín 1, es necesario invocar la invarianza de gauge. Esta invarianza introduce una redundancia en la teoría que permite eliminar las componentes no físicas. Dicha libertad también tiene su origen en el grupo pequeño, si queremos que las traslaciones actúen trivialmente sobre el campo h .

11. Simetría de gauge

La simetría de gauge es, en muchos aspectos, un fundamento peculiar sobre el cual construir nuestras mejores teorías físicas. No se trata de una propiedad de la Naturaleza, sino de una propiedad de cómo elegimos describirla.

La simetría de gauge representa una redundancia en nuestra descripción del mundo.

Sin embargo, como vimos en el capítulo anterior, esta simetría aparece como consecuencia de la teoría de grupos a través del grupo pequeño. Por supuesto, podríamos trabajar directamente en una teoría con gauge fijado, pero trabajar con una teoría invariante de gauge tiene varias ventajas. En primer lugar, permite construir una teoría manifestamente covariante bajo transformaciones de Lorentz. También es más sencillo construir una teoría en este marco: por ejemplo, resulta mucho más simple formular la teoría de Maxwell en términos del campo A_μ que en términos de los campos eléctricos y magnéticos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$. Además, el principio de covariancia, es decir escribir las leyes físicas de manera que sean independientes del sistema de coordenadas o del marco de referencia, nos lleva a trabajar con tensores. Esto introduce campos con dependencias adicionales, como A_μ , a pesar de que el fotón físico tiene sólo dos helicidadades. Es decir que trabajar de forma covariante y tensorial introduce naturalmente descripciones redundantes, pero lo hacemos porque preserva la claridad y simetría de las leyes físicas. Las redundancias (ya sean elecciones de coordenadas o de gauge) se manejan posteriormente imponiendo condiciones o fijando un gauge. En algunas teorías, como las teorías de gauge no abelianas, que estudiaremos más adelante, puede ser imposible fijar un gauge de forma global debido a obstrucciones topológicas. Este fenómeno se conoce como ambigüedad de Gribov. Por último, la cuantización de teorías de gauge está mucho mejor entendida en el formalismo BRST, en el cual la simetría de gauge se preserva de manera explícita.

11.1. Simetrías globales versus locales

Una *simetría global* es aquella en la que el parámetro de la transformación es constante en el espacio-tiempo. Por ejemplo, la simetría de fase global $U(1)$

$$\Phi(x) \rightarrow e^{i\alpha}\Phi(x), \quad \Phi^\dagger(x) \rightarrow e^{-i\alpha}\Phi^\dagger(x) \quad (11.1)$$

con α constante, deja invariante el lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi^\dagger - V(\Phi^\dagger \Phi) \quad (11.2)$$

donde tomamos que el potencial depende únicamente de $|\Phi|^2 = \Phi^\dagger \Phi$. En particular, esto significa que no permitimos términos en el potencial de la forma $\Phi^2 + \Phi^{\dagger 2}$, los cuales

son reales pero no invariantes bajo (11.1). Esta simetría de fase global conduce a una carga conservada vía el teorema de Noether.

Gauging esta simetría significa promover el parámetro α a una función arbitraria del espacio y del tiempo, es decir, $\alpha \rightarrow \alpha(x)$

$$\Phi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\Phi(x), \quad \Phi^\dagger(x) \rightarrow e^{-i\alpha(x)}\Phi^\dagger(x) \quad (11.3)$$

Ahora la simetría es local: pueden aplicarse transformaciones diferentes en distintos puntos del espacio-tiempo. Esto es lo que se llama una *simetría de gauge*.

Sin embargo, una teoría que era invariante bajo una simetría global no es automáticamente invariante bajo la versión local: los términos con derivadas en el lagrangiano producen términos adicionales cuando α varía con x .

$$\partial_\mu \Phi \rightarrow e^{i\alpha(x)} (\partial_\mu \Phi + i\Phi \partial_\mu \alpha), \quad \partial_\mu \Phi^\dagger \rightarrow e^{-i\alpha(x)} (\partial_\mu \Phi^\dagger - i\Phi^\dagger \partial_\mu \alpha) \quad (11.4)$$

Para mantener la invariancia del lagrangiano, debemos introducir nuevos campos que compensen los cambios locales. En la práctica, por cada generador del grupo de simetría, se introduce un campo de gauge correspondiente (típicamente un campo vectorial) y se modifican las derivadas ordinarias por derivadas covariantes. Estos nuevos campos de gauge transforman de manera específica bajo la simetría local de modo que cancelan los términos problemáticos

$$D_\mu \Phi = (\partial_\mu + ieA_\mu) \Phi \quad (11.5)$$

tal que

$$D_\mu \Phi \rightarrow e^{i\alpha(x)} D_\mu \Phi \quad (11.6)$$

ya que

$$\Phi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\Phi(x), \quad A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha \quad (11.7)$$

Al hacerlo, el lagrangiano se vuelve invariante bajo las transformaciones de gauge por construcción. El resultado de gauging una simetría global es, precisamente, una teoría

de gauge

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - D_\mu\Phi D^\mu\Phi^\dagger - V(\Phi^\dagger\Phi) \quad (11.8)$$

Se ha agregado un término cinético para el campo de gauge con el fin de dotarlo de dinámica. También podemos acoplar estos campos a fuentes externas. En principio, se podría añadir cualquier tipo de acoplamiento, pero si queremos preservar la simetría de gauge, surgen ciertas restricciones. Por ejemplo, podemos añadir un término del tipo

$$A_\mu J^\mu \quad (11.9)$$

donde J^μ representa una corriente asociada a una fuente externa. Bajo la transformación de gauge (11.7), este término se transforma como

$$A_\mu J^\mu \rightarrow A_\mu J^\mu - \frac{1}{e}J^\mu \partial_\mu \alpha \quad (11.10)$$

Si la corriente está conservada, la teoría sigue siendo invariante de gauge, ya que el término adicional se puede escribir como una derivada total:

$$J^\mu \partial_\mu \alpha = \partial_\mu (\alpha J^\mu) \quad (11.11)$$

el cual no contribuye a las ecuaciones de movimiento, es un término de borde.

Observamos que el conmutador de la derivada covariante D_μ define el tensor electromagnético

$$[D_\mu, D_\nu] = ieF_{\mu\nu} \quad (11.12)$$

De hecho

$$[D_\mu, D_\nu] = (\partial_\mu + ieA_\mu)(\partial_\nu + ieA_\nu) - (\partial_\nu + ieA_\nu)(\partial_\mu + ieA_\mu) \quad (11.13)$$

$$= ie\partial_\mu A_\nu - ie\partial_\nu A_\mu = ieF_{\mu\nu} \quad (11.14)$$

11.2. Transformaciones de gauge y simetrías asintóticas

Consideramos el lagrangiano previo

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - D_\mu\Phi D^\mu\Phi^\dagger - V(\Phi^\dagger\Phi) \quad (11.15)$$

Bajo una transformación local

$$\delta\Phi = i\alpha\Phi, \quad \delta A_\mu = -\frac{1}{e}\partial_\mu\alpha, \quad (11.16)$$

la corriente de Noether asociada es

$$J^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\delta\Phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi^\dagger)}\delta\Phi^\dagger + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\delta A_\nu \quad (11.17)$$

$$= i\alpha\left(\Phi^\dagger D^\mu\Phi - \Phi D^\mu\Phi^\dagger\right) + \frac{1}{e}F^{\mu\nu}\partial_\nu\alpha. \quad (11.18)$$

Definimos la corriente de materia

$$j^\mu = i\left(\Phi^\dagger D^\mu\Phi - \Phi D^\mu\Phi^\dagger\right). \quad (11.19)$$

Entonces,

$$J^\mu = \alpha j^\mu + \frac{1}{e}F^{\mu\nu}\partial_\nu\alpha = \frac{1}{e}\partial_\nu(\alpha F^{\mu\nu}) + \alpha\left(j^\mu - \frac{1}{e}\partial_\nu F^{\mu\nu}\right). \quad (11.20)$$

La ecuación de movimiento obtenida al variar respecto de A_μ es

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} + e j^\mu = 0. \quad (11.21)$$

Por lo tanto, *on-shell*, es decir imponiendo las ecuaciones de movimiento,

$$J^\mu = \frac{1}{e}\partial_\nu(\alpha F^{\mu\nu}). \quad (11.22)$$

La carga asociada es

$$Q = \iiint d^3x J^0 = \frac{1}{e}\iiint d^3x \partial_i(\alpha F^{0i}) = \frac{1}{e}\oint\!\!\!\oint \alpha F^{0i} dS_i. \quad (11.23)$$

Si imponemos la condición estándar

$$\lim_{|\mathbf{x}|\rightarrow\infty} \alpha(\mathbf{x}) = 0, \quad (11.24)$$

entonces

$$Q[\alpha] = \frac{1}{e}\oint\!\!\!\oint_{S_\infty} \alpha F^{0i} dS_i = 0. \quad (11.25)$$

Esto significa que estas transformaciones no tienen carga de superficie, son transformaciones de gauge, es decir transformaciones entre configuraciones similares de una teoría,

es decir que pertenecen a una misma órbita de gauge.

En cambio, si ampliamos la clase permitida de parámetros y aceptamos

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \alpha(\mathbf{x}) = c \neq 0, \quad (11.26)$$

entonces

$$Q[\alpha] = c \frac{1}{e} \oint_{S_\infty} F^{0i} dS_i \equiv c Q_{\text{eléctrica}}. \quad (11.27)$$

Esto, *no* se puede tratar como una mera redundancia, porque identificaría configuraciones con distinta carga eléctrica. Por tanto, estas transformaciones actúan como *simetrías asintóticas* (o *transformaciones impropias*) y su carga conservada es la carga eléctrica.

11.3. Teoría de Yang-Mills

La teoría de Yang-Mills es una generalización no abeliana de la electrodinámica, basada en la idea de invariancia de gauge bajo un grupo de Lie. Sea G un grupo de Lie compacto y semisimple, con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y generadores T^a que satisfacen las relaciones de conmutación (4.36)

$$[T_a, T_b] = f_{ab}^c T_c, \quad (11.28)$$

donde f_{ab}^c son las constantes de estructura reales del álgebra. Se supone además que los generadores (en la representación fundamental) están normalizados de forma que

$$\text{Tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2} \delta_{ab}. \quad (11.29)$$

Se introduce un campo de gauge $A_\mu(x)$ que toma valores en el álgebra de Lie:

$$A_\mu(x) = A_\mu^a(x) T^a \quad (11.30)$$

Este campo permite definir una derivada covariante que actúa sobre un campo de materia $\psi(x)$ que transforma en una representación del grupo:

$$D_\mu \psi = (\partial_\mu + g A_\mu) \psi \quad (11.31)$$

con g una constante de acoplamiento que depende de la teoría. Buscamos una transfor-

mación tal que $D'_\mu \psi' = U D_\mu \psi$ cuando $\psi' = U \psi$, con $U = e^{\alpha_i(x)T^i} \in SU(N)$, tenemos

$$D'_\mu \psi' = U D_\mu \psi \quad (11.32)$$

$$\Leftrightarrow \partial_\mu (U \psi) + g A'_\mu U \psi = U (\partial_\mu \psi + g A_\mu \psi) \quad (11.33)$$

$$\Leftrightarrow (\partial_\mu U) \psi + U \partial_\mu \psi + g A'_\mu U \psi = U \partial_\mu \psi + g U A_\mu \psi \quad (11.34)$$

$$\Leftrightarrow A'_\mu U = U A_\mu - \frac{1}{g} (\partial_\mu U) \quad (11.35)$$

es decir

$$A'_\mu = U A_\mu U^{-1} - \frac{1}{g} (\partial_\mu U) U^{-1} \quad (11.36)$$

Para $U(1)$, hay un único generador T con $[T, T] = 0$. Elegimos una representación antihermítica $T = i$ (matriz 1×1). Entonces

$$U = e^{\alpha(x)T} = e^{i\alpha(x)} \quad (11.37)$$

lo que implica

$$A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{g} \partial_\mu (\ln U) = A_\mu - \frac{i}{g} \partial_\mu \alpha \quad (11.38)$$

pero a partir de (11.30), obtenemos $A_\mu = A_\mu^{\text{físico}} i$ es decir

$$A'_\mu{}^{\text{físico}} = A_\mu^{\text{físico}} - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha \quad (11.39)$$

lo que reproduce el resultado (11.7) con $g = e$.

De forma similar a (11.12), el conmutador de derivadas covariantes define el tensor de campo

$$[D_\mu, D_\nu] \psi = g F_{\mu\nu} \psi, \quad (11.40)$$

de donde se deduce que

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g [A_\mu, A_\nu] \quad (11.41)$$

De hecho

$$[D_\mu, D_\nu] = (\partial_\mu + gA_\mu)(\partial_\nu + gA_\nu) - (\partial_\nu + gA_\nu)(\partial_\mu + gA_\mu) \quad (11.42)$$

$$= g\partial_\mu A_\nu - g\partial_\nu A_\mu + g^2 A_\mu A_\nu - g^2 A_\nu A_\mu \equiv gF_{\mu\nu} \quad (11.43)$$

Expresado en componentes, tenemos

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c \quad (11.44)$$

Bajo la transformación del grupo,

$$F_{\mu\nu} \longrightarrow F'_{\mu\nu} = UF_{\mu\nu}U^{-1} \quad (11.45)$$

Se puede verificar directamente a partir de (11.36) y (11.41) o de forma más simple usando (11.40)

$$\begin{aligned} & [D'_\mu, D'_\nu]\psi' = gF'_{\mu\nu}\psi' \\ \Leftrightarrow & gF'_{\mu\nu}\psi' = D'_\mu D'_\nu \psi' - D'_\nu D'_\mu \psi' \\ \Leftrightarrow & gF'_{\mu\nu}U\psi = D'_\mu (UD_\nu \psi) - D'_\nu (UD_\mu \psi) \\ \Leftrightarrow & gF'_{\mu\nu}U\psi = \partial_\mu (UD_\nu \psi) + gA'_\mu UD_\nu \psi - \partial_\nu (UD_\mu \psi) - gA'_\nu UD_\mu \psi \\ \Leftrightarrow & gF'_{\mu\nu}U\psi = \partial_\mu (UD_\nu \psi) + gUA_\mu D_\nu \psi - \partial_\mu UD_\nu \psi - \partial_\nu (UD_\mu \psi) - gUA_\nu D_\mu \psi + \partial_\nu UD_\mu \psi \\ \Leftrightarrow & gF'_{\mu\nu}U\psi = U\partial_\mu (D_\nu \psi) + gUA_\mu D_\nu \psi - U\partial_\nu (D_\mu \psi) - gUA_\nu D_\mu \psi \\ \Leftrightarrow & gF'_{\mu\nu}U\psi = UD_\mu (D_\nu \psi) - UD_\nu (D_\mu \psi) \\ \Leftrightarrow & gF'_{\mu\nu}U\psi = U[D_\mu, D_\nu]\psi \\ \Leftrightarrow & gF'_{\mu\nu}U\psi = gUF_{\mu\nu}\psi \\ \Leftrightarrow & F'_{\mu\nu}U = UF_{\mu\nu} \\ \Leftrightarrow & F'_{\mu\nu} = UF_{\mu\nu}U^{-1} \end{aligned} \quad (11.46)$$

La cantidad escalar e invariante bajo transformaciones de gauge es por lo tanto la traza del cuadrado de $F_{\mu\nu}$, ya que la traza es cíclica. Se define así la densidad lagrangiana clásica

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{2} \text{tr} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \quad (11.47)$$

y la acción correspondiente

$$S_{\text{YM}} = \int d^4x \mathcal{L}_{\text{YM}} \quad (11.48)$$

Nótese que existe en la literatura una reescala $A_\mu \mapsto \frac{1}{g}A_\mu$ la cual transforma las relaciones en

$$D_\mu = \partial_\mu + A_\mu \quad (11.49)$$

$$A'_\mu = U A_\mu U^{-1} - (\partial_\mu U) U^{-1} \quad (11.50)$$

$$[D_\mu, D_\nu] = F_{\mu\nu} \quad (11.51)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \quad (11.52)$$

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{2g^2} \text{tr} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \quad (11.53)$$

11.4. Gravedad no masiva

En la Sección 10.7 obtuvimos un campo de espín 2 que contenía otros posibles grados de libertad. El principio de gauge puede reducir la teoría a únicamente 2 grados de libertad, correspondientes a gravedad sin masa. El campo que consideramos tiene la forma $h_{\mu\nu}$ y debe ser, en principio, sin masa, para ser invariante de gauge. La transformación correspondiente es

$$h_{\mu\nu} \mapsto h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu \quad (11.54)$$

que es una generalización de $A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \alpha$, con un índice adicional y una simetrización. Como veremos, el hecho de que el parámetro de gauge tenga un índice de Lorentz será problemático. De hecho, la representación (1, 1) nos obliga a trabajar con un campo sin traza $h = 0$, lo que implica imponer $\partial_\mu \xi^\mu = 0$, restringiendo la libertad de gauge. Si queremos construir un lagrangiano, debemos listar todos los términos cinéticos posibles:

$$\mathcal{L} = a \partial_\lambda h_{\mu\nu} \partial^\lambda h^{\mu\nu} + b \partial_\lambda h^\lambda{}_\mu \partial_\sigma h^{\sigma\mu} + c \partial_\lambda h^{\lambda\mu} \partial_\mu h + d \partial_\mu h \partial^\mu h \quad (11.55)$$

Cualquier otra combinación puede escribirse en función de estas cuatro mediante integración por partes. Pero en nuestro caso se impone $h = 0$, lo que lleva a

$$\mathcal{L} = a \partial_\lambda h_{\mu\nu} \partial^\lambda h^{\mu\nu} + b \partial_\lambda h^\lambda{}_\mu \partial_\sigma h^{\sigma\mu} \quad (11.56)$$

Este lagrangiano debe ser invariante bajo la transformación

$$h_{\mu\nu} \mapsto h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu, \quad \partial_\mu \xi^\mu = 0 \quad (11.57)$$

lo que implica la transformación del lagrangiano:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &\longmapsto a (\partial_\lambda h_{\mu\nu} - \partial_{\lambda\mu} \xi_\nu - \partial_{\lambda\nu} \xi_\mu) (\partial^\lambda h^{\mu\nu} - \partial^{\lambda\mu} \xi^\nu - \partial^{\lambda\nu} \xi^\mu) \\
&\quad + b (\partial_\lambda h^\lambda{}_\mu - \square \xi_\mu) (\partial_\sigma h^{\sigma\mu} - \square \xi^\mu) \\
&\longmapsto \mathcal{L} + (2a + b) (-2 \partial_\lambda h^\lambda{}_\mu \square \xi^\mu + \square \xi_\mu \square \xi^\mu) + \text{términos de borde}
\end{aligned} \tag{11.58}$$

Esto nos permite deducir que la invariancia se logra si $a = -b/2$. Por simplicidad, tomamos $b = 1$, lo que da

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\lambda h_{\mu\nu} \partial^\lambda h^{\mu\nu} + \partial_\lambda h^\lambda{}_\mu \partial_\sigma h^{\sigma\mu} \tag{11.59}$$

Para separar los grados de libertad, se utiliza el llamado **truco de Stückelberg**. Definimos un nuevo campo con la invariancia completa:

$$h_{\mu\nu} = H_{\mu\nu} - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} H, \quad H = H^\mu{}_\mu \tag{11.60}$$

El nuevo campo $H_{\mu\nu}$ no es sin traza y, por tanto, se transforma como

$$H_{\mu\nu} \longmapsto H_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu \tag{11.61}$$

Consideramos $H \equiv 2\phi$ como un campo independiente, por lo que bajo la transformación se obtiene

$$\phi \longmapsto \phi - \partial_\mu \xi^\mu \tag{11.62}$$

El lagrangiano (11.59) se convierte en

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\lambda H_{\mu\nu} \partial^\lambda H^{\mu\nu} + \partial_\lambda H^\lambda{}_\mu \partial_\sigma H^{\sigma\mu} - \frac{1}{2} \partial_\mu H \partial_\lambda H^{\lambda\mu} + \frac{3}{16} \partial_\mu H \partial^\mu H \tag{11.63}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \partial_\lambda H_{\mu\nu} \partial^\lambda H^{\mu\nu} + \partial_\lambda H^\lambda{}_\mu \partial_\sigma H^{\sigma\mu} - \partial_\mu H \partial_\lambda H^{\lambda\mu} + \frac{1}{2} \partial_\mu H \partial_\lambda H^{\lambda\mu} + \frac{1}{2} \partial_\mu H \partial^\mu H \\
&\quad - \frac{5}{16} \partial_\mu H \partial^\mu H
\end{aligned} \tag{11.64}$$

$$= \mathcal{L}_{\text{RG}} + \frac{1}{2} \partial_\mu H \partial_\lambda H^{\lambda\mu} - \frac{5}{16} \partial_\mu H \partial^\mu H \tag{11.65}$$

$$= \mathcal{L}_{\text{RG}} + \partial_\mu \phi \partial_\lambda H^{\lambda\mu} - \frac{5}{4} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \tag{11.66}$$

donde $\mathcal{L}_{\text{RG}}$ es el lagrangiano de segundo orden de la relatividad general. Por lo tanto, $H_{\mu\nu}$ describe una partícula de espín 2 sin masa acoplada a un campo escalar ϕ , lo que

implica que la teoría tiene 3 grados de libertad en lugar de 2, por el gauge reducido (11.57).

Si queremos reconstruir la relatividad general lineal, no podemos trabajar únicamente con una representación irreducible. Es necesario añadir la traza, lo que equivale a considerar la representación

$$(1, 1) \oplus (0, 0) \quad (11.67)$$

Desde la representación $(1, 1)$ obtenemos un campo simétrico sin traza, denotado por $h_{\mu\nu}^{\text{ST}}$. A este se le puede añadir un escalar h , de la representación $(0, 0)$, que juega el rol de la traza, con lo cual definimos un nuevo campo como la suma de ambos:

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{\text{ST}} + \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}h \quad (11.68)$$

A partir de este campo $h_{\mu\nu}$ podemos construir un lagrangiano invariante bajo la transformación de gauge

$$h_{\mu\nu} \longmapsto h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu \quad (11.69)$$

Lo que nos lleva, a partir de (11.55), al lagrangiano de la relatividad general linealizada

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\lambda h_{\mu\nu}\partial^\lambda h^{\mu\nu} + \partial_\lambda h^\lambda{}_\mu\partial_\sigma h^{\sigma\mu} - \partial_\mu h\partial_\lambda h^{\lambda\mu} + \frac{1}{2}\partial_\lambda h\partial^\lambda h \quad (11.70)$$

11.5. Gravedad masiva

De manera análoga al caso anterior, consideramos la representación

$$(1, 1) \oplus (0, 0), \quad (11.71)$$

y buscamos ahora construir el lagrangiano de gravedad masiva, siguiendo un procedimiento similar al del fotón masivo en la teoría de Proca (10.65). Partiendo de la teoría sin masa (11.70), podemos romper la simetría de gauge mediante la adición de un término de masa. En este caso existen dos posibilidades: h^2 o $h_{\mu\nu}h^{\mu\nu}$. Así, la forma general del lagrangiano es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\lambda h_{\mu\nu}\partial^\lambda h^{\mu\nu} + \partial_\lambda h^\lambda{}_\mu\partial_\sigma h^{\sigma\mu} - \partial_\mu h\partial_\lambda h^{\lambda\mu} + \frac{1}{2}\partial_\lambda h\partial^\lambda h + ah_{\mu\nu}h^{\mu\nu} + bh^2 \quad (11.72)$$

La variación de esta acción respecto de $h^{\mu\nu}$ conduce a $\mathcal{E}_{\mu\nu} = 0$ con

$$\mathcal{E}_{\mu\nu} \equiv \square h_{\mu\nu} - \partial_{\nu\lambda} h^\lambda{}_\mu - \partial_{\mu\lambda} h^\lambda{}_\nu + \partial_{\mu\nu} h + \eta_{\mu\nu} \partial_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta} - \eta_{\mu\nu} \square h + 2a h_{\mu\nu} + 2b \eta_{\mu\nu} h \quad (11.73)$$

Hemos usado la notación $\partial_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \partial_\nu$. Por la identidad de Bianchi, la derivada de los seis primeros términos se anula, lo que puede comprobarse directamente. Esto implica que $\partial_\mu \mathcal{E}^\mu{}_\nu = 0$ conduce a

$$a \partial_\mu h^\mu{}_\nu + b \partial_\nu h = 0 \quad (11.74)$$

y su derivada nos da

$$a \partial_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta} + b \square h = 0 \quad (11.75)$$

Si además consideramos la traza $\eta^{\mu\nu} \mathcal{E}_{\mu\nu} = 0$, se obtiene

$$\square h - \partial_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta} - (a + 4b)h = 0 \quad (11.76)$$

Usando en esta última ecuación el resultado (11.75), llegamos a

$$(a + b) \square h - a(a + 4b)h = 0 \quad (11.77)$$

En resumen, si $a \neq 0$ tenemos el sistema

$$\square h_{\mu\nu} - \partial_{\nu\lambda} h^\lambda{}_\mu - \partial_{\mu\lambda} h^\lambda{}_\nu + \partial_{\mu\nu} h + \eta_{\mu\nu} \partial_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta} - \eta_{\mu\nu} \square h + 2a h_{\mu\nu} + 2b \eta_{\mu\nu} h = 0 \quad (11.78)$$

$$\square h - \frac{a(a + 4b)}{a + b} h = 0 \quad (11.79)$$

$$\partial_\mu h^\mu{}_\nu + \frac{b}{a} \partial_\nu h = 0 \quad (11.80)$$

Aquí, las dos primeras ecuaciones son de onda, mientras que la tercera actúa como cuatro restricciones, reduciendo los modos que se propagan a seis, en lugar de los cinco grados de libertad esperados para gravedad masiva.

Aunque si $a = 0$, se obtiene

$$\square h_{\mu\nu} - \partial_{\nu\lambda} h^\lambda{}_\mu - \partial_{\mu\lambda} h^\lambda{}_\nu + \eta_{\mu\nu} \partial_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta} + 2b \eta_{\mu\nu} h = 0 \quad (11.81)$$

$$\partial_\nu h = 0 \quad (11.82)$$

de modo que h se comporta como una constante cosmológica, por la ecuación $\partial_\nu h = 0$

lo que no describe gravedad masiva. Como consecuencia, la única elección consistente es

$$b = -a \quad (11.83)$$

que reduce (11.77) a $h = 0$, y el sistema se convierte en

$$\square h_{\mu\nu} + 2ah_{\mu\nu} = 0 \quad (11.84)$$

$$\partial_\mu h^\mu{}_\nu = 0 \quad (11.85)$$

$$h = 0 \quad (11.86)$$

Tomando $a = -m^2/2$, estas ecuaciones se reescriben como

$$\left(\square - m^2\right) h_{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\mu h^\mu{}_\nu = 0, \quad h = 0 \quad (11.87)$$

lo que corresponde a 10 componentes de un tensor simétrico masivo sujetas a $4 + 1$ restricciones, dejando 5 grados de libertad, como corresponde a un espín 2 masivo. Esta condición $a = -b$ se conoce como el ajuste de Fierz-Pauli (Fierz-Pauli tuning), y el lagrangiano, de Fierz-Pauli, resultante es

$$\mathcal{L}_{\text{FP}} = -\frac{1}{2}\partial_\lambda h_{\mu\nu}\partial^\lambda h^{\mu\nu} + \partial_\lambda h^\lambda{}_\mu\partial_\sigma h^{\sigma\mu} - \partial_\mu h\partial_\lambda h^{\lambda\mu} + \frac{1}{2}\partial_\lambda h\partial^\lambda h - \frac{m^2}{2}\left(h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} - h^2\right) \quad (11.88)$$

Ruptura de simetría

Un sistema simétrico, descrito por un hamiltoniano, lagrangiano o una acción que permanece invariante bajo una transformación, suele tener una configuración de equilibrio simétrica. Sin embargo, al observar el mundo cotidiano, rara vez encontramos objetos verdaderamente simétricos. La manera en que las cosas logran estar en configuraciones estables que aparentemente eluden las simetrías de las leyes de la naturaleza se explica mediante la teoría de la ruptura espontánea de simetría.

La ruptura espontánea de simetría (SSB: spontaneous symmetry breaking) es el fenómeno en el cual un estado estable de un sistema (por ejemplo, el estado fundamental o un estado de equilibrio térmico) no es simétrico bajo una simetría de su hamiltoniano, lagrangiano o acción.

12. Ruptura espontánea de simetría discreta

12.1. Sistema mecánico unidimensional

Comencemos con un sistema mecánico unidimensional: una partícula de coordenada x sometida a un potencial $V(x)$ par, es decir, invariante bajo la reflexión $x \mapsto -x$. Una forma conveniente para tal potencial es

$$V(x) = \alpha x^4 + \beta x^2, \quad (12.1)$$

donde $\alpha > 0$ asegura la estabilidad, y β puede tomar cualquier signo. La ecuación de movimiento es

$$\ddot{x} = -\frac{dV}{dx} = -4\alpha x^3 - 2\beta x. \quad (12.2)$$

Para $\beta > 0$, el potencial posee un único mínimo en $x = 0$. El estado fundamental $x = 0$ es simétrico, y la reflexión $x \mapsto -x$ deja invariante tanto al potencial como al vacío. El sistema es claramente invariante bajo la reflexión $x \mapsto -x$; se trata de una simetría $\mathbb{Z}_2$. Esta reflexión debe aplicarse también a las condiciones iniciales. La afirmación completa es entonces la siguiente:

La solución única $x(t)$ de la ecuación de movimiento con condiciones iniciales $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$ tiene una imagen reflejada $\tilde{x}(t) = -x(t)$, que también es solución y satisface $\tilde{x}(0) = -x_0$ y $\dot{\tilde{x}}(0) = -v_0$.

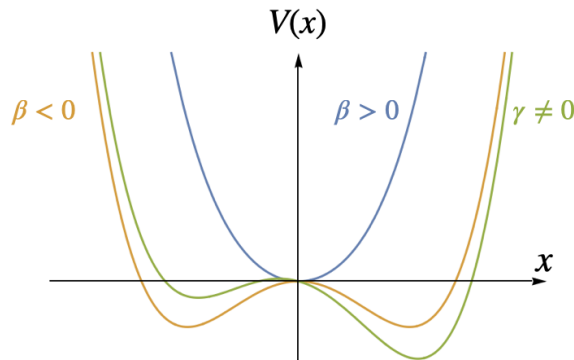
La simetría $\mathbb{Z}_2$ se rompe *explícitamente* si añadimos, por ejemplo, un término lineal al potencial,

$$V_\gamma(x) = V(x) + \gamma x. \quad (12.3)$$

En este caso, V_γ deja de ser par y la propiedad anterior ya no se cumple. Sin embargo, este no es el tipo de ruptura de simetría que nos interesa. En el caso anterior, la simetría se rompe de manera explícita: la teoría deja de ser invariante bajo dicha transformación. Este es un ejemplo bien conocido en mecánica cuántica, como ocurre al añadir un campo magnético externo en el efecto Zeeman, que rompe la simetría esférica del modelo que describe al átomo de hidrógeno.

Nos enfocaremos ahora en teorías que mantienen la simetría en sus ecuaciones, pero cuyo estado fundamental la viola. Ya vimos que el estado fundamental $x = 0$ respeta la simetría; sin embargo, la situación cambia radicalmente cuando $\beta < 0$. En este caso, el origen se convierte en un máximo local y aparecen dos mínimos degenerados en

$$x = \pm x_0, \quad x_0 = \sqrt{\frac{-\beta}{2\alpha}}. \quad (12.4)$$



El potencial adopta entonces la forma de un doble pozo. Sigue siendo simétrico bajo $x \mapsto -x$, pues $V(x) = V(-x)$, pero cada uno de los mínimos por separado rompe esa simetría. Una partícula en reposo en el pozo derecho, en $x = +x_0$, no se transforma en la misma configuración física al reflejarla: es llevada al pozo izquierdo. Las ecuaciones de movimiento conservan la simetría, pero el vacío elegido no. Esta pérdida de simetría en el estado fundamental se denomina **ruptura espontánea de simetría**.

Una vez que la partícula se estabiliza en uno de los dos mínimos, el sistema se comporta como si la simetría no existiera. La elección del vacío resulta de pequeñas fluctuaciones, perturbaciones o condiciones iniciales que seleccionan uno de los mínimos equivalentes. Es importante notar que ningún campo externo rompe la simetría explícitamente; es el propio sistema el que escoge un estado fundamental asimétrico entre las posibilidades degeneradas.

Para estudiar las oscilaciones pequeñas alrededor de uno de los mínimos, escribimos $x = \pm x_0 + \xi$, con $|\xi| \ll x_0$. Al expandir el potencial alrededor de $x = \pm x_0$, se obtiene

$$V(x) \approx V(\pm x_0) + \frac{1}{2}V''(\pm x_0)\xi^2 = V(\pm x_0) + 2|\beta|\xi^2 + \mathcal{O}(\xi^3). \quad (12.5)$$

El movimiento cerca de un mínimo es entonces armónico, con frecuencia angular

$$\omega^2 = 4|\beta|. \quad (12.6)$$

Dado que los dos mínimos son degenerados e independientes, el sistema posee dos vacíos estables equivalentes y las excitaciones pequeñas corresponden a oscilaciones masivas localizadas alrededor del vacío seleccionado.

En mecánica cuántica la situación es más sutil. La partícula puede pasar por efecto túnel a través de la barrera que separa los dos pozos. El verdadero estado fundamental es una superposición simétrica de los dos mínimos clásicos, con una pequeña diferencia de energía entre las combinaciones simétrica y antisimétrica. No obstante, cuando la barrera es alta o en sistemas con muchos grados de libertad, la probabilidad de tener un efecto túnel es exponencialmente suprimida, y el sistema permanece efectivamente localizado en uno de los pozos. La simetría aparece entonces rota en la práctica, aunque el lagrangiano completo es simétrico.

Este ejemplo mecánico captura la esencia de la ruptura espontánea de una simetría discreta: un potencial simétrico con múltiples mínimos degenerados, y la selección de uno de ellos como vacío físico. Este fenómeno aparece en numerosos sistemas físicos.

Un ejemplo importante es el modelo de Ising en mecánica estadística. Cada espín s_i puede tomar los valores $+1$ o -1 , y el Hamiltoniano es invariante bajo la inversión global $s_i \mapsto -s_i$. Por encima de la temperatura crítica, la magnetización promedio se anula y la simetría se conserva. Por debajo de ella, el sistema adquiere una magnetización no nula $M = \pm|M|$, seleccionando una de las dos orientaciones posibles. Las interacciones microscópicas permanecen simétricas, pero la fase macroscópica no.

12.2. Campo escalar real

Podemos ahora generalizar el sistema mecánico a una teoría de campos. Consideremos un campo escalar real $\phi(x)$ en un espacio-tiempo de cuatro dimensiones, con lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi), \quad (12.7)$$

y potencial

$$V(\phi) = \alpha\phi^4 + \beta\phi^2, \quad \alpha > 0. \quad (12.8)$$

El sistema es invariante bajo la transformación discreta $\phi \mapsto -\phi$. Para $\beta > 0$, el potencial tiene un único mínimo en $\phi = 0$ y la simetría se conserva. Para $\beta < 0$, surgen dos mínimos degenerados en

$$\phi = \pm v, \quad v = \sqrt{\frac{-\beta}{2\alpha}}. \quad (12.9)$$

Elegir uno de ellos como vacío rompe espontáneamente la simetría $\mathbb{Z}_2$. Escribiendo $\phi(x) = v + \eta(x)$, con $\eta(x)$ una pequeña fluctuación, la expansión del potencial alrededor de $\phi = v$ da

$$V(\phi) = V(v) + \frac{1}{2}(8\alpha v^2)\eta^2 + \mathcal{O}(\eta^3), \quad (12.10)$$

de modo que el campo η adquiere una masa

$$m^2 = 8\alpha v^2 = -4\beta. \quad (12.11)$$

Las fluctuaciones alrededor de cada mínimo son, por tanto, masivas y describen oscilaciones estables del campo alrededor del vacío escogido.

En sistemas extendidos espacialmente, diferentes regiones pueden elegir vacíos distintos, generando interfaces donde el campo interpola entre $\phi = +v$ y $\phi = -v$. Estas interfaces se denominan *paredes de dominio*. Poseen una energía finita por unidad de área y

desempeñan un papel importante en física de la materia condensada y en cosmología. La existencia de estos defectos topológicos estables es una característica distintiva de la ruptura espontánea de simetrías discretas. Volveremos más adelante sobre estas estructuras.

13. Ruptura espontánea de simetría continua

Pasamos ahora al caso de una simetría continua. El fenómeno es análogo al discreto: el lagrangiano es invariante bajo un grupo continuo de transformaciones, pero el estado fundamental no comparte esa simetría. A diferencia del caso discreto, aquí aparecen consecuencias cualitativamente nuevas, en particular la existencia de excitaciones sin masa conocidas como **modos de Nambu–Goldstone**.

Consideremos un único campo escalar complejo $\phi(x)$ con lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - V(|\phi|), \quad (13.1)$$

y potencial

$$V(|\phi|) = \lambda \left(|\phi|^2 - \frac{v^2}{2} \right)^2, \quad \lambda > 0, \ v > 0. \quad (13.2)$$

Este lagrangiano es invariante bajo la transformación global $U(1)$

$$\phi(x) \longrightarrow e^{i\alpha} \phi(x), \quad \alpha = \text{constante}. \quad (13.3)$$

Los mínimos del potencial satisfacen

$$|\phi| = \frac{v}{\sqrt{2}}. \quad (13.4)$$

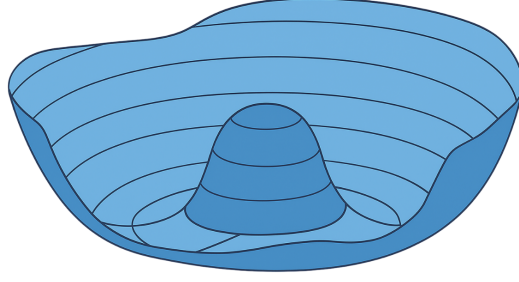
No hay, pues, un único vacío sino un círculo completo de vacíos degenerados en el plano complejo:

$$\phi_0 = \frac{v}{\sqrt{2}} e^{i\theta_0}, \quad 0 \leq \theta_0 < 2\pi, \quad (13.5)$$

todos relacionados entre sí por la simetría $U(1)$. En la práctica debe elegirse un representante; por ejemplo,

$$\phi_0 = \frac{v}{\sqrt{2}} \quad (\theta_0 = 0). \quad (13.6)$$

Esta elección rompe espontáneamente la simetría continua, pues cualquier rotación con $\alpha \neq 0$ mueve el sistema a otro vacío físicamente equivalente. El lagrangiano sigue siendo simétrico; el vacío escogido, no.



Para describir las fluctuaciones alrededor de ese vacío resulta útil la descomposición polar

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [v + \rho(x)] e^{i\theta(x)/v}, \quad (13.7)$$

donde ρ y θ representan, respectivamente, las excitaciones radial y de fase. Al sustituir en $\mathcal{L}$ se obtiene

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu \rho)(\partial^\mu \rho) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\rho}{v}\right)^2 (\partial_\mu \theta)(\partial^\mu \theta) - V(\rho), \quad (13.8)$$

con

$$V(\rho) = \frac{\lambda}{4}\rho^2\left(\rho + 2v\right)^2. \quad (13.9)$$

A orden cuadrático alrededor de $\rho = 0$ queda

$$\mathcal{L}_{\text{cuad}} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu \rho)(\partial^\mu \rho) - \frac{1}{2}(\partial_\mu \theta)(\partial^\mu \theta) - \lambda v^2 \rho^2, \quad (13.10)$$

de donde se lee

$$m_\rho^2 = 2\lambda v^2, \quad m_\theta^2 = 0. \quad (13.11)$$

La fase θ es un modo sin masa que desplaza el sistema a lo largo del círculo de vacíos degenerados: es el modo de Goldstone. La excitación radial ρ es masiva y describe oscilaciones ortogonales a la variedad de vacíos.

En suma, la ruptura espontánea de una simetría continua produce una familia continua de vacíos degenerados y separa el espectro en excitaciones ligeras y pesadas: los modos de Goldstone, que viven tangencialmente a la variedad de vacíos y son sin masa, y el

modo radial, masivo, ortogonal a dicha variedad. Este esquema aparece de manera ubicua en física clásica: en un ferromagneto, por debajo de la temperatura de Curie, la orientación macroscópica de la magnetización selecciona una dirección y rompe $SO(3)$ a $SO(2)$, y las pequeñas rotaciones transversales se propagan como ondas de espín. Por otra parte, un mecanismo similar organiza el espectro en teorías de gauge mediante la adquisición de masa por los campos vectoriales; allí, sin embargo, no se rompe una simetría global física, pues la invariancia local es una redundancia del lenguaje y el fenómeno debe describirse en términos de combinaciones invariantes de gauge.

Antes de pasar al caso de gauge, reformulemos la ruptura espontánea de simetría global en un lenguaje más general.

13.1. Generadores y Hessiana

Consideremos un multiplete real de campos $\phi^i(x)$ que transforman bajo una representación finita R de un grupo interno compacto G . El lagrangiano clásico se toma como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^i - V(\phi), \quad (13.12)$$

donde el potencial es invariante bajo la acción de G ,

$$V(g \cdot \phi) = V(\phi) \quad \forall g \in G. \quad (13.13)$$

Los mínimos del potencial, correspondientes a configuraciones uniformes $\phi(x) = v$, definen los vacíos clásicos de la teoría. Estas configuraciones satisfacen

$$\partial_i V(v) = 0, \quad H_{ij}(v) \equiv \partial_i \partial_j V(v), \quad (13.14)$$

donde $H_{ij}(v)$ es la matriz Hessiana, cuyos autovalores determinan las masas cuadradas de las pequeñas fluctuaciones alrededor del vacío.

El hecho crucial es que la invariancia de V bajo G implica que toda transformación infinitesimal generada por un elemento T^a de la álgebra de Lie deja el potencial invariante. Al derivar $V(e^{\epsilon T^a} \phi) = V(\phi)$ respecto a ϵ se obtiene la identidad fundamental

$$\partial_i V(\phi) (T^a \phi)^i = 0. \quad (13.15)$$

En una configuración de vacío v , el gradiente de V se anula por definición. Si diferenci-

amos nuevamente esta relación con respecto a ϕ^j y evaluamos en $\phi = v$, obtenemos

$$H_{ij}(v) (T^a v)^j = 0. \quad (13.16)$$

Esta sencilla relación encierra la esencia de la ruptura espontánea de simetría: para cada generador T^a tal que $T^a v \neq 0$, el vector $T^a v$ es un autovector nulo de la Hessiana. Dichas direcciones en el espacio de campos son direcciones planas del potencial, y las oscilaciones asociadas serán sin masa en la teoría linealizada.

El conjunto de generadores que dejan invariante el vacío,

$$H = \{ g \in G \mid g \cdot v = v \}, \quad (13.17)$$

forma el subgrupo no roto de G . Su álgebra de Lie, $\mathfrak{h} = \{ X \in \mathfrak{g} \mid X \cdot v = 0 \}$, genera transformaciones que no mueven el vacío. Los generadores restantes, para los cuales $X \cdot v \neq 0$, se denominan rotos. La dimensión de la órbita de v bajo G , equivalente a la dimensión del espacio cociente G/H , da el número de direcciones rotas independientes y, por tanto, el número de autovalores nulos de la Hessiana:

$$N_0 = \dim G - \dim H. \quad (13.18)$$

Para ver cómo se manifiestan concretamente estas ideas, expandamos el campo alrededor de un vacío escogido:

$$\phi(x) = v + \varphi(x). \quad (13.19)$$

Al insertar esta expresión en el Lagrangiano, obtenemos, hasta segundo orden,

$$\mathcal{L}^{(2)} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^i - \frac{1}{2} \varphi^i H_{ij}(v) \varphi^j. \quad (13.20)$$

El término cinético es invariante bajo todo el grupo G , mientras que la matriz de masas está dada precisamente por la Hessiana. Como $H_{ij}(v)$ anula todo vector del tipo $T^a v$ correspondiente a generadores rotos, los campos asociados a esas direcciones son sin masa. Dichos modos son las direcciones de Goldstone del potencial clásico: los vectores tangentes a la órbita $G \cdot v$ en el espacio de campos. Las direcciones ortogonales a la órbita corresponden a curvaturas reales del potencial, y por tanto a excitaciones masivas.

14. Simetrías de gauge rotas espontáneamente

En una teoría de gauge local, las transformaciones de simetría dependen de la posición en el espaciotiempo. La ruptura espontánea de una simetría de este tipo no puede proceder de la misma manera que en una teoría global, porque las transformaciones de gauge relacionan configuraciones físicamente equivalentes. Sin embargo, cuando el sector escalar de una teoría de gauge desarrolla un valor distinto de cero, la estructura del espectro cambia profundamente: los campos de gauge adquieren masa mediante el mecanismo de Englert–Brout–Higgs–Guralnik–Hagen–Kibble (EBHGHK)⁶, mientras que una combinación específica de grados de libertad escalares desaparece del espectro al convertirse en la polarización longitudinal del campo vectorial masivo.

Consideremos una teoría con una simetría local $U(1)$, tal como se construyó en la Sec. 11.3

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - V(|\phi|), \quad (14.1)$$

con $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ y la derivada covariante

$$D_\mu\phi = \partial_\mu\phi + ieA_\mu\phi \quad (14.2)$$

Siguiendo la misma idea que en las secciones anteriores, consideramos un potencial simétrico, por ejemplo

$$V(|\phi|) = \lambda \left(|\phi|^2 - \frac{v^2}{2} \right)^2, \quad \lambda > 0. \quad (14.3)$$

La teoría es invariante bajo transformaciones locales $U(1)$. La cuestión es cómo se comporta esta simetría cuando el campo escalar adquiere un valor distinto de cero. Los mínimos de V ocurren en

$$|\phi| = \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad (14.4)$$

por lo que el campo escalar toma valores sobre un círculo en el plano complejo. A diferencia del caso global, todos los puntos de este círculo son *físicamente equivalentes*, porque transformaciones locales de gauge pueden mover cualquier configuración a cualquier otra sobre dicho círculo. Por lo tanto no existe una familia continua de vacíos

⁶Los 3 artículos fueron enviados (y no publicados) a la revista el 26 de junio de 1964 por François Englert y Robert Brout, el 31 de agosto de 1964 por Peter Higgs y el 12 de octubre de 1964 por Gerald Guralnik, Carl Hagen y Tom Kibble.

físicos distintos; la degeneración es una redundancia de gauge. Es conveniente hacer esto explícito escribiendo

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [v + \rho(x)] e^{i\theta(x)/v}, \quad (14.5)$$

y realizando una transformación de gauge local con parámetro $\alpha(x) = -\theta(x)/v$. En este *gauge unitario*, el campo escalar se vuelve puramente real:

$$\phi(x) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} [v + \rho(x)], \quad (14.6)$$

y el potencial de gauge se transforma como (11.7)

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{ev} \partial_\mu \theta. \quad (14.7)$$

Después de haber fijado el gauge, el campo θ ha sido completamente absorbido por el potencial de gauge. Sustituyendo en el lagrangiano se obtiene

$$\mathcal{L}_{\text{unitary}} = -\frac{1}{4} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial_\mu \rho) (\partial^\mu \rho) - \frac{1}{2} e^2 v^2 A'_\mu A'^\mu - \lambda v^2 \rho^2 - \lambda v \rho^3 - \frac{\lambda}{4} \rho^4. \quad (14.8)$$

El término crucial es la contribución tipo masa para el campo de gauge:

$$\frac{1}{2} e^2 v^2 A'_\mu A'^\mu. \quad (14.9)$$

Esto le confiere al campo de gauge una masa

$$m_A = ev. \quad (14.10)$$

Así, el bosón de gauge adquiere una polarización longitudinal que previamente era cargada por el campo θ , mientras que el escalar restante ρ es una excitación masiva (el campo de Higgs) con

$$m_\rho^2 = 2\lambda v^2. \quad (14.11)$$

El campo de Goldstone θ ha desaparecido del espectro físico: su grado de libertad ha sido convertido en la tercera polarización del vector masivo.

Debemos ser cuidadosos con el significado de las palabras que utilizamos. Aunque a menudo se habla de una *ruptura espontánea de la simetría de gauge*, esta expresión debe entenderse con cuidado. Una simetría de gauge local no es una simetría física del sistema

sino una redundancia en la descripción. Dos configuraciones de campo relacionadas por una transformación local $U(1)$ corresponden al mismo estado físico. En consecuencia, la simetría local nunca se rompe realmente; permanece como una invariancia exacta de las ecuaciones y de la acción. Lo que cambia entre fases es la manera en que esta redundancia se realiza.

Una forma interesante de ver que nuestro resultado es independiente del gauge es describir el problema mediante una variable invariante de gauge. Una cantidad de este tipo es el campo vectorial

$$\mathcal{A}_\mu \equiv A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \arg \phi, \quad (14.12)$$

el cual es invariante bajo

$$\phi \longrightarrow e^{i\alpha(x)} \phi, \quad A_\mu \longrightarrow A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha. \quad (14.13)$$

Tenemos

$$|D_\mu \phi|^2 = \frac{1}{2} (\partial_\mu \rho)^2 + \frac{1}{2} e^2 (v + \rho)^2 \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}^\mu, \quad F_{\mu\nu}(\mathcal{A}) = F_{\mu\nu}(A), \quad (14.14)$$

por lo que el lagrangiano es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial \rho)^2 - \frac{1}{2} e^2 (v + \rho)^2 \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}^\mu - V(\rho), \quad (14.15)$$

con $V(\rho) = \lambda v^2 \rho^2 + \lambda v \rho^3 + \frac{\lambda}{4} \rho^4$. Expandiendo alrededor de $\rho = 0$ se obtiene el término de masa

$$\frac{1}{2} e^2 v^2 \mathcal{A}_\mu^2 \quad (14.16)$$

que muestra explícitamente que el campo $\mathcal{A}_\mu$ ha adquirido una masa $m_A = ev$. Esta es una afirmación física que no depende de ninguna elección de gauge.

En esta forma, la esencia del *mecanismo de Englert–Brout–Higgs–Guralnik–Hagen–Kibble* es transparente:

- La simetría local permanece exacta pero se realiza de una manera que combina la fase escalar θ con el potencial de gauge en el campo vectorial masivo $\mathcal{A}_\mu$.
- El campo de Goldstone θ no es físico, se convierte en parte de $\mathcal{A}_\mu$ y proporciona la polarización longitudinal del bosón vectorial masivo.
- El campo restante ρ es una verdadera excitación escalar, el campo de Higgs, con masa $m_\rho^2 = 2\lambda v^2$.

Por lo tanto, las cantidades invariante de gauge revelan que ninguna simetría de gauge se rompe realmente; más bien, la configuración de vacío redefine qué combinaciones de campos corresponden a excitaciones físicas y observables.

Es importante verificar también que no se pierden grados de libertad. En la configuración simétrica de la teoría, los campos consisten en un potencial de gauge sin masa A_μ y un campo escalar complejo ϕ . Este último representa dos componentes reales, mientras que el campo electromagnético, al ser sin masa, admite sólo dos polarizaciones transversas. En total, el sistema describe cuatro grados de libertad físicos independientes.

Cuando el potencial desarrolla un mínimo en $|\phi| = v/\sqrt{2}$, la configuración del campo alrededor de este punto adquiere una descripción más conveniente en términos de fluctuaciones de su módulo y su fase,

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [v + \rho(x)] e^{i\theta(x)/v}. \quad (14.17)$$

Como la teoría es localmente invariante, la fase θ no representa una variable dinámica genuina: mediante una transformación de gauge se puede absorber en la definición del potencial de gauge,

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{ev} \partial_\mu \theta. \quad (14.18)$$

Decimos que θ ha sido **comido**, y ésta es la razón por la cual A_μ se vuelve masivo. El campo A'_μ contiene ahora una componente longitudinal, y el término correspondiente en el lagrangiano muestra que el campo vectorial se ha vuelto masivo, con masa $m_A = ev$. El campo escalar ρ permanece como una excitación independiente, oscilando alrededor del valor de vacío elegido con masa $m_\rho^2 = 2\lambda v^2$. De este modo, la transición de la configuración simétrica a la configuración rota no altera el número total de grados de libertad. La teoría sigue poseyendo cuatro: tres asociados al campo vectorial masivo A'_μ , sus dos modos transversos más la polarización longitudinal que se origina de la fase absorbida (comida) θ , y uno correspondiente al modo escalar ρ . La interacción local reorganiza así el contenido de campos sin crear ni eliminar grados de libertad, transformando la variable redundante del campo escalar en un componente físico del campo vectorial.

Podemos verlo también a nivel de ecuaciones. Las ecuaciones de Euler–Lagrange son

$$D_\mu D^\mu \phi + 2\lambda \left(|\phi|^2 - \frac{v^2}{2} \right) \phi = 0. \quad (14.19)$$

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = j^\mu, \quad j^\mu \equiv ie(\phi^* D^\mu \phi - \phi (D^\mu \phi)^*). \quad (14.20)$$

Realizando una expansión alrededor de un vacío constante

$$|\phi| = \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [v + \rho(x)] e^{i\theta(x)/v}. \quad (14.21)$$

En la configuración rota tenemos $\rho = 0$ y $\theta = \text{const}$ (vacío uniforme), la derivada covariante se reduce a $D_\mu \phi = \frac{iev}{\sqrt{2}} A'_\mu$, y la corriente se convierte en

$$j^\mu = ie(\phi^* D^\mu \phi - \phi (D^\mu \phi)^*) = e^2 v^2 A'^\mu. \quad (14.22)$$

Por lo tanto (14.20) da la ecuación de Proca

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} + m_A^2 A'^\mu = 0, \quad m_A^2 = e^2 v^2. \quad (14.23)$$

Tomando la divergencia de (14.23) se obtiene

$$m_A^2 \partial_\mu A'^\mu = 0 \implies \partial_\mu A'^\mu = 0, \quad (14.24)$$

la condición de Lorenz (en onda) para un campo de espín-1 masivo. Esto muestra explícitamente cómo la polarización longitudinal se origina de la fase escalar: el campo de Goldstone que hubiera sido masivo en una teoría global ha sido absorbido en A'_μ , suministrando el tercer componente físico requerido por un vector masivo en cuatro dimensiones.

En resumen, la ecuación escalar (14.19) y la ecuación de gauge (14.20) siguen directamente del principio variacional; la expansión alrededor de un vacío constante reorganiza el espectro en un vector masivo descrito por (14.23) y un módulo escalar masivo, con la conservación de la corriente garantizando la condición de consistencia $\partial_\mu A'^\mu = 0$.

En conclusión, el panorama clásico es el siguiente. En la fase simétrica ($v = 0$) el potencial tiene un único mínimo en $\phi = 0$, el campo de gauge es sin masa y el campo escalar tiene una curvatura positiva en el origen. A medida que los parámetros evolucionan (por ejemplo, cuando la temperatura disminuye), la curvatura del potencial en $\phi = 0$ puede volverse negativa, conduciendo a nuevos mínimos en $|\phi| = v/\sqrt{2}$. Elegir uno de ellos define un fondo con $|\phi|$ distinto de cero, lo cual da masa al campo de gauge proporcional a v . La fase del campo escalar deja de ser una excitación independiente; se convierte

en la polarización longitudinal del campo vectorial. La simetría local garantiza que el número de grados de libertad dinámicos permanece inalterado, mientras que el espectro se reorganiza: bosón de gauge sin masa $\rightarrow$ vector masivo, y Goldstone sin masa $\rightarrow$ puro gauge (eliminado); su derivada alimenta el modo longitudinal de A_μ , no una partícula separada.

14.1. Generalización no abeliana

Consideremos ahora el lagrangiano introducido en la sección de las teorías de Yang-Mills (11.3)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - (D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi) - V(\phi^\dagger\phi), \quad D_\mu\phi = (\partial_\mu + gA_\mu)\phi, \quad (14.25)$$

y un potencial invariante bajo el grupo G con un conjunto continuo de mínimos. Elegimos un vacío constante ϕ_0 que minimiza V y definimos la subálgebra no rota $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ por

$$T^a\phi_0 = 0 \quad \text{para todo } T^a \in \mathfrak{h}. \quad (14.26)$$

Los generadores que no aniquilan ϕ_0 forman el complemento roto $\mathfrak{k}$, de modo que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{k}$ como espacio vectorial. Esta descomposición cinemática determina el mecanismo completo.

Para exhibir el contenido de campos cerca del vacío, descomponemos las fluctuaciones escalares en componentes paralelas y transversas a la órbita de grupo a través de ϕ_0 :

$$\phi(x) = U(x)\left(\phi_0 + h(x)\right), \quad U(x) \in G, \quad (14.27)$$

donde h es ortogonal (en espacio de campos) a todas las direcciones $T^i\phi_0$ con $T^i \in \mathfrak{k}$. Infinitesimalmente, $U(x) = \exp\left(\pi^i(x)T^i\right)$ introduce los campos π^i , los Goldstone en una teoría abeliana. Para la derivada covariante se obtiene

$$D_\mu\phi = (\partial_\mu + gA_\mu)\left[U(\phi_0 + h)\right] = U\left[\partial_\mu h + gU^{-1}A_\mu U(\phi_0 + h) + \Omega_\mu(\phi_0 + h)\right], \quad (14.28)$$

donde $\Omega_\mu \equiv U^{-1}\partial_\mu U$ es la forma de Maurer–Cartan, con valores en el álgebra de Lie. El término cinético escalar queda

$$-(D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi) = -(\partial_\mu h)^\dagger(\partial^\mu h) - \left(\phi_0^\dagger + h^\dagger\right)\left(g\mathcal{A}_\mu + \Omega_\mu\right)\left(g\mathcal{A}^\mu + \Omega^\mu\right)\left(\phi_0 + h\right), \quad (14.29)$$

donde $\mathcal{A}_\mu \equiv U^{-1}A_\mu U$. Los términos cuadráticos en $(\mathcal{A}_\mu, \Omega_\mu)$ y de orden cero en $\hbar$ revelan la estructura de masas:

$$\mathcal{L}_{\text{mass}}^{(2)} = -\phi_0^\dagger (g \mathcal{A}_\mu + \Omega_\mu) (g \mathcal{A}^\mu + \Omega^\mu) \phi_0. \quad (14.30)$$

Una transformación de gauge local por U^{-1} fija $\Omega_\mu \rightarrow 0$ y rota $\mathcal{A}_\mu \rightarrow A'_\mu$ (gauge unitario); lo que resulta en

$$\mathcal{L}_{\text{mass}}^{(2)} \Big|_{\text{unitary}} = -g^2 \phi_0^\dagger A'_\mu A'^\mu \phi_0 = -\frac{1}{2} M_{ab}^2 A'^a_\mu A'^{b\mu}, \quad (14.31)$$

$$M_{ab}^2 = 2g^2 (T^a \phi_0)^\dagger (T^b \phi_0). \quad (14.32)$$

Se ve que solo cuando $T^a \phi_0 \neq 0$ aparece un bosón masivo; de lo contrario, el bosón permanece sin masa.

14.2. Higgs en la representación fundamental

Como ejemplo, tomemos $G = SU(2)$ en la representación fundamental. Entonces

$$T^a = \frac{\sigma^a}{2} \quad (14.33)$$

y, puesto que el campo de Higgs toma valores en la representación fundamental, es un doblete. El valor que minimiza el potencial cumple $|\phi| = v/\sqrt{2}$; elegimos

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (14.34)$$

Con

$$T^1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad T^3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (14.35)$$

se obtiene

$$T^1 \phi_0 = \frac{v}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T^2 \phi_0 = -\frac{iv}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T^3 \phi_0 = -\frac{v}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (14.36)$$

Así, terminaremos con tres campos de gauge masivos. De hecho, el término que genera las masas proviene de

$$(D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) \supset g^2 (A_\mu^a T^a \phi_0)^\dagger (A^{\mu b} T^b \phi_0) = g^2 A_\mu^a A^{\mu b} (T^a \phi_0)^\dagger (T^b \phi_0). \quad (14.37)$$

Los productos escalares en la matriz de masas son

$$(T^1\phi_0)^\dagger(T^1\phi_0) = \frac{v^2}{8}, \quad (T^2\phi_0)^\dagger(T^2\phi_0) = \frac{v^2}{8}, \quad (T^3\phi_0)^\dagger(T^3\phi_0) = \frac{v^2}{8}, \quad (14.38)$$

y además las mezclas dan,

$$(T^1\phi_0)^\dagger(T^3\phi_0) = 0, \quad (T^2\phi_0)^\dagger(T^3\phi_0) = 0, \quad (T^1\phi_0)^\dagger(T^2\phi_0) = -i\frac{v^2}{8} \quad (14.39)$$

lo que implica que

$$g^2 A_\mu^1 A^{\mu 2} \left[(T^1\phi_0)^\dagger (T^2\phi_0) + (T^2\phi_0)^\dagger (T^1\phi_0) \right] = g^2 A_\mu^1 A^{\mu 2} \left(-\frac{iv^2}{8} + \frac{iv^2}{8} \right) = 0. \quad (14.40)$$

En consecuencia,

$$\mathcal{L}_{\text{masa}}^{(2)} = -g^2 \frac{v^2}{8} (A_\mu^1 A^{1\mu} + A_\mu^2 A^{2\mu} + A_\mu^3 A^{3\mu}), \quad (14.41)$$

esto es, los tres bosones de gauge adquieren la misma masa

$$m_W^2 = m_1^2 = m_2^2 = m_3^2 = \frac{g^2 v^2}{4}. \quad (14.42)$$

Este resultado muestra que, con un *doblete fundamental* de $SU(2)$, la simetría de gauge se rompe *por completo*.

Nota que la redundancia de gauge nunca se rompe realmente; lo que "se rompe" es la invariancia del vacío. Aquí el estabilizador H es trivial, por lo que se dice que el grupo de gauge está completamente roto (no queda simetría de gauge residual).

Se puede decir de otra forma, el subgrupo estabilizador de ϕ_0 es trivial. En efecto, con una matriz genérica de $SU(2)$

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad (14.43)$$

se tiene

$$g\phi_0 = \begin{pmatrix} bv/\sqrt{2} \\ a^*v/\sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (14.44)$$

Para que $g\phi_0 = \phi_0$ necesitamos $b = 0$ y $a^* = 1 \Rightarrow g = I$. El estabilizador es entonces trivial, equivalente a decir que la subálgebra estabilizadora es nula: el único generador con $T^a\phi_0 = 0$ es 0.

14.3. Higgs en la representación adjunta

Para contrastar con el caso en que sí queda un subgrupo no roto, repetimos el cálculo en la representación adjunta. Como ya se vio, la adjunta es la acción de G sobre $\mathfrak{g}$ por conjugación:

$$\text{Ad}_g(X) = g X g^{-1}, \quad g \in G, X \in \mathfrak{g}, \quad (14.45)$$

lo que da un elemento del álgebra. Por tanto, cuando el campo toma valores en el espacio de la representación, en este caso el campo toma valores en el álgebra.

Recordemos que bajo $SU(N)$,

$$F_{\mu\nu} \rightarrow U F_{\mu\nu} U^{-1} \quad (14.46)$$

y, por ende, transforma en la representación adjunta. Pero eso no implica una elección de representación para el campo de Higgs, Φ . El campo de Higgs puede elegirse en cualquier representación; la elección la guían el patrón de ruptura deseado y la fenomenología. Para un $SU(2)$ puro, un campo de Higgs que toma valores en la representación fundamental (doblete) con valor no nulo rompe $SU(2)$ por completo, como vimos: los tres campos de gauge se vuelven masivos. Si, en cambio, Φ es un triplete, es decir que toma valores en la representación adjunta, o de forma equivalente en el álgebra, un valor no nulo rompe $SU(2) \rightarrow U(1)$, dando dos vectores masivos y uno sin masa. Más en general, para $SU(N)$ un fundamental no nulo rompe $SU(N) \rightarrow SU(N-1)$.

De forma explícita, para $SU(2)$, con un *triplete adjunto* $\Phi = \Phi^a T^a$ (llamada la representación **3**). Tomamos

$$\Phi_0^a = v \delta^{a3} \quad (\text{vacío en la dirección } T^3), \quad (14.47)$$

Los generadores son

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (14.48)$$

lo que implica

$$T_1\Phi_0 = -iv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T_2\Phi_0 = iv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T_3\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (14.49)$$

Sabemos entonces que habrá 2 bosones de gauge masivos y uno sin masa; quedará un $U(1)$ en la dirección T_3 . Para verificarlo, consideramos el gauge unitario, $\Phi^a = (v+H)\delta^{a3}$, el lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{2}(D_\mu\Phi)^a (D^\mu\Phi)^a - V(\Phi^a\Phi^a) \quad (14.50)$$

pasa a

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial H)^2 - \frac{1}{2}g^2(v+H)^2 \left[(A_\mu^1)^2 + (A_\mu^2)^2 \right] - V((v+H)^2) \quad (14.51)$$

Notar que $(D_\mu\Phi)^a (D^\mu\Phi)^a$ lleva un factor 1/2 porque es un triplete real, no complejo.

Este lagrangiano (14.51) es invariante bajo $U(1)$ en la dirección T^3 . En efecto, bajo $U(x) = e^{\theta(x)T^3}$,

$$UT^1U^{-1} = \cos\theta T^1 + \sin\theta T^2, \quad (14.52)$$

$$UT^2U^{-1} = -\sin\theta T^1 + \cos\theta T^2, \quad (14.53)$$

$$UT^3U^{-1} = T^3. \quad (14.54)$$

Por tanto,

$$UA_\mu U^{-1} = (\cos\theta A_\mu^1 + \sin\theta A_\mu^2) T^1 + (-\sin\theta A_\mu^1 + \cos\theta A_\mu^2) T^2 + A_\mu^3 T^3. \quad (14.55)$$

y

$$-\frac{1}{g}(\partial_\mu U)U^{-1} = -\frac{1}{g}(\partial_\mu\theta)T^3 \quad (14.56)$$

lo que significa a partir de (11.36)

$$A_\mu'^1 = \cos\theta A_\mu^1 + \sin\theta A_\mu^2, \quad (14.57)$$

$$A_\mu'^2 = -\sin\theta A_\mu^1 + \cos\theta A_\mu^2, \quad (14.58)$$

$$A_\mu'^3 = A_\mu^3 - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta. \quad (14.59)$$

o, equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} A_\mu^1 \\ A_\mu^2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\mu^1 \\ A_\mu^2 \end{pmatrix}, \quad A_\mu^{3'} = A_\mu^3 - \frac{1}{g} \partial_\mu \theta \quad (14.60)$$

El lagrangiano (14.51) es claramente invariante bajo esta transformación; es decir que el gauge residual es $U(1)$.

Para concluir, se confirma desde (14.51) que dos campos de gauge son masivos y uno no:

$$m_1^2 = m_2^2 = g^2 v^2, \quad m_3^2 = 0. \quad (14.61)$$

Se puede notar que podemos diagonalizar la transformación (14.60), definiendo

$$W_\mu^\pm = \frac{A_\mu^1 \mp i A_\mu^2}{\sqrt{2}} \quad (14.62)$$

de modo que (14.60) se escribe

$$W_\mu^\pm \rightarrow e^{\pm i\theta} W_\mu^\pm \quad (14.63)$$

conocidos como los campos de gauge W^+ y W^- en la interacción electrodébil⁷.

En resumen, la ruptura espontánea en una teoría de gauge reorganiza, no destruye, la invariancia local. El escalar adquiere un valor clásico no nulo que define el vacío; las direcciones de fase son absorbidas por los potenciales de gauge, que se convierten en campos vectoriales masivos. El sistema resultante contiene únicamente modos masivos y sin masa invariantes de gauge, con el mismo número total de grados de libertad que antes. Este mecanismo, puramente clásico en su formulación, es la base de la generación de masas en las teorías de campos gauge. Sin embargo, es importante notar que la representación en la cual el campo de Higgs toma sus valores esta decidido por la fenomenología.

⁷No hemos considerado el grupo $SU(2) \times U(1)$ de la teoría electrodébil que es diferente de $SU(2)$ puro.

Solitones

Hasta ahora nos hemos limitado a estudiar pequeñas desviaciones de los campos en torno al estado fundamental (el vacío clásico) y nos hemos interesado principalmente por el espectro de masas. En teoría cuántica de campos, estas excitaciones se interpretan como partículas puntuales. A partir de aquí, y en los capítulos siguientes, nos ocuparemos de los solitones: soluciones de las ecuaciones clásicas de campo que, incluso antes de cuantizarlas, se comportan ya como partículas. Son configuraciones de campo localizadas, y por tanto de energía finita y tamaño característico acotado, en las que los campos decrecen rápidamente desde una región central hacia el infinito. Su existencia y estabilidad se deben, ante todo, a la no linealidad de las ecuaciones de campo. Aunque en física de partículas su papel es más bien limitado, en física de la materia condensada aparecen con mucha frecuencia.

15. Los solitones topológicos más simples

15.1. El kink y el antikink

El objeto topológico más simple (la topología se definirá más adelante), el kink, aparece en la teoría de un solo campo escalar real en un espacio-tiempo bidimensional. La acción del modelo se elige de la forma

$$S = \int d^2x \left[-\frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - V(\varphi) \right] \quad (15.1)$$

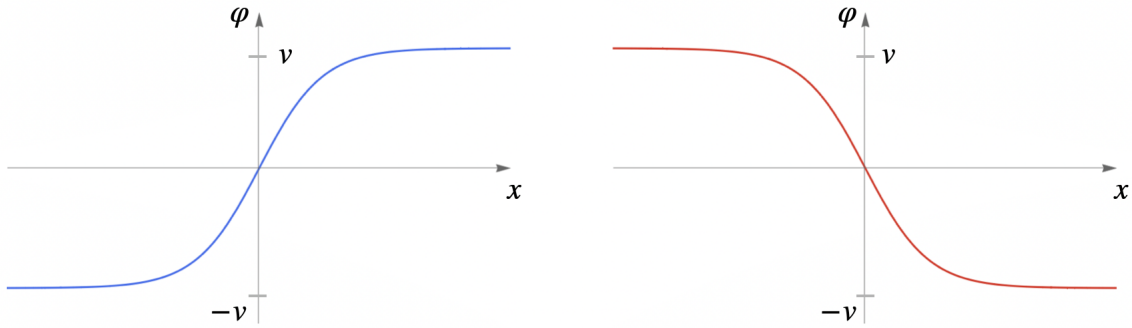
donde $\mu = 0, 1$, y

$$V(\varphi) = \frac{\lambda}{4}(\varphi^2 - v^2)^2 \quad (15.2)$$

Como vimos en el capítulo anterior, la acción es invariante bajo la transformación discreta $\varphi \rightarrow -\varphi$. Sin embargo, esta simetría está rota espontáneamente, ya que los vacíos clásicos son

$$\varphi_0 = \pm v \quad (15.3)$$

Un kink es una solución estática de las ecuaciones de campo, $\varphi_{\text{kink}}(x)$, que interpola entre el vacío $\varphi = -v$ y el vacío $\varphi = +v$ cuando x varía desde $-\infty$ hasta $+\infty$ aunque el antikink relaciona $\varphi = +v$ a $\varphi = -v$ cuando x varía desde $-\infty$ hasta $+\infty$.



El hecho de que configuraciones similares a la de la figura puedan tener energía finita se ve a partir de la expresión para la energía estática i.e. para campos independientes del tiempo. A partir de la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - V(\varphi) = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}\varphi'^2 - V(\varphi) \quad (15.4)$$

donde $\dot{}$ indica derivada temporal y $'$ derivada espacial, obtenemos el momento conjugado

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi} \quad (15.5)$$

y con esto la densidad hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\varphi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\varphi'^2 + V(\varphi) \quad (15.6)$$

En el régimen estático resulta

$$E = \int dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + \frac{\lambda}{4} (\varphi^2 - v^2)^2 \right] \quad (15.7)$$

Cuando $x \rightarrow \pm\infty$, ambos términos del integrando decrecen; si lo hacen suficientemente rápido, la energía es finita. Por lo tanto, una condición necesaria es que, asintóticamente, el campo tome el valor $\varphi = \pm v$, tal como se muestra en las figuras. Busquemos ahora una solución estática que satisfaga estas condiciones, es decir, que produzca una energía finita.

Las ecuaciones de movimiento se obtienen variando la acción,

$$\square\varphi - V'(\varphi) = 0 \quad (15.8)$$

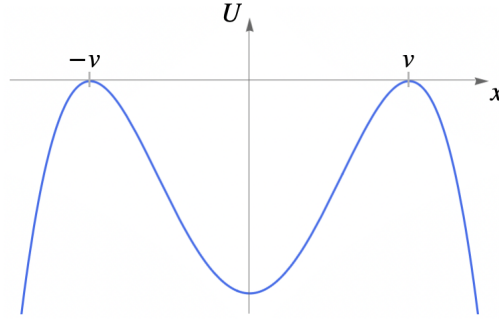
Pero como $\dot{\varphi} = 0$, la ecuación de campo se reduce a

$$\varphi''(x) - V'(\varphi) = 0 \quad (15.9)$$

Antes de escribir la solución explícita, notemos una analogía útil. Formalmente, esta ecuación tiene la forma de la ley de Newton para una partícula con coordenada φ , moviéndose en el “tiempo” x en el potencial $U(\varphi) = -V(\varphi)$, es decir

$$\ddot{x} = -U'(x) \quad (15.10)$$

El potencial U tiene la forma:



La solución $\varphi_{\text{kink}}(x)$ corresponde a una trayectoria que comienza en el pasado infinito en $\varphi = -v$ y termina en el futuro infinito en $\varphi = +v$. Esta trayectoria requiere, efectivamente, un tiempo infinito si la energía de la partícula es cero, la velocidad se anula cerca de cada barrera, son puntos de retorno. Esta partícula de energía nula debe, por lo tanto, tener su energía cinética más energía potencial nula.

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + U(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\varphi'^2 - V(\varphi) = 0 \quad (15.11)$$

Esta ecuación se puede obtener de otra forma. De hecho, la primera integral de la

ecuación (15.9) es

$$\frac{1}{2} \varphi'^2 - V(\varphi) = \varepsilon_0 \quad (15.12)$$

con ε_0 una constante de integración. Para el kink, $\varphi' \rightarrow 0$ y $V(\varphi) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$, por lo que $\varepsilon_0 = 0$. Esto implica la ec. (15.11)

$$\frac{d\varphi}{dx} = +\sqrt{2V} = \sqrt{\frac{\lambda}{2}} (v^2 - \varphi^2) \quad (15.13)$$

donde elegimos el signo positivo para describir el paso desde $\varphi = -v$ hacia $\varphi = +v$. El otro signo describe el antikink. De aquí se obtiene

$$\varphi_{\text{kink}}(x) = v \tanh\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}} v (x - x_0)\right) \quad (15.14)$$

donde x_0 es la posición del centro del kink. Para $x_0 = 0$ obtenemos

$$\varphi_{\text{kink}}(x) = v \tanh\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}} v x\right) \quad (15.15)$$

que es simétrico bajo $\varphi \rightarrow -\varphi$ y $x \rightarrow -x$. De forma similar, el antikink es

$$\varphi_{\text{antikink}}(x) = -v \tanh\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}} v x\right) \quad (15.16)$$

15.2. Propiedades del kink

Discutiremos ahora ciertas propiedades de esta solución que, de hecho, son de naturaleza muy general.

15.2.1. Tamaño del kink

A partir de (15.15) obtenemos que el kink es del orden de

$$r_{\text{kink}} \sim \frac{1}{\sqrt{\lambda} v} \sim m^{-1} \quad (15.17)$$

donde la masa de una excitación elemental está definida por

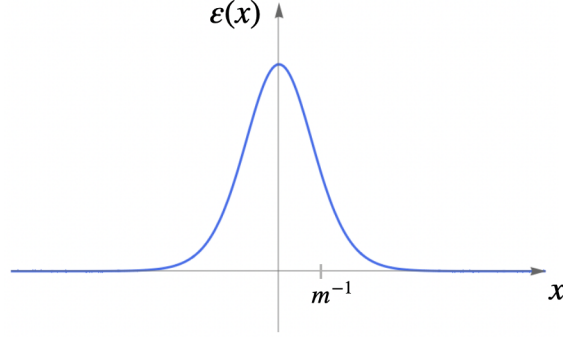
$$m^2 = V''(\varphi = \pm v) = 2\lambda v^2, \quad (15.18)$$

es decir, del orden de la longitud de Compton de la excitación elemental. En efecto, la

solución (15.15) difiere del valor de vacío solo en una región cuyo tamaño es del orden de r_{kink} . En otras palabras, la densidad de energía del kink

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{2} (\varphi'_{\text{kink}})^2 + V(\varphi_{\text{kink}}) = \frac{\lambda}{2} v^4 \frac{1}{\cosh^4\left(\frac{m}{2}x\right)} \quad (15.19)$$

es significativamente distinta de cero solo en la región $|x| \lesssim r_{\text{kink}}$.



15.2.2. Kink como un objeto clásico

La energía estática del kink es igual a

$$E_{\text{kink}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \varepsilon(x) = \frac{2}{3} m v^2 \quad (15.20)$$

Pero, la energía estática del kink puede identificarse con la masa de esta excitación clásica con aspecto de partícula; por tanto,

$$M_{\text{kink}} = E_{\text{kink}} = \frac{2}{3} m v^2 \quad (15.21)$$

Es importante notar que el tamaño del kink debe ser mucho mayor que su longitud de Compton $\lambda = 1/M_{\text{kink}}$. En efecto,

$$\frac{r_{\text{kink}}}{\lambda_{\text{kink}}} \sim \frac{M_{\text{kink}}}{m} \sim v^2, \quad (15.22)$$

de modo que eligiendo $v \gg 1$, el tamaño clásico del kink es mucho mayor que su tamaño cuántico; es decir que el kink será esencialmente un objeto clásico.

15.2.3. Kink en movimiento

La solución (15.15) no es invariante bajo traslaciones espaciales ni transformaciones de Lorentz pero el lagrangiano es invariante. Por lo tanto, tales transformaciones deben

llevar una solución de las ecuaciones de campo a otra solución. Al aplicarlas se obtiene la familia de soluciones

$$\varphi_{\text{kink}}(t, x - x_0; u) = v \tanh\left(\frac{m}{2} \frac{(x - x_0) - ut}{\sqrt{1 - u^2}}\right) \quad (15.23)$$

que describe kinks en movimiento. El parámetro u representa físicamente la velocidad del solitón; x_0 es la posición del centro del kink en el instante $t = 0$.

15.3. Cota de Bogomolny

Mediante una serie de manipulaciones simples es posible derivar una cota inferior para la energía E de cualquier configuración de campo en términos de datos topológicos, es decir que la cota depende únicamente de los valores del campo en el infinito espacial. La desigualdad clave es simplemente

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi' \pm \sqrt{V(\varphi)}\right)^2 \geq 0. \quad (15.24)$$

Expandiendo esta desigualdad e integrando en el espacio obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\varphi'^2 + V(\varphi)\right) dx \geq \mp \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2V(\varphi)} \varphi' dx. \quad (15.25)$$

Por lo tanto, para campos estáticos,

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\varphi'^2 + V(\varphi)\right) dx \geq \left| \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2V(\varphi)} \varphi' dx \right| = \left| \int_{\varphi_-}^{\varphi_+} \sqrt{2V(\varphi)} d\varphi \right|. \quad (15.26)$$

Como $V(\varphi) \geq 0$, podemos introducir un superpotencial $W(\varphi)$ tal que

$$V(\varphi) = \frac{1}{2} \left(\frac{dW}{d\varphi}\right)^2, \quad (15.27)$$

y entonces el término del lado derecho se integra, dando la cota en la forma

$$E \geq |W(\varphi_+) - W(\varphi_-)|. \quad (15.28)$$

Esta observación se debe a Bogomolny, y las cotas de esta clase, donde la energía está acotada inferiormente únicamente por datos asintóticos (o topológicos), se conocen como **cotas de Bogomolny**.

El solitón es la configuración que satura la desigualdad, es decir, la que posee la energía mínima. Según (15.24), esto implica que

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi' \pm \sqrt{V(\varphi)}\right)^2 = 0, \quad (15.29)$$

lo que reproduce directamente (15.11).

15.4. Estabilidad

Consideremos ahora la estabilidad de la solución (15.15) bajo pequeñas perturbaciones, conocida como estabilidad de Lyapunov. Sea $\varphi_{\text{kink}}(x)$ una solución estática de las ecuaciones de campo y consideremos pequeñas perturbaciones $\delta\varphi(t, x)$ alrededor de ella, de modo que el campo original tenga la forma

$$\varphi(t, x) = \varphi_{\text{kink}}(x) + \delta\varphi(t, x). \quad (15.30)$$

El campo $\varphi(t, x)$ debe satisfacer las ecuaciones clásicas (15.8)

$$\square\varphi - V'(\varphi) = 0, \quad (15.31)$$

es decir,

$$\square(\varphi_{\text{kink}} + \delta\varphi) - V'(\varphi_{\text{kink}}) - V''(\varphi_{\text{kink}})\delta\varphi + \cdots = 0, \quad (15.32)$$

donde los puntos representan términos de orden superior en $\delta\varphi(t, x)$, y las derivadas del potencial se evalúan en $\varphi = \varphi_{\text{kink}}$, que depende explícitamente de x . A primer orden en $\delta\varphi$ obtenemos

$$\square\delta\varphi - V''(\varphi_{\text{kink}})\delta\varphi = 0. \quad (15.33)$$

En particular, para perturbaciones alrededor del kink (15.15), se tiene

$$V''(\varphi_{\text{kink}}) = \frac{1}{2}m^2 \left[3 \tanh^2\left(\frac{m}{2}x\right) - 1 \right]. \quad (15.34)$$

Dado que en el caso general $V''(\varphi_{\text{kink}})$ depende sólo de x , se pueden separar variables y buscar soluciones de la forma

$$\delta\varphi(t, x) = e^{i\omega t} \delta\varphi_{\omega}(x), \quad (15.35)$$

donde $\delta\varphi_\omega(x)$ satisface

$$-\delta\varphi_\omega'' + U(x)\delta\varphi_\omega = \omega^2\delta\varphi_\omega, \quad (15.36)$$

con

$$U(x) = V''(\varphi_{\text{kink}}). \quad (15.37)$$

La ecuación (15.36) es una ecuación de autovalores para ω^2 que coincide con la ecuación estacionaria de Schrödinger en el potencial $U(x)$. Toda solución de (15.33) es una combinación lineal de soluciones de (15.36).

Para las funciones $\delta\varphi_\omega(x)$ exigimos suavidad y que no crezcan cuando $|x| \rightarrow \infty$, de modo que el campo permanezca acotado. Por tanto, el problema de estabilidad de la solución estática $\varphi_{\text{kink}}(x)$ se reduce al problema de existencia o no de autovalores negativos del operador

$$-\frac{d^2}{dx^2} + U(x). \quad (15.38)$$

Si no existen autovalores negativos, entonces todos los ω son reales y las perturbaciones (15.35) no crecen en el tiempo; oscilan ($\omega^2 > 0$) o bien no dependen del tiempo ($\omega = 0$). En este caso, la solución es estable. Si existe al menos un autovalor negativo, $\omega^2 = -\Omega^2$, entonces las perturbaciones crecen exponencialmente:

$$\delta\varphi \sim e^{\Omega t}, \quad (15.39)$$

es decir, la perturbación se separa exponencialmente de la solución φ_{kink} y la solución es inestable.

Observemos que el operador (15.38) con potencial (15.37) siempre posee un autovalor nulo, y la autofunción (modo cero) es

$$\delta\varphi_0(x) = \frac{\partial\varphi_{\text{kink}}(x)}{\partial x}. \quad (15.40)$$

En efecto, $\varphi_{\text{kink}}(x)$ satisface

$$-\varphi_{\text{kink}}'' + V'(\varphi_{\text{kink}}) = 0. \quad (15.41)$$

Derivando con respecto a x obtenemos

$$-(\varphi'_{\text{kink}})'' + V''(\varphi_{\text{kink}}) \varphi'_{\text{kink}} = 0, \quad (15.42)$$

lo que prueba que (15.40) satisface (15.36) con $\omega = 0$. Como $\varphi_{\text{kink}}(x)$ tiende a una constante cuando $|x| \rightarrow \infty$, su derivada decrece, por lo que (15.40) está acotada y cumple las condiciones requeridas.

La existencia de este modo está relacionada con la ruptura de la invariancia traslacional del espacio.

En efecto, $\varphi_{\text{kink}}(x + a)$ es también una solución estática, pero no coincide con $\varphi_{\text{kink}}(x)$. Para a pequeño podemos escribir

$$\varphi_{\text{kink}}(x + a) \simeq \varphi_{\text{kink}}(x) + a \delta\varphi_0(x), \quad (15.43)$$

donde $a \delta\varphi_0(x)$ es una desviación pequeña. Como $\varphi_{\text{kink}}(x + a)$ satisface las ecuaciones de campo, la desviación $a \delta\varphi_0(x)$ satisface la ecuación linealizada; no depende del tiempo, decrece en el infinito y es por tanto un modo cero.

Si el número de dimensiones espaciales d es mayor que uno, existen d modos cero traslacionales. En el caso de considerar más dimensiones, la solución clásica puede romper también la simetría rotacional, produciendo modos cero rotacionales. Finalmente, en modelos con simetría interna global, las soluciones pueden romper también esa simetría interna, generando los correspondientes modos cero.

Volvamos ahora a la discusión sobre la estabilidad del kink. El espectro del operador (15.36) con $U(x) = V''(\varphi_{\text{kink}})$ dado por (15.34) puede encontrarse de forma explícita; dicho espectro no contiene autovalores negativos. Por lo tanto, podemos concluir que el kink es estable bajo pequeñas perturbaciones del campo. En efecto, aparte del modo cero, tenemos el modo de forma (shape mode):

$$\omega_1^2 = \frac{3}{4}m^2, \quad \delta\varphi_1(x) = \mathcal{N}_1 \operatorname{sech}\left(\frac{mx}{2}\right) \tanh\left(\frac{mx}{2}\right), \quad (15.44)$$

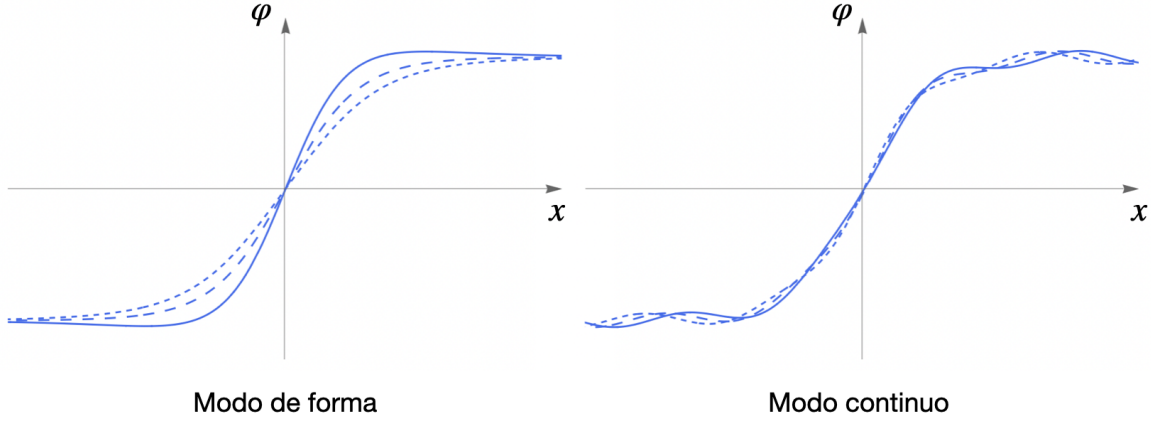
y los demás modos forman un continuo:

$$\omega^2 \geq m^2, \quad \omega^2 = m^2 \left(1 + \frac{k^2}{4}\right), \quad k \in \mathbb{R}, \quad (15.45)$$

$$\delta\varphi_k(x) = \mathcal{N}_k \frac{2 - k^2 - 3 \operatorname{sech}^2(mx/2) - 3ik \tanh(mx/2)}{(k+i)(k+2i)} e^{ikmx/2}, \quad (15.46)$$

donde $\mathcal{N}_k$ es un factor de normalización.

El modo cero desplaza rígidamente el kink de su posición original. El modo de forma es una oscilación que deforma el perfil sin trasladarlo ni cambiar su carga topológica. Los modos del continuo son ondas planas asintóticamente. Excitar estos modos hace que el kink emita o absorba ondas lineales; el flujo emitido transporta energía-momento, de modo que el kink puede retroceder y perder energía lentamente si la no linealidad alimenta el continuo. Pero para el kink de la teoría ϕ^4 el potencial es libre de reflexión: una onda plana se transmite completamente con un desfase; el kink experimenta un impulso finito pero no queda ninguna cola reflejada.



15.5. Aspecto topológico

Discutamos ahora en qué sentido el kink es un solitón topológico. Para ello consideremos configuraciones de campo $\varphi(x)$ con energía finita. Para que la energía sea finita, exigimos en particular que, cuando $x \rightarrow +\infty$, el campo tienda a uno de los vacíos $+v$ o $-v$; lo mismo debe ocurrir cuando $x \rightarrow -\infty$. Así, cualquier configuración de campo define una aplicación que envía los dos *puntos* $x = +\infty$ y $x = -\infty$, que representan el infinito espacial en una dimensión, al conjunto de vacíos clásicos, que también consta de dos puntos: $+v$ y $-v$.

$$\varphi_\infty : \{-\infty, +\infty\} \rightarrow \{-v, +v\} \quad (15.47)$$

Además, cualquier cambio en el campo en el tiempo que no produzca una configuración de energía infinita no puede modificar los valores del campo en el infinito espacial. Por tanto, la aplicación que asigna los valores en $\pm\infty$ es una característica topológica de la

configuración de campo.

Es evidente que los dos puntos del conjunto $\{x = +\infty, x = -\infty\}$ pueden asignarse a los dos puntos del conjunto $\{\varphi = +v, \varphi = -v\}$ de cuatro maneras diferentes. Esto significa que todas las configuraciones de energía finita se dividen en cuatro subconjuntos (sectores) no intersecantes, y la evolución temporal no puede llevar una configuración fuera de su sector.

Las configuraciones con $\varphi(+\infty) = \varphi(-\infty) = v$ son necesariamente triviales, pues satisfacen exactamente las mismas condiciones que la solución de vacío $\varphi(x) = v$; por lo tanto, su energía nunca puede ser menor que la del propio vacío. Del mismo modo, las configuraciones con $\varphi(+\infty) = \varphi(-\infty) = -v$ pertenecen al mismo sector topológico que el vacío $\varphi(x) = -v$ y, por tanto, tampoco dan lugar a soluciones solitónicas no triviales.

15.6. Corriente topológica

Incluso en ausencia de una simetría continua, puede existir una corriente conservada con su carga asociada. Definimos

$$j^\mu = \frac{1}{2v} \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi, \quad (15.48)$$

donde $\mu, \nu = 0, 1$ y $\varepsilon^{\mu\nu}$ es el símbolo de Levi-Civita. Esta corriente j^μ es trivialmente conservada, sin necesidad de usar las ecuaciones de movimiento, es decir, *off-shell*. Esto la distingue de las corrientes de Noether, que sólo se conservan *on-shell*. En efecto,

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{1}{2v} \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \varphi \equiv 0. \quad (15.49)$$

ya que $\varepsilon^{\mu\nu}$ es antisimétrico y aunque $\partial_\mu \partial_\nu$ es simétrico. La carga topológica asociada es

$$Q_T = \int_{-\infty}^{+\infty} j^0 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2v} \partial_1 \varphi dx = \frac{1}{2v} (\varphi(+\infty) - \varphi(-\infty)). \quad (15.50)$$

Esta carga es cero para el vacío, y vale +1 y -1 para el kink y el antikink, respectivamente. Así, el kink realiza el mínimo de energía entre las configuraciones con carga topológica

$$Q_T = 1. \quad (15.51)$$

16. Teorema de Derrick

16.1. Con campos escalares

En numerosos modelos en un espacio-tiempo de $(d + 1)$ dimensiones con $d > 1$ puede demostrarse, mediante argumentos de escala (Derrick 1964), que no existen soluciones estáticas no triviales de las ecuaciones de campo.

Consideremos la teoría de n campos escalares φ^a , $a = 1, \dots, n$, en $(d + 1)$ dimensiones. Escribamos el lagrangiano de forma general:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}G_{ab}(\varphi) \partial_\mu \varphi^a \partial_\mu \varphi^b - V(\varphi). \quad (16.1)$$

Suponemos que $\varphi_c^a(\mathbf{x})$ es una solución estática de energía finita. La energía correspondiente es

$$E[\varphi] = \int d^d x \left[\frac{1}{2}G_{ab}(\varphi) \partial_i \varphi^a \partial_i \varphi^b + V(\varphi) \right]. \quad (16.2)$$

Para soluciones estáticas, el momento conjugado es

$$\pi_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^a} = 0, \quad (16.3)$$

y entonces el hamiltoniano vale

$$\mathcal{H} = \pi_a \dot{\varphi}^a - \mathcal{L} = -\mathcal{L}. \quad (16.4)$$

Por tanto, extremizar la energía o el lagrangiano es equivalente.

Asumimos que $G_{ab}(\varphi)$ define una forma cuadrática definida positiva:

$$G_{ab} \partial_i \varphi^a \partial_i \varphi^b \geq 0, \quad (16.5)$$

con igualdad solo si el campo no depende de $\mathbf{x}$.

Además, el potencial está acotado inferiormente; elegimos el origen de energía tal que

$$V(\varphi_0) = 0, \quad V(\varphi) \geq 0. \quad (16.6)$$

Una verdadera solución estática debe ser un punto estacionario de E bajo cualquier

variación admisible. Entre estas variaciones, la dilatación uniforme

$$\varphi_\lambda^a(x) = \varphi_c^a(\lambda x) \quad (16.7)$$

es particularmente importante porque explora el tamaño global de la configuración sin alterar su valor asintótico.

Definimos la energía escalada:

$$E(\lambda) = E[\varphi_\lambda^a]. \quad (16.8)$$

La condición de estacionariedad exige

$$\left. \frac{dE}{d\lambda} \right|_{\lambda=1} = 0.$$

Calculemos $E(\lambda)$:

$$E(\lambda) = \int d^d x \left[\frac{1}{2} G_{ab}(\varphi_c(\lambda \mathbf{x})) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \varphi_c^a(\lambda \mathbf{x}) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \varphi_c^b(\lambda \mathbf{x}) \right) + V(\varphi_c(\lambda \mathbf{x})) \right]. \quad (16.9)$$

Hacemos el cambio de variables

$$\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x}, \quad d^d x = \lambda^{-d} d^d y, \quad \frac{\partial}{\partial x^i} = \lambda \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad (16.10)$$

y obtenemos

$$E(\lambda) = \lambda^{-d} \int d^d y \left[\frac{1}{2} G_{ab}(\varphi_c(\mathbf{y})) \lambda^2 \partial_i \varphi_c^a(\mathbf{y}) \partial_i \varphi_c^b(\mathbf{y}) + V(\varphi_c(\mathbf{y})) \right]. \quad (16.11)$$

Esto se reescribe como

$$E(\lambda) = \lambda^{2-d} E_K + \lambda^{-d} E_p, \quad (16.12)$$

donde

$$E_K = \int d^d x \frac{1}{2} G_{ab}(\varphi_c) \partial_i \varphi_c^a \partial_i \varphi_c^b, \quad E_p = \int d^d x V(\varphi_c). \quad (16.13)$$

Considerando las condiciones anteriores [\(16.5,16.6\)](#)

$$E_K > 0, \quad E_p > 0, \quad (16.14)$$

la condición de extremalidad aplicada a (16.12), da como resultado

$$(2 - d)E_K - dE_p = 0. \quad (16.15)$$

Esta ecuación, junto con la positividad de E_K y E_p , impone restricciones severas sobre la existencia de soluciones clásicas en teorías escalares.

1. $d > 2$: la condición (16.15) se satisface únicamente si

$$E_K = E_p = 0 \quad (16.16)$$

lo cual implica

$$\partial_i \varphi_c^a = 0, \quad \varphi_c^a = \varphi_0, \quad (16.17)$$

es decir, la única solución es el vacío.

2. $d = 2$: la condición (16.15) exige

$$E_p = 0 \quad (16.18)$$

Si el potencial $V(\varphi)$ es no trivial, esta condición implica nuevamente que la única solución estática finita es el vacío.

La única clase de modelos escalares en $(2+1)$ dimensiones donde pueden existir soluciones clásicas no triviales es aquella para la cual

$$V(\varphi) = 0 \quad \text{para todo } \varphi, \quad (16.19)$$

es decir, modelos sin término de potencial. En tales casos, el término cinético debe poseer una estructura más compleja; esto ocurre, por ejemplo, en el modelo sigma que vamos a ver más tarde.

3. $d = 1$: la condición (16.15) produce el teorema del virial

$$E_K = E_p, \quad (16.20)$$

y no impone restricciones sobre el modelo.

En conclusiones, para evitar el teorema de Derrick se debe modificar el lagrangiano cuando $d \geq 2$. Por ejemplo, si se añade un término con cuatro derivadas, el argumento de escala se modifica y, en lugar de (16.15), se obtiene

$$(4 - d) E_4 + (2 - d) E_K - d E_p = 0, \quad (16.21)$$

donde E_K es la contribución al término de dos derivadas, como en (16.11), y E_4 proviene de términos con cuatro derivadas, por ejemplo

$$\int d^d x (\partial_i \varphi)^4. \quad (16.22)$$

Para $d = 3$, la condición (16.21) puede satisfacerse con

$$E_4 > 0, \quad E_K > 0, \quad E_p > 0, \quad (16.23)$$

de modo que pueden existir solitones. Esto ocurre en el modelo de Skyrme y en las teorías tipo K-field.

16.2. Con campos de gauge

Consideramos A_μ el campo de gauge que se transforma bajo un grupo G y φ un campo escalar transformando en una representación T de G . El lagrangiano tiene la forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2g^2} \text{Tr}(F_{\mu\nu}^2) - (D_\mu \varphi)^\dagger (D_\mu \varphi) - V(\varphi), \quad (16.24)$$

donde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu], \quad (16.25)$$

$$D_\mu \varphi = (\partial_\mu + A_\mu) \varphi. \quad (16.26)$$

Como ejemplo, consideremos campos que no dependen del tiempo en el gauge $A_0 = 0$.

La independencia temporal no es un concepto invariante de gauge: si una configuración es independiente del tiempo, una transformación de gauge con un parámetro que dependa del tiempo producirá en general un campo dependiente del tiempo.

Como ejemplo sencillo, consideremos las configuraciones que satisfacen

$$F_{0i} = 0, \quad (16.27)$$

$$D_0\varphi = 0. \quad (16.28)$$

El funcional de energía para los campos considerados es

$$E[A_i, \varphi] = \int d^d x \left[\frac{1}{2g^2} \text{Tr}(F_{ij}F_{ij}) + (D_i\varphi)^\dagger(D_i\varphi) + V(\varphi) \right], \quad (16.29)$$

donde los tres términos son positivos y, como antes, asumimos que $V(\varphi)$ es no negativo y que se anula únicamente en el vacío.

Supongamos que $\mathbf{A}_v(\mathbf{x})$ y $\varphi_v(\mathbf{x})$ constituyen una solución, es decir, satisfacen las ecuaciones de campo con el comportamiento asintótico correcto:

$$F_{ij} \rightarrow 0, \quad D_i\varphi \rightarrow 0, \quad \varphi \rightarrow \varphi_{\text{vac}} \quad \text{cuando } |x| \rightarrow \infty. \quad (16.30)$$

Aplicamos nuevamente una transformación de escala, escogiendo la transformación del campo gauge de manera que F_{ij} y $D_i\varphi$ transformen homogéneamente. Esto nos lleva a la familia

$$\varphi_\lambda(\mathbf{x}) = \varphi_s(\lambda\mathbf{x}), \quad (16.31)$$

$$\mathbf{A}_\lambda(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{A}_s(\lambda\mathbf{x}). \quad (16.32)$$

La derivada covariante respecto de $\mathbf{x}$ para esta configuración es

$$D_{\mathbf{x}}^{(\lambda)}\varphi_\lambda(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{A}_\lambda(\mathbf{x}) \right] \varphi_\lambda(\mathbf{x}) = \lambda D_{\mathbf{y}}\varphi_s(\mathbf{y}), \quad (16.33)$$

donde $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}$.

El tensor de curvatura para la configuración escalada es

$$F_{ij}^{(\lambda)}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x^i} A_\lambda^j(\mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial x^j} A_\lambda^i(\mathbf{x}) + [A_\lambda^i(\mathbf{x}), A_\lambda^j(\mathbf{x})] = \lambda^2 F_{ij}^{(s)}(\mathbf{y}). \quad (16.34)$$

Sustituyendo estas expresiones en el funcional de energía obtenemos

$$E(\lambda) = \lambda^{4-d} E_G + \lambda^{2-d} E_K + \lambda^{-d} E_p, \quad (16.35)$$

donde

$$E_G = \int d^d y \frac{1}{2g^2} \text{Tr} \left(F_{ij}^{(s)}(\mathbf{y}) F_{ij}^{(s)}(\mathbf{y}) \right), \quad (16.36)$$

$$E_K = \int d^d y (D_{\mathbf{y}} \varphi_s)^\dagger (D_{\mathbf{y}} \varphi_s), \quad (16.37)$$

$$E_p = \int d^d y V(\varphi_s). \quad (16.38)$$

Aquí E_G, E_K, E_p son, respectivamente, las contribuciones del campo de gauge, de la derivada covariante y del potencial al total de energía de la solución $(\varphi_s, \mathbf{A}_s)$. Todas son cantidades positivas.

La condición de extremalidad en $\lambda = 1$ es

$$(4 - d)E_G + (2 - d)E_K - dE_p = 0. \quad (16.39)$$

Vemos así que la presencia de campos de gauge permite evadir el teorema de Derrick, y por tanto pueden existir solitones en $d = 2$ y $d = 3$. Es importante recalcar que estos argumentos de escala proporcionan condiciones necesarias para la existencia de solitones, pero no condiciones suficientes.

17. Elementos de la teoría de homotopía

17.1. Homotopía de aplicaciones

Sean X y Y espacios topológicos. Dos aplicaciones continuas $f, g : X \rightarrow Y$ son *homotópicas* si existe una familia continua $h_t : X \rightarrow Y$ con $t \in [0, 1]$ tal que

$$h_0 = f, \quad h_1 = g. \quad (17.1)$$

Equivalentemente, existe una aplicación continua

$$H : X \times [0, 1] \rightarrow Y, \quad H(x, 0) = f(x), \quad H(x, 1) = g(x). \quad (17.2)$$

Se escribe $f \simeq g$, y todas las aplicaciones equivalentes definen una clase $[f]$. Esto se denomina homotopía libre.

También utilizamos homotopía basada, en la que se fijan puntos base $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, y se exige

$$H(x_0, t) = y_0 \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (17.3)$$

Un mapa constante $c_y : X \rightarrow Y$ envía todo punto $x \in X$ al mismo punto $y \in Y$:

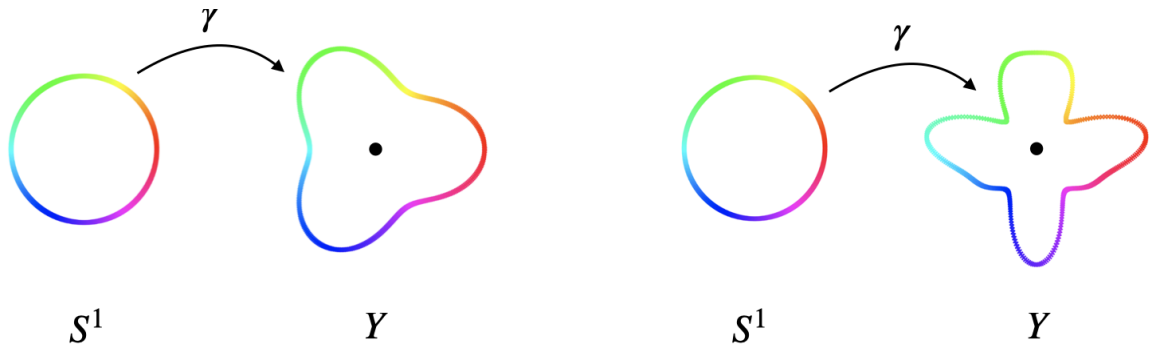
$$c_y(x) = y. \quad (17.4)$$

Un mapa es *nulo-homotópico* si es homotópico a un mapa constante. Cuando Y es conexo por caminos, todos los mapas constantes son homotópicos entre sí, de modo que existe una única clase trivial $[c_y]$, independiente de y . Esto es importante porque, para campos que toman valores en el conjunto de vacíos $\mathcal{V}$ en el infinito espacial, podemos definir

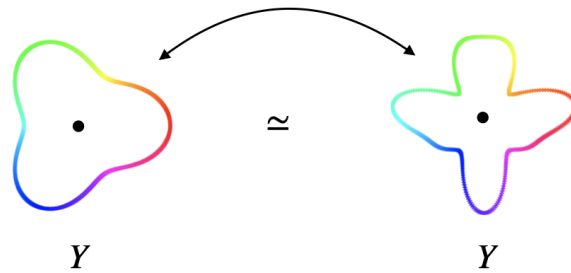
$$\phi_\infty : S^{d-1} \longrightarrow \mathcal{V}. \quad (17.5)$$

Si $\mathcal{V}$ es conexo por caminos, existe una única clase trivial.

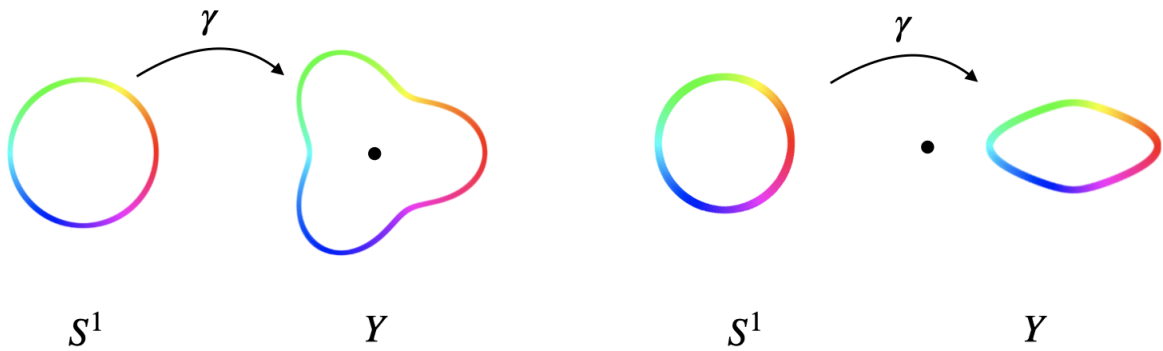
Como ejemplo básico, tomemos $X = S^1$ y $Y = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Una aplicación $\gamma : S^1 \rightarrow Y$ es un lazo. Es nulo-homotópico si puede contraerse a un punto sin cruzar el origen. Los lazos que rodean el punto eliminado no pueden contraerse sin atravesarlo: pertenecen a clases distintas.



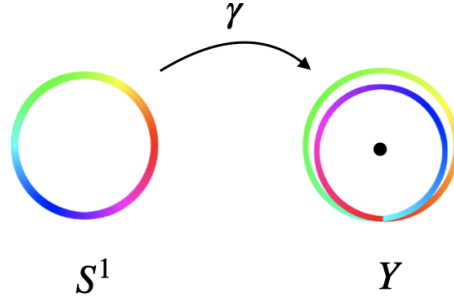
En la figura siguiente se muestran dos mapeos de S^1 en Y . Son equivalentes porque uno puede deformarse suavemente en el otro sin tocar el punto excluido.



En cambio, los siguientes mapeos no son equivalentes: no existe una deformación suave que transforme uno en el otro sin cruzar el punto eliminado. El lazo de la derecha puede contraerse a un punto, por lo que pertenece a la clase trivial.



Finalmente, existen mapeos que dan más de una vuelta alrededor del origen. Estos no pueden deformarse en un lazo que da una sola vuelta; cada número de vueltas define una clase distinta.



Dos espacios Y_1, Y_2 son *homotópicamente equivalentes* si existen

$$h_1 : Y_1 \rightarrow Y_2, \quad h_2 : Y_2 \rightarrow Y_1 \quad (17.6)$$

tales que

$$h_1 \circ h_2 \simeq \text{id}_{Y_2}, \quad h_2 \circ h_1 \simeq \text{id}_{Y_1}. \quad (17.7)$$

17.2. El grupo fundamental

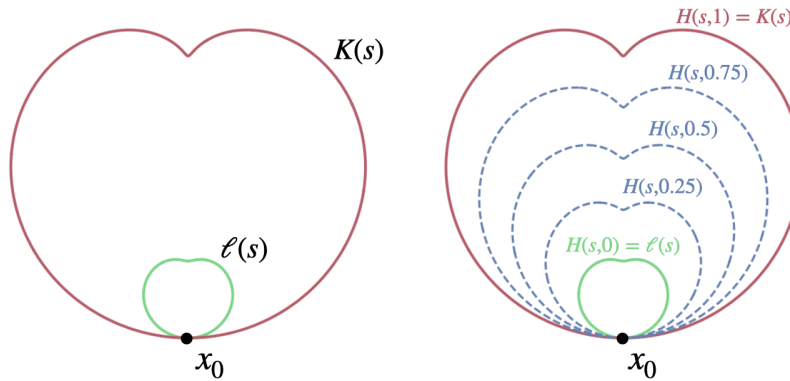
Sea X un espacio topológico y $x_0 \in X$ un punto base. Un *lazo* basado en x_0 es una aplicación continua $\ell : [0, 1] \rightarrow X$ con

$$\ell(0) = \ell(1) = x_0. \quad (17.8)$$

Dos lazos ℓ, K se dicen *basados-homotópicos* si existe una homotopía basada continua $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ con

$$H(s, 0) = \ell(s), \quad H(s, 1) = K(s), \quad H(0, t) = H(1, t) = x_0. \quad (17.9)$$

Es decir, que para cada t , el camino $s \mapsto H(s, t)$ es un lazo basado en x_0 .



Esta noción de homotopía basada define una relación de equivalencia sobre el conjunto de lazos basados en x_0 . Denotamos por $[\ell]$ la clase de homotopía basada de un lazo ℓ . El **grupo fundamental** se define como

$$\pi_1(X, x_0) = \{[\ell] \mid \ell \text{ lazo basado en } x_0\}. \quad (17.10)$$

En $\pi_1(X, x_0)$ definimos el producto por

$$[\ell] \cdot [K] = [\ell * K], \quad (17.11)$$

donde la concatenación $\ell * K$ se define por

$$(\ell * K)(\xi) = \begin{cases} K(2\xi), & 0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}, \\ \ell(2\xi - 1), & \frac{1}{2} \leq \xi \leq 1. \end{cases} \quad (17.12)$$

El lazo identidad es el lazo constante $e(\xi) = x_0$, y su clase $[e]$ es el elemento neutro de $\pi_1(X, x_0)$. El inverso de $[\ell]$ es la clase del lazo

$$\ell^{-1}(\xi) = \ell(1 - \xi). \quad (17.13)$$

Si X es conexo por caminos, los grupos $\pi_1(X, x_0)$ para distintos puntos base son isomorfos; escribimos simplemente:

$$\pi_1(X). \quad (17.14)$$

Por ejemplo,

$$\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}, \quad (17.15)$$

El grupo fundamental de S^1 , es decir el conjunto de clases de homotopía de lazos basados con la operación de concatenación, tiene exactamente la misma estructura de grupo que $\mathbb{Z}$ con la suma. Es decir que existe una **biyección**

$$\Phi : \pi_1(S^1) \rightarrow \mathbb{Z} \quad (17.16)$$

que preserva la operación de grupo:

$$\Phi([\ell_1] \cdot [\ell_2]) = \Phi([\ell_1]) + \Phi([\ell_2]). \quad (17.17)$$

Aquí Φ es el número de enrollamientos del lazo. También escribimos

$$\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}. \quad (17.18)$$

lo que es un abuso habitual: una vez elegido el isomorfismo Φ , identificamos $\pi_1(S^1)$ con $\mathbb{Z}$ y usamos el signo "=" como si fueran literalmente el mismo objeto, aunque en realidad sólo son isomorfos.

17.3. Grupos de homotopía

Sea $n \geq 1$. Consideramos la esfera S^n con un punto base $s_0 \in S^n$ y el espacio X con punto base $x_0 \in X$. Un mapa basado es

$$f : (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0), \quad f(s_0) = x_0. \quad (17.19)$$

Dos mapas basados f, g son basados-homotópicos si existe una homotopía basada $H : S^n \times I \rightarrow X$ tal que

$$H(\cdot, 0) = f, \quad H(\cdot, 1) = g, \quad H(s_0, t) = x_0. \quad (17.20)$$

El conjunto de clases de homotopía basadas de mapas $S^n \rightarrow X$ define el n -ésimo grupo de homotopía de (X, x_0) :

$$\pi_n(X, x_0). \quad (17.21)$$

Para $n = 1$ recuperamos el grupo fundamental. Para $n \geq 2$ el grupo $\pi_n(X, x_0)$ es abeliano. Finalmente, si X es conexo por caminos, se suele escribir simplemente

$$\pi_n(X). \quad (17.22)$$

Algunos resultados importantes (sin demostración aquí) son:

$$\pi_k(S^n) \cong 0, \quad \text{para } k < n, \quad (17.23)$$

$$\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}, \quad (17.24)$$

$$\pi_2(S^1) \cong \pi_1(S^0) \cong 0, \quad (17.25)$$

$$\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}, \quad (17.26)$$

$$\pi_{n+1}(S^n) \cong \mathbb{Z}_2, \quad \text{para } n \geq 3. \quad (17.27)$$

18. Topología de los solitones

18.1. Del grupo de homotopía de orden $n - 1$ al de orden n

Un punto clave para la existencia de solitones es que deben combinarse consideraciones topológicas y energéticas. Nuestro objetivo es aclarar los aspectos topológicos de campos definidos en el espacio plano $\mathbb{R}^d$. Suponer simplemente que los campos son continuos no es suficiente: en ausencia de estructura adicional, un campo lineal es topológicamente trivial. Por ejemplo, cualquier configuración $\phi(\mathbf{x})$ puede deformarse como

$$(1 - \tau) \phi(\mathbf{x}), \quad (18.1)$$

y si τ varía de 0 a 1, esta es una homotopía que lleva la configuración inicial al campo trivial $\phi = 0$.

El caso no lineal es distinto. Supongamos que el campo es un mapa

$$\phi : \mathbb{R}^d \longrightarrow Y, \quad (18.2)$$

donde Y es una variedad objetivo. Como $\mathbb{R}^d$ es contráctil a un punto, el único invariante topológico corresponde a la componente conexa de Y donde vive la imagen del campo. Las configuraciones se clasifican entonces mediante

$$\pi_0(Y). \quad (18.3)$$

La clasificación se vuelve interesante si exigimos que la densidad de energía decaiga rápidamente cuando $r \rightarrow \infty$, donde r es la distancia al origen. De hecho, la mayoría de los solitones poseen energía total finita, salvo excepciones como los vórtices globales o monopolos globales. El requisito de que la energía sea nula en el infinito impone condiciones de contorno esenciales para la clasificación topológica.

Consideremos ahora un multiplete de n campos escalares,

$$\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n), \quad (18.4)$$

con un funcional de energía

$$E = \int \left(\frac{1}{2} \nabla \phi_l \cdot \nabla \phi_l + U(\phi_1, \dots, \phi_n) \right) d^d x. \quad (18.5)$$

Para campos independientes del tiempo, E es la energía total. Supongamos que el

potencial alcanza su valor mínimo

$$U_{\min} = 0, \quad (18.6)$$

en una subvariedad

$$\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n, \quad (18.7)$$

que constituye el espacio de vacíos de la teoría. No hay restricción alguna sobre ϕ en un punto finito, pero en el infinito espacial debe cumplirse

$$\phi(\mathbf{x}) \in \mathcal{V} \quad (|\mathbf{x}| \rightarrow \infty), \quad (18.8)$$

para garantizar densidad de energía nula. Cada configuración define por tanto un mapa

$$\phi^\infty : S_\infty^{d-1} \rightarrow \mathcal{V}, \quad (18.9)$$

donde S_∞^{d-1} es la esfera en el infinito de $\mathbb{R}^d$. Si $\mathcal{V} = S^{n-1}$, entonces

$$\phi^\infty : S_\infty^{d-1} \longrightarrow S^{n-1}, \quad (18.10)$$

y las configuraciones se clasifican mediante el grupo de homotopía

$$\pi_{d-1}(S^{n-1}). \quad (18.11)$$

En lo que sigue restringimos la atención a teorías en dimensiones $d = 1, 2, 3$.

$d = 1$: Aquí S_∞^{d-1} consiste simplemente en los puntos $\pm\infty$ de $\mathbb{R}$, de modo que ϕ^∞ es un mapa desde dos puntos hacia $\mathcal{V}$. Las componentes de $\mathcal{V}$ se clasifican mediante $\pi_0(\mathcal{V})$, que describe los vacíos topológicamente distintos. En el caso del kink teníamos $\mathcal{V} = \mathbb{Z}_2$, y por tanto

$$\pi_0(\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2, \quad (18.12)$$

lo que permite soluciones topológicas que hemos estudiado.

$d = 2$: Aquí S_∞^{d-1} es un círculo. La clasificación topológica del campo viene dada por un elemento de

$$\pi_1(\mathcal{V}), \quad (18.13)$$

el grupo fundamental de $\mathcal{V}$. Un elemento no trivial en $\pi_1(\mathcal{V})$ caracteriza un vórtice, y

dicho elemento determina su **número de giro** en el infinito. Si $\mathcal{V} = S^{n-1}$ con $n > 2$, entonces

$$\pi_1(\mathcal{V}) = 0, \quad (18.14)$$

y no existen vórtices. Si $n = 2$, entonces

$$\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}, \quad (18.15)$$

y el número entero N es el número de vórtice.

$d = 3$: El infinito espacial es S_∞^2 , una 2-esfera, y las clases topológicas vienen dadas por

$$\pi_2(\mathcal{V}). \quad (18.16)$$

Si $\mathcal{V}$ es un conjunto discreto de puntos o curvas, entonces

$$\pi_2(\mathcal{V}) = 0, \quad (18.17)$$

y no hay solitones topológicos. El ejemplo más simple no trivial es $\mathcal{V} = S^2$, para el cual

$$\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}, \quad (18.18)$$

y la configuración queda caracterizada por un entero N , el número monopolar. Si $\mathcal{V} = S^{n-1}$ con $n > 3$, también

$$\pi_2(\mathcal{V}) = 0, \quad (18.19)$$

y no existen solitones.

Si un campo escalar lineal es el único campo de la teoría, los objetos topológicos correspondientes en dimensiones 1, 2, 3 son: kinks, vórtices globales y monopolos globales. Aunque estos últimos existen como soluciones de las ecuaciones de campo en ciertos modelos, su energía es divergente debido a gradientes no triviales en el infinito. En efecto, para una función $\phi(r, \Omega)$, con Ω las coordenadas angulares:

$$\nabla\phi = (\partial_r\phi)\hat{r} + \frac{1}{r}\nabla_{S^{d-1}}\phi, \quad (18.20)$$

de modo que si el campo depende de los ángulos en el infinito, por ejemplo, en el caso

de una simetría global $U(1)$, la energía incluye un término

$$E \sim \int_{R_0}^{\infty} r^{d-1} \frac{|\nabla_{S^{d-1}} \phi_{\infty}(\Omega)|^2}{r^2} dr = C \int_{R_0}^{\infty} r^{d-3} dr, \quad (18.21)$$

el cual diverge para cualquier $d \geq 2$. Por ello, vórtices y monopolos globales no son solitones reales de energía finita.

Para resolver este problema, podemos transformar el modelo en una teoría de gauge, de modo que el campo gauge cancele los gradientes angulares; este es el camino seguido por los modelos de vórtices Abelian–Higgs o los monopolos de 't Hooft–Polyakov. La otra opción es exigir que la solución tenga un único valor en el infinito, es decir, que

$$\phi_{\infty}(\Omega) = \text{constante}, \quad (18.22)$$

lo cual ocurre en modelos como el modelo sigma en $d = 2$ o los Skyrmons en $d = 3$. En estos casos, para evitar una energía infinita, el campo debe tener un valor constante en el infinito, **independiente de la dirección**. Así,

$$\phi^{\infty} : S_{\infty}^{d-1} \longrightarrow Y = \{\mathbf{y}_0\} \quad (18.23)$$

debe ser un mapa constante. En ausencia de potencial, $\mathbf{y}_0$ puede elegirse arbitrariamente; si hay potencial, debe pertenecer a $\mathcal{V}$. Esta condición permite compactificar topológicamente el espacio. De hecho,

$$\mathbb{R}^d \cup \{\infty\} \simeq S^d. \quad (18.24)$$

Por ejemplo, en dos dimensiones, si consideramos la 2-esfera S^2 con el polo norte $N = (0, 0, 1)$ removido. La proyección estereográfica desde N define un homeomorfismo

$$\pi : S^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^2.$$

En general uno puede tener varios puntos en el infinito, pero en nuestro caso todas las direcciones en el infinito se identifican con un único punto ∞ . Extendemos entonces π^{-1} a una aplicación

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \longrightarrow S^2,$$

definiendo $\Phi|_{\mathbb{R}^2} = \pi^{-1}$ y $\Phi(\infty) = N$. Por lo tanto $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \cong S^2$.

Entonces el campo se prolonga como un mapa basado

$$\phi : S^d \longrightarrow Y, \quad (18.25)$$

y la clasificación topológica viene dada ahora por

$$\pi_d(Y), \quad (18.26)$$

en lugar de $\pi_{d-1}(\mathcal{V})$. En la siguiente sección veremos el ejemplo $Y = S^2$ en $d = 2$, donde

$$\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}, \quad (18.27)$$

y los solitones correspondientes son los *lumps* del modelo sigma $O(3)$.

18.2. Modelo sigma $O(3)$

Un modelo sigma es una teoría escalar no lineal en la cual el campo toma valores en un espacio objetivo que es una variedad Riemanniana curva. La estructura más general en $d + 1$ dimensiones espaciales viene dada por el lagrangiano

$$L = \frac{1}{2} \int d^d x g_{ab}(\phi) \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^b, \quad (18.28)$$

donde ϕ^a son campos escalares reales, $a = 1, 2, \dots, N$, y g_{ab} es la métrica en una variedad Riemanniana $\mathcal{M}$ parametrizada por dichos campos. Es decir, el campo del modelo es un mapa del espacio plano de coordenadas de dimensión d al espacio objetivo $\mathcal{M}$. Las ecuaciones de campo del modelo son

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi^a + \Gamma_{bc}^a \partial_\mu \phi^b \partial^\mu \phi^c = 0, \quad (18.29)$$

donde Γ_{bc}^a es la conexión de Christoffel. Estas ecuaciones son intrínsecamente no lineales porque el espacio objetivo no es plano, de modo que no es necesario introducir términos adicionales no lineales en el lagrangiano.

El ejemplo más simple es el modelo sigma $O(3)$, donde el espacio objetivo es la 2-esfera unitaria S^2 . Para formular el modelo parametrizamos el campo como un vector unitario de tres componentes,

$$\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3), \quad (18.30)$$

y el triplete de campos reales está restringido por

$$\phi^a \phi^a = 1. \quad (18.31)$$

La densidad lagrangiana, en espacio-tiempo de Minkowski $(d+1)$ -dimensional, es la de una teoría libre sin masa, pero con la restricción impuesta mediante un multiplicador de Lagrange:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (\partial_\mu \phi^a)^2 + \lambda (1 - \phi^a \phi^a), \quad (18.32)$$

donde λ es el multiplicador, e introducimos un factor $\frac{1}{4}$ por conveniencia. Las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\frac{1}{2} \square \phi^a - 2\lambda \phi^a = 0, \quad (18.33)$$

aún con λ presente. El truco estándar consiste en multiplicar esta ecuación por ϕ^a y usar la restricción (18.31)

$$\frac{1}{4} \phi^a \square \phi^a - \lambda = 0. \quad (18.34)$$

Esto permite eliminar λ de las ecuaciones de campo, obteniendo

$$\square \phi^a - \phi^a \phi^b \square \phi^b = 0. \quad (18.35)$$

Esta ecuación puede escribirse de manera más simétrica usando la condición

$$\frac{1}{2} \partial^\mu (\phi^a \phi^a) = \phi^a \partial^\mu \phi^a = 0, \quad (18.36)$$

y también

$$\partial_\mu (\phi^a \partial^\mu \phi^a) = \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^a + \phi^a \square \phi^a = 0. \quad (18.37)$$

Así, la ecuación de campo del modelo $O(3)$ toma la forma

$$\square \phi^a + \phi^a \partial_\mu \phi^b \partial^\mu \phi^b = 0. \quad (18.38)$$

En forma vectorial:

$$\square \boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\phi} (\partial_\mu \boldsymbol{\phi} \cdot \partial^\mu \boldsymbol{\phi}) = 0. \quad (18.39)$$

El nombre **sigma** proviene de que el modelo puede formularse en términos de campos

(ϕ_1, ϕ_2, σ) , donde ϕ_1 y ϕ_2 son libres localmente y

$$\sigma = \sqrt{1 - \phi_1^2 - \phi_2^2}, \quad (18.40)$$

mientras que la denominación $O(3)$ corresponde a la simetría global del espacio objetivo S^2 , que consiste en rotaciones.

Sabemos que, para que la energía sea finita, el campo ϕ debe tender a un vector constante en el infinito espacial, que sin pérdida de generalidad podemos fijar como

$$\phi^\infty = (0, 0, 1). \quad (18.41)$$

En el vacío, ϕ toma este valor en todo el espacio. Esta condición de contorno rompe espontáneamente la simetría global $O(3)$ hasta una simetría $O(2)$ que actúa como rotaciones en las componentes ϕ_1, ϕ_2 . Además, el espacio puede compactificarse como

$$\mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \cong S^n, \quad (18.42)$$

de modo que, a tiempo fijo, el campo queda descrito por un mapa

$$\phi : S^n \longrightarrow S^2. \quad (18.43)$$

El grupo de homotopía relevante es entonces $\pi_n(S^2)$, lo cual implica que para obtener soluciones no triviales debemos tomar $n = 2$, es decir, trabajar en dos dimensiones espaciales. En ese caso

$$\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}, \quad (18.44)$$

y toda configuración queda caracterizada por un entero N , el grado topológico del mapa ϕ .

Al igual que en el caso del kink, podemos introducir una corriente conservada:

$$j^\mu = \varepsilon^{\mu\nu\rho} \varepsilon_{abc} \phi^a \partial_\nu \phi^b \partial_\rho \phi^c. \quad (18.45)$$

Su componente temporal define la carga topológica

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int \phi \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \times \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx dy = \frac{1}{8\pi} \int d^2x \varepsilon_{abc} \varepsilon_{ij} \phi^a \partial_i \phi^b \partial_j \phi^c. \quad (18.46)$$

El número Q se interpreta como el número de lumps, pues típicamente hay Q regiones localizadas donde se concentra la energía, cada una con una unidad de carga, aunque esta imagen deja de ser precisa cuando los lumps se acercan.

Para encontrar las soluciones, empezamos buscando una cota inferior para la energía, igual que hicimos con el kink:

$$E = \frac{1}{4} \int \partial_i \phi \cdot \partial_i \phi \, d^2 x. \quad (18.47)$$

Consideremos la cantidad

$$F_i^a = \partial_i \phi^a \pm \varepsilon_{abc} \varepsilon_{ij} \phi^b \partial_j \phi^c. \quad (18.48)$$

Es inmediato que

$$\frac{1}{2} F_i^a F_i^a = \partial_i \phi^a \partial_i \phi^a \mp \varepsilon_{abc} \varepsilon_{ij} \phi^a \partial_i \phi^b \partial_j \phi^c. \quad (18.49)$$

Puesto que

$$\int d^2 x (F_i^a)^2 \geq 0, \quad (18.50)$$

obtenemos la desigualdad de Belavin–Polyakov:

$$E = \frac{1}{4} \int d^2 x \partial_i \phi^a \partial_i \phi^a \geq \pm \frac{1}{4} \int d^2 x \varepsilon_{abc} \varepsilon_{ij} \phi^a \partial_i \phi^b \partial_j \phi^c. \quad (18.51)$$

Es decir,

$$E \geq 2\pi |Q|. \quad (18.52)$$

La cota se satura cuando $F_i^a F_i^a = 0$, o equivalentemente cuando

$$\partial_i \phi^a \partial_i \phi^a \mp \varepsilon_{abc} \varepsilon_{ij} \phi^a \partial_i \phi^b \partial_j \phi^c = 0. \quad (18.53)$$

De este modo reducimos el problema desde las ecuaciones de segundo orden a un sistema de primer orden.

Veamos ahora, como ejemplo, la solución explícita de esta ecuación en un caso particular. Buscaremos una configuración correspondiente a $Q = 1$. Esa solución debe ser simétrica por rotaciones en el plano (ϕ_1, ϕ_2) , es decir,

$$\phi_1 + i\phi_2 = e^{i\theta} F(r), \quad (18.54)$$

o, de forma equivalente,

$$\phi_1 = F(r) \cos \theta, \quad \phi_2 = F(r) \sin \theta. \quad (18.55)$$

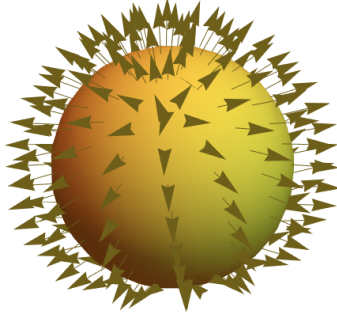
Pero como

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 1, \quad (18.56)$$

redefinimos $F(r) = \sin f(r)$, lo que conduce a

$$\phi_1 = \cos \theta \sin f(r), \quad \phi_2 = \sin \theta \sin f(r), \quad \phi_3 = \cos f(r). \quad (18.57)$$

Esta parametrización suele llamarse *ansatz de erizo* (hedgehog ansatz).



Cada vector representa el valor del campo vectorial en un punto del plano $\mathbb{R}^2$, que ha sido enviado a la esfera mediante la proyección estereográfica tras añadir un punto en el infinito, el cual se mapea al polo norte de la esfera.

La carga topológica de esta configuración es

$$Q = \frac{1}{8\pi} \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} d\theta \varepsilon_{abc} \varepsilon_{ij} \phi^a \partial_i \phi^b \partial_j \phi^c = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty \sin f(r) \frac{df}{dr} dr = \frac{1}{2} \cos f \Big|_0^\infty. \quad (18.58)$$

Por tanto, imponiendo por ejemplo las condiciones de contorno

$$f(0) = \pi, \quad f(\infty) = 0, \quad (18.59)$$

obtenemos $Q = -1$. En el caso opuesto,

$$f(0) = 0, \quad f(\infty) = \pi, \quad (18.60)$$

se obtiene la configuración solitónica en el sector $Q = 1$: el campo varía desde

$\phi(0) = (0, 0, 1)$ en el origen hasta $\phi_\infty = (0, 0, -1)$ en el infinito.

Ahora encontramos la forma explícita de $f(r)$. Sustituyendo el ansatz de erizo en (18.53) se obtiene

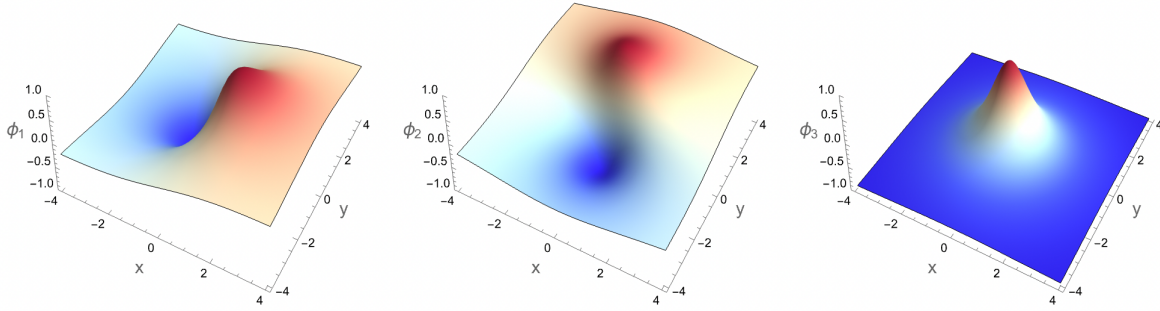
$$\frac{df}{dr} = \frac{1}{r} \sin f, \quad (18.61)$$

cuya solución es

$$f(r) = 2 \arctan \frac{r}{r_0}. \quad (18.62)$$

Aquí r_0 es una constante de integración. De forma explícita, los componentes del campo son

$$\phi_1 = \frac{2rr_0 \cos \theta}{r^2 + r_0^2}, \quad \phi_2 = \frac{2rr_0 \sin \theta}{r^2 + r_0^2}, \quad \phi_3 = \frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 + r^2}. \quad (18.63)$$



La densidad de energía correspondiente tiene forma acampanada con máximo en el origen:

$$E(r) = \frac{2r_0^2}{(r^2 + r_0^2)^2}. \quad (18.64)$$

La energía total del solitón estático, es decir, su masa, es finita:

$$E = \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} d\theta \frac{2r_0^2}{(r^2 + r_0^2)^2} = 2\pi. \quad (18.65)$$

lo que corresponde a (18.52) cuando $Q = 1$.

Podemos intentar generalizar este solitón a dimensiones superiores. Si consideramos un modelo sigma $O(N)$, el espacio objetivo es $\mathbb{S}^{N-1}$. Para que exista un grupo de homología

no trivial, el espacio físico también debe ser $\mathbb{S}^{N-1}$; es decir, debemos trabajar en $N - 1$ dimensiones y añadir un punto en el infinito para compactificar y obtener una esfera. En este caso se cumple $\pi_{N-1}(\mathbb{S}^{N-1}) = \mathbb{Z}$. Estos son los requisitos topológicos para que existan solitones, pero para determinar si realmente existe una solución es necesario resolver las ecuaciones. Para ello, es más sencillo verificar el cumplimiento del teorema de Derrick. Sabemos que

$$S = \frac{1}{2g^2} \int d^{N-1}x \partial_\mu \phi \cdot \partial^\mu \phi, \quad (18.66)$$

y bajo un reescalamiento $x \rightarrow \lambda x$, la energía de una configuración estática escala como

$$E(\lambda) = \lambda^{N-3} E(1) \quad (18.67)$$

de donde obtenemos

$$(N - 3)E(1) = 0 \quad (18.68)$$

Por tanto, existen soluciones topológicamente no triviales sólo para $N = 3$, es decir $d = 2$. Para $d = 3$ es necesario añadir más estructuras al lagrangiano para evadir el teorema de Derrick, como en el caso de los Skyrmions, ...