

# Mecánica Clásica

---

**Radouane Gannouji**

*Instituto de Física,  
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso,  
Avenida Universidad 330,  
Curauma, Valparaíso, Chile*

## Libros y recursos recomendados

Estos apuntes de clase están dirigidos principalmente a estudiantes de Licenciatura en Física, aunque también pueden resultar útiles para estudiantes de otras carreras. En la preparación de este documento se han usado varios libros.

Para la parte de **relatividad especial**:

- Tatsu Takeuchi, *An Illustrated Guide to Relativity*

Un libro que presenta la relatividad especial de manera geométrica y visual, con un enfoque diagramático y en formato cómic.

- Valerio Faraoni, *Special Relativity*

A diferencia del anterior, este es un texto más estándar, con derivaciones analíticas de los resultados.

Para las secciones **lagrangiana** y **hamiltoniana**:

- Louis Hand and Janet Finch, *Analytical Mechanics*

Introduce bien los conceptos y es más breve que el siguiente.

- Herbert Goldstein, Charles Poole and John Safko, *Classical Mechanics*

Se considera un texto estándar en este campo, aunque no lo he utilizado directamente.

## Contacto

Por favor, envíeme un correo electrónico si encuentra algún error  
[radouane.gannouji@pucv.cl](mailto:radouane.gannouji@pucv.cl)

## Más recursos

<https://www.fis.ucv.cl/rgannouji>

---

# Contenido

<b>I</b>	<b>Mecánica newtoniana</b>	<b>4</b>
1.	Dinámica de una partícula	4
1.1.	Ley de Newton	4
1.2.	Momento	6
1.3.	Trabajo y energía	7
2.	Oscilaciones	10
2.1.	Resorte	10
2.2.	Péndulo simple	13
2.3.	Osciladores acoplados	15
<b>II</b>	<b>Relatividad especial</b>	<b>22</b>
3.	La velocidad de la luz	22
3.1.	El satélite Io de Júpiter	23
3.2.	Aberración estelar y la velocidad de la luz	24
3.3.	Experimento de Fizeau	27
3.4.	El éter luminífero y su no detección	29
3.4.1.	Fizeau	29
3.4.2.	Michelson y Morley	31
4.	Invariancia de las leyes físicas	34
4.1.	Transformación de Galileo	34
4.2.	Distancia invariante	35
4.3.	Cálculo de Ricci	36
4.4.	Ecuaciones de Maxwell	38
5.	Fundamentos de la Relatividad Especial	42
5.1.	Postulados de la Relatividad Especial	42
5.2.	Cinemática relativista	42
5.2.1.	Espacio-tiempo	42
5.2.2.	Simultaneidad	43

5.2.3.	Dilatación del tiempo	45
5.2.4.	Contracción de longitud	46
5.3.	Transformaciones de Lorentz	47
5.4.	Espacio de Minkowski	53
5.5.	Diagrama de espacio-tiempo	56
5.6.	El grupo de Lorentz	61
5.6.1.	Caso euclídeo en 3D	61
5.6.2.	Caso de Minkowski en 4D	63
5.7.	Ley de adición relativista de velocidades	66
<b>6.</b>	<b>Cinemática relativista</b>	<b>69</b>
6.1.	Cuadrivelocidad y cudraceleración	69
6.2.	Cuadrimomento y energía	71
6.3.	Ley de Newton relativista	72
<b>7.</b>	<b>Dinámica relativista</b>	<b>75</b>
<b>III</b>	<b>Mecánica lagrangiana</b>	<b>78</b>
<b>8.</b>	<b>Formalismo</b>	<b>78</b>
8.1.	Motivación	78
8.2.	Principio de Fermat	79
8.3.	Principio de mínima acción	80
8.4.	Resorte	84
8.5.	Cambio de coordenadas	85
8.6.	Sistema de referencia en rotación	87
8.7.	Unicidad del lagrangiano	89
8.8.	Multiplicadores de Lagrange	89
8.9.	Variable cíclica	92
<b>9.</b>	<b>Teorema de Noether</b>	<b>93</b>
9.1.	Formulación	93
9.2.	Demostración	94
9.3.	Homogeneidad del espacio	97
9.4.	Isotropía del espacio	97
9.5.	Homogeneidad en el tiempo	99
<b>10.</b>	<b>Problema de dos cuerpos</b>	<b>101</b>
10.1.	Descripción del problema	101
10.2.	El lagrangiano	102

10.3.	Propiedades del movimiento	103
10.4.	Problema de Kepler	105
<b>11.</b>	<b>Sistema de referencia no inercial</b>	<b>108</b>
11.1.	Descripción del problema	108
11.2.	Dinámica	112
11.3.	Péndulo de Foucault	114
<b>12.</b>	<b>Sólido rígido</b>	<b>120</b>
12.1.	Definición	120
12.2.	Ángulos de Euler	121
12.3.	Velocidad angular mediante los ángulos de Euler	123
12.4.	Energía cinética	123
12.5.	Momento angular	128
12.6.	Trompo de Lagrange	129
<b>IV</b>	<b>Mecánica hamiltoniana</b>	<b>133</b>
<b>13.</b>	<b>Formalismo</b>	<b>133</b>
13.1.	Transformada de Legendre	135
13.2.	El hamiltoniano	135
<b>14.</b>	<b>Aplicaciones</b>	<b>139</b>
14.1.	Teorema de Liouville	139
14.2.	Corchete de Poisson	140
14.3.	El vector de Laplace-Runge-Lenz-Hermann-Bernoulli-Hamilton-Gibbs	144
<b>15.</b>	<b>Transformaciones canónicas</b>	<b>150</b>
15.1.	Transformaciones infinitesimales	155
15.2.	Funciones generatrices	159
15.3.	Ecuación de Hamilton-Jacobi	163

---

# Mecánica newtoniana

## 1. Dinámica de una partícula

### 1.1. Ley de Newton

El objeto de la mecánica newtoniana es la descripción de la dinámica de las partículas con concepto de distancia, tiempo, velocidad y aceleración. A Newton se deben las leyes fundamentales de la mecánica:

1. Todo cuerpo permanece en reposo o en movimiento uniforme (no acelerado) a menos que actúa una fuerza sobre el cuerpo.
2. Todo cuerpo sobre lo cual actúa una fuerza se mueve de tal forma que la variación de su momento es igual a la fuerza.
3. Cuando dos cuerpos ejercen fuerzas entre si, estas fuerzas son de intensidades iguales y sentidos opuestos.

En realidad, la segunda ley implica las otras.

Sea  $\mathbf{r}$  un vector posición de una partícula (con un cierto origen  $O$ ) y sea  $\mathbf{v}$  su vector velocidad. Sabemos que

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{1.1}$$

La cantidad de movimiento  $\mathbf{p}$  de la partícula es  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ , con  $m$  la masa del cuerpo. Por consecuencia de interacciones con campos y objetos exteriores, la partícula puede experimentar fuerzas. La suma vectorial de las fuerzas que se ejercen sobre una partícula es la fuerza resultante  $\mathbf{F}$ , de la cual podemos definir la ley de Newton:

Existen sistemas de referencias en los cuales el movimiento de la partícula está descrito por la ecuación diferencial

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) \quad (1.2)$$

Si la masa es constante, esta ley se transforma en

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv m\mathbf{a} \quad (1.3)$$

Obtenemos automáticamente que si no hay fuerzas, no hay aceleración

$$\mathbf{F} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (1.4)$$

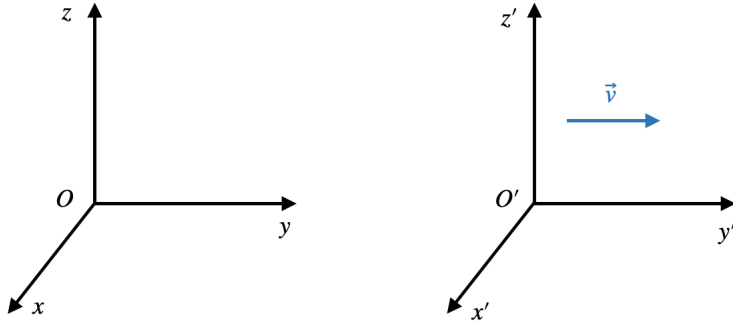
Este resultado corresponde a la primera ley.

La tercera ley es conocida como el principio de acción-reacción. Cuando estamos en reposo, no hay movimiento entre dos partículas es decir,  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  o de forma equivalente  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ . Pero como son dos fuerzas, tenemos  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21}$  con  $\mathbf{F}_{12}$  la fuerza que ejerce el cuerpo 1 sobre el cuerpo 2 y viceversa por  $\mathbf{F}_{21}$ . Por lo tanto, obtenemos de  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$  que  $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$  lo que corresponde a la tercera ley.

Los sistemas de referencia donde se cumple la segunda ley de Newton se denominan sistemas de *referencia inerciales*. Por lo tanto, en ausencia de fuerzas, una partícula en reposo en un sistema inercial en un instante dado, sigue en reposo en todo instante. En cambio, los sistemas de referencia no inerciales son sistemas de referencia donde aparecen términos adicionales en la segunda ley de Newton, que no son asociados a las fuerzas del sistema. Estos términos adicionales se denominan fuerzas ficticias y son debidos a la aceleración del sistema.

Por ejemplo, una partícula en movimiento rectilíneo con respecto al laboratorio será visto con un movimiento muy complicado por un mosquito. Por lo tanto, en un sistema de referencia inercial, las leyes de la mecánica toman su forma más simple.

Existen una infinidad de sistemas de referencias inerciales, que se mueven los unos con respecto a los otros con movimiento rectilíneo y uniforme. En estos sistemas, las leyes de la mecánica son las mismas. Eso corresponde al principio de relatividad de Galileo.



Sistemas de referencia en movimiento relativo rectilíneo y uniforme, con velocidad  $v$  en la dirección  $Oy$ .

Las ecuaciones de transformación para las coordenadas son

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y - vt \\ z' = z \end{cases} \quad \text{derivando con respecto al tiempo} \quad \begin{cases} \dot{x}' = \dot{x} \\ \dot{y}' = \dot{y} - v \\ \dot{z}' = \dot{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}' = \ddot{x} \\ \ddot{y}' = \ddot{y} \\ \ddot{z}' = \ddot{z} \end{cases}$$

Se observan que las derivadas segundas coinciden es decir, las leyes no cambian entre dos sistemas de referencia en movimiento relativo rectilíneo y uniforme.

## 1.2. Momento

Podemos obtener varios teoremas de conservación

- Teorema de conservación de la cantidad de movimiento

Cuando la fuerza total se anula:  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$  tenemos  $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{0}$ , esto implica que  $\mathbf{p}$  es constante.

- Teorema de conservación del momento cinético

Sea una partícula de masa  $m$  y velocidad  $\mathbf{v}$  localizada en  $P$ . El momento cinético respecto a un punto fijo  $O$  se define como

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \tag{1.5}$$

con  $\times$  el producto vectorial. Por otro lado, definimos el momento de una fuerza respecto a un punto  $O$  por

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{1.6}$$

Por lo tanto, tenemos

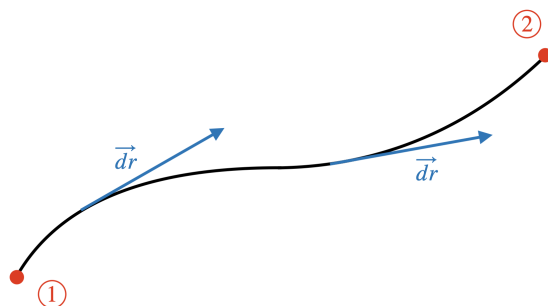
$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \frac{d}{dt}(\underbrace{\mathbf{r} \times (m\mathbf{v})}_{\mathbf{L}}) - \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times (m\mathbf{v}) \quad (1.7)$$

pero como el último término es nulo, obtenemos

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (1.8)$$

se deduce fácilmente que cuando  $\mathbf{N}$  es nulo, se conserva el momento cinético,  $\mathbf{L}$  es constante.

### 1.3. Trabajo y energía



Sea una partícula de masa  $m$ , que se mueve del punto ① al punto ② bajo la acción de la fuerza  $\mathbf{F}$ . Se define el trabajo  $W$  de ① a ②

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (1.9)$$

con  $\int_1^2$  la integral de camino del punto ① al punto ② y  $d\mathbf{r}$  la tangente a la trayectoria.

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt \quad (1.10)$$

En la última expresión, hemos asumido que la masa es constante y los tiempos ( $t_1, t_2$ ) corresponden al los tiempos cuando la partícula se encuentra en ① y ② respectivamente.

$$W_{12} = m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) dt = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \quad (1.11)$$

con  $v_i \equiv v(t_i)$  para  $i = (1, 2)$ . Por lo tanto, observamos la aparición de una cantidad importante llamada energía cinética

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad (1.12)$$

lo que implica que el trabajo entre los dos puntos es  $W_{12} = T_2 - T_1$  es decir, depende solamente de la diferencia entre la energía cinética que posee la partícula en ② y la energía cinética que posee en ①. Cuando esta diferencia no depende del camino tomado, se llama una fuerza conservativa. Deducimos automáticamente que para una fuerza conservativa la integral de la fuerza sobre un camino cerrado es nula.

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (1.13)$$

Usando el teorema de Stokes, obtenemos

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1.14)$$

con  $\mathcal{C}$  un contorno cerrado y  $\mathcal{S}$  el área encerrado por  $\mathcal{C}$ . Dado que esta relación se aplica a cualquier trayectoria cerrada y, por ende, a cualquier superficie, podemos inferir que

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (1.15)$$

es decir,

$$\mathbf{F} = -\nabla V \quad (1.16)$$

con  $V$  la energía potencial, el signo es por convención. En el caso de una fuerza conservativa,

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_1^2 \nabla V \cdot d\mathbf{r} = - \int_1^2 \frac{\partial V}{\partial x} dx - \int_1^2 \frac{\partial V}{\partial y} dy - \int_1^2 \frac{\partial V}{\partial z} dz \quad (1.17)$$

$$= - \int_1^2 dV = V_1 - V_2 \quad (1.18)$$

Pero como  $W_{12} = T_2 - T_1$  para una fuerza conservativa, obtenemos que

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad (1.19)$$

lo que corresponde a la conservación de la energía total de una partícula

$$E = T + V \tag{1.20}$$

## 2. Oscilaciones

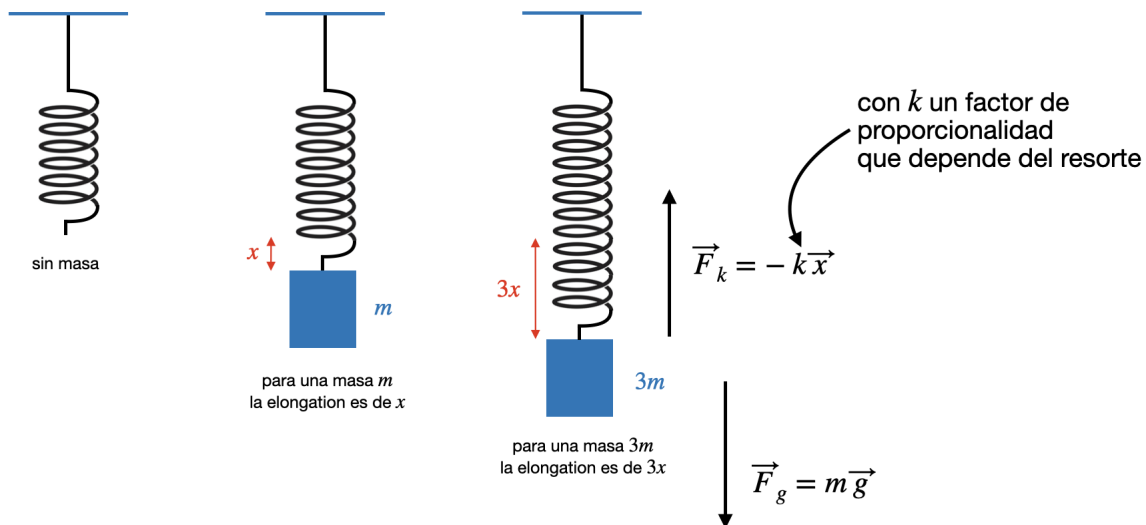
### 2.1. Resorte

Cuando se obliga a un cuerpo a cambiar de forma, la fuerza deformadora es proporcional a la deformación. Esta fuerza puede consistir en:

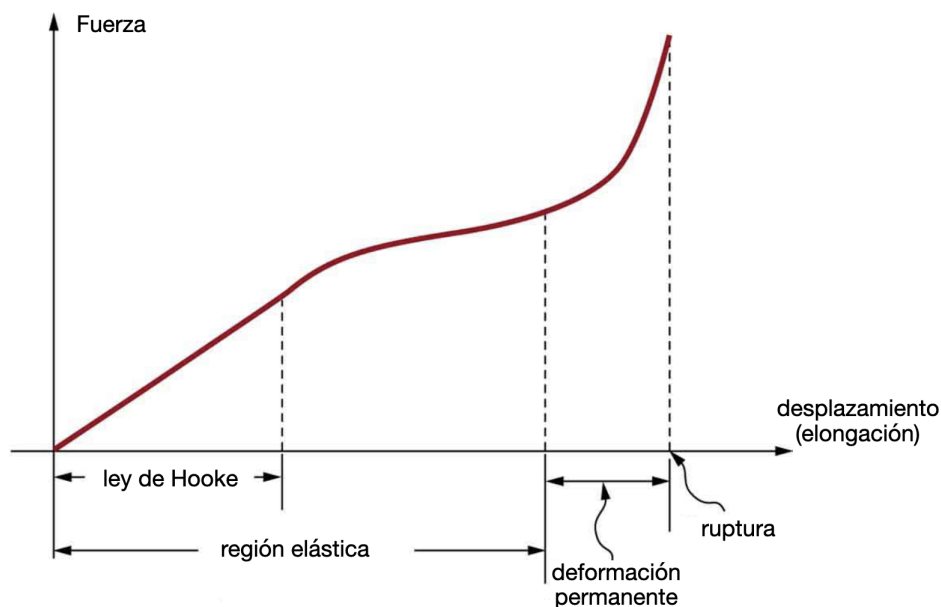
- aumento de longitud (resorte helicoidal)
- en una flexión (resorte plano)
- torsión de una banda alrededor de su eje

La ley de elasticidad de Hooke nos dice que: *La fuerza es proporcional a la extensión.*

Es una ley empírica por lo tanto no tiene fundamentos ni demostración pero funciona. Fue publicado en el año 1678 : *ut tensio, sic vis* (como la extensión, así la fuerza), es decir la extensión es proporcional a la fuerza.



La ley de Hooke funciona solamente en un régimen de pequeñas elongaciones



Consideramos una masa puntual,  $m$ , obligada a moverse según una recta fija, por medio de un resorte elástico, de constante  $k$ . El resorte elástico ejerce una fuerza recuperadora, que se opone a la elongación.

$$F = -k(x - x_0) \quad (2.1)$$

con  $x_0$  la longitud natural del resorte (sin tensión).

Imaginamos una elongación en la dirección  $x$ , es decir  $x - x_0 > 0$ , pero como la fuerza se opone a la elongación, la fuerza debe estar en la dirección  $-\mathbf{e}_x$ , lo que corresponde a la forma de la ley

$$\mathbf{F} = -k(x - x_0)\mathbf{e}_x \quad (2.2)$$

El mismo razonamiento se puede hacer en el caso de una compresión, es decir cuando  $x - x_0 < 0$ .

El movimiento de la masa  $m$ , después de la elongación, es solución de

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (2.3)$$

$$\Leftrightarrow m\ddot{x}\mathbf{e}_x = -k(x - x_0)\mathbf{e}_x \quad (2.4)$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}(x - x_0) = 0 \quad (2.5)$$

Como  $x_0$  es una constante, definimos  $\xi = x - x_0$ , lo que transforma la ecuación en la

ecuación de un *oscilador armónico*

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = 0 \quad (2.6)$$

donde se ha definido  $\omega^2 = k/m > 0$ . La solución puede ser escrita de la forma

$$\xi(t) = \alpha \cos(\omega t + \beta) \quad (2.7)$$

es decir tenemos

$$x(t) = x_0 + \alpha \cos(\omega t + \beta) \quad (2.8)$$

Observamos que la partícula oscila alrededor de la posición de equilibrio  $x_0$  con periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.9)$$

La energía cinética de la masa es

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} k \alpha^2 \sin^2(\omega t + \beta) \quad (2.10)$$

La energía potencial puede ser obtenida calculando el trabajo necesario para desplazar la masa  $m$  a una distancia  $x$ . Como

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} \quad (2.11)$$

obtenemos

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = k(x - x_0) dx = k\xi d\xi \quad (2.12)$$

lo que nos permite obtener

$$W = \frac{1}{2} k \xi^2 + \text{constante} \quad (2.13)$$

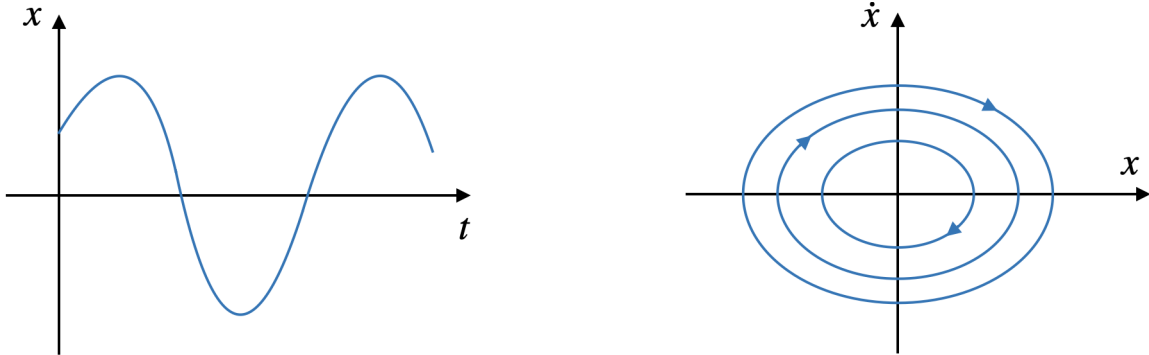
de lo cual identificamos la energía potencial

$$V = \frac{1}{2} k (x - x_0)^2 = \frac{1}{2} k \alpha^2 \cos^2(\omega t + \beta) \quad (2.14)$$

Es ahora fácil verificar que la energía total es constante

$$E = T + V = \frac{1}{2} k \alpha^2 [\sin^2(\omega t + \beta) + \cos^2(\omega t + \beta)] = \frac{1}{2} k \alpha^2 \quad (2.15)$$

Hay dos maneras de representar la solución.



En la primera representación, consideramos la evolución de la posición en el tiempo o en la segunda tenemos una representación paramétrica en el cual el parámetro es el tiempo. Tenemos

$$x(t) = \alpha \cos(\omega t + \beta) \quad (2.16)$$

$$\dot{x}(t) = -\alpha\omega \sin(\omega t + \beta) \quad (2.17)$$

por lo tanto

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\dot{x}}{\alpha\omega}\right)^2 = 1 \quad (2.18)$$

pero como  $E = k\alpha^2/2$ , tenemos

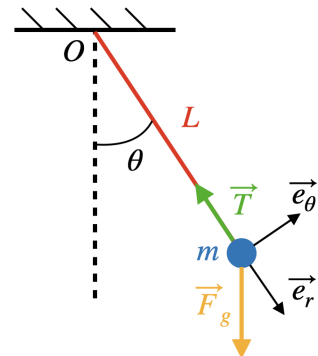
$$\frac{x^2}{2E/k} + \frac{\dot{x}^2}{2E/m} = 1 \quad (2.19)$$

lo que representa una familia de elipses, llamadas curvas de Lissajous. Este espacio es llamado el espacio de configuración, y se reemplazamos la velocidad por el momento, lo que es trivial en nuestro caso, hablamos de espacio de fase. Cada trayectoria del espacio de fase corresponde a un valor de la energía del oscilador. Por lo tanto, dos trayectorias del espacio de fase no pueden cortarse.

## 2.2. Péndulo simple

Consideramos un péndulo simple (a diferencia de un péndulo físico) definido por una masa puntual  $m$ , suspendida mediante un hilo inextensible y sin peso de longitud  $L$ .

La masa  $m$  esta sujeta a dos fuerzas:



- La gravitación

$$\mathbf{F}_g = mg(\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta)$$

- La tensión del hilo

$$\mathbf{T} = -T\mathbf{e}_r$$

lo que nos permite obtener a partir de la ley de Newton

$$m\mathbf{a} = -T\mathbf{e}_r + mg(\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta) \quad (2.20)$$

Para obtener la aceleración en el sistema de coordenadas polares, consideramos las derivadas del vector  $\mathbf{OM}$  que conecta el centro  $O$  de la masa en el punto  $M$ .

$$\mathbf{OM} = L\mathbf{e}_r \quad (2.21)$$

$$\Rightarrow \mathbf{v} = L\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \quad (2.22)$$

$$\Rightarrow \mathbf{a} = L\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta - L\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r \quad (2.23)$$

lo que implica

$$\begin{cases} mL\ddot{\theta} = -mg \sin \theta \\ -mL\dot{\theta}^2 = -T + mg \cos \theta \end{cases} \quad (2.24)$$

La segunda ecuación nos permite calcular la tensión del hilo sobre la masa

$$T = mg \cos \theta + mL\dot{\theta}^2 \quad (2.25)$$

Aunque la segunda ecuación nos da la dinámica de la masa  $m$ .

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0 \quad (2.26)$$

Es interesante observar que la ecuación es independiente de la masa  $m$ . Es una ecuación no-lineal, se puede resolver numéricamente. Pero si consideramos pequeñas oscilaciones alrededor de  $\theta = 0$  es decir  $\theta \ll 1$  podemos hacer una expansión en serie

$$\sin \theta \simeq \theta \quad (2.27)$$

lo que implica

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = 0 \quad (2.28)$$

es decir un oscilador armónico de frecuencia  $\omega^2 = g/L$ . La solución es

$$\theta(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (2.29)$$

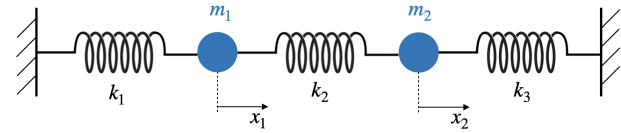
de la cual podemos obtener el periodo de oscilaciones

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (2.30)$$

Observamos que cuando  $L$  aumenta, el periodo aumenta.

### 2.3. Osciladores acoplados

Consideramos tres resortes con constantes  $(k_1, k_2, k_3)$  y dos masas  $(m_1, m_2)$ .



Queremos estudiar las oscilaciones (el

movimiento) de las dos masas. Llamemos  $(x_1, x_2)$  los desplazamientos de cada una de las masas a partir de su posición de equilibrio. Las variables  $(x_1, x_2)$  son positivas cuando se mueven hacia la derecha.

Si  $x_1$  y  $x_2$  se mueven hacia la derecha

- el resorte  $k_1$  se estira de  $x_1$
- el resorte  $k_2$  se deforma de  $x_2 - x_1$
- el resorte  $k_3$  se comprime de  $x_2$

Se considera que los resortes tienen una masa despreciable. Por lo tanto, las únicas masas son  $m_1$  y  $m_2$ . Ocupamos la ley de Newton para estas dos masas. Para la masa  $m_1$ , hay dos fuerzas

$$- k_1 x_1 \mathbf{e}_x \quad (2.31)$$

$$+ k_2 (x_2 - x_1) \mathbf{e}_x \quad (2.32)$$

y las fuerzas sobre la masa  $m_2$  son

$$- k_3 x_2 \mathbf{e}_x \quad (2.33)$$

$$- k_2 (x_2 - x_1) \mathbf{e}_x \quad (2.34)$$

Aplicando la segunda ley de Newton a cada una de las dos partículas obtenemos:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) \quad (2.35)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k_3 x_2 - k_2 (x_2 - x_1) \quad (2.36)$$

Hemos obtenido dos ecuaciones diferenciales acopladas. Para el estudio, consideramos un caso particular, cuando  $m_1 = m_2 \equiv m$  y  $k_1 = k_3 \equiv k$

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k x_1 + k_2 (x_2 - x_1) \quad (2.37)$$

$$m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k x_2 - k_2 (x_2 - x_1) \quad (2.38)$$

Sumando y restando las dos ecuaciones, tenemos

$$m \frac{d^2}{dt^2} (x_1 + x_2) = -k (x_1 + x_2) \quad (2.39)$$

$$m \frac{d^2}{dt^2} (x_1 - x_2) = -(2k_2 + k) (x_1 - x_2) \quad (2.40)$$

Son dos ecuaciones diferenciales de segundo orden, desacopladas. Definimos

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2k_2}{m}} \quad (2.41)$$

La solución es

$$x_1 + x_2 = A \cos(\omega_1 t + \phi_1) \quad (2.42)$$

$$x_1 - x_2 = B \cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad (2.43)$$

es decir

$$x_1 = \frac{A}{2} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + \frac{B}{2} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad (2.44)$$

$$x_2 = \frac{A}{2} \cos(\omega_1 t + \phi_1) - \frac{B}{2} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad (2.45)$$

$(A, B, \phi_1, \phi_2)$  son constantes de integración y representan las condiciones iniciales. Por ejemplo, imaginamos que inicialmente se desplazan las masas de  $x_1^{(0)}$  y  $x_2^{(0)}$  y las

velocidades iniciales son nulas, obtenemos

$$x_1(t) = \frac{x_1^{(0)} + x_2^{(0)}}{2} \cos(\omega_1 t) + \frac{x_1^{(0)} - x_2^{(0)}}{2} \cos(\omega_2 t) \quad (2.46)$$

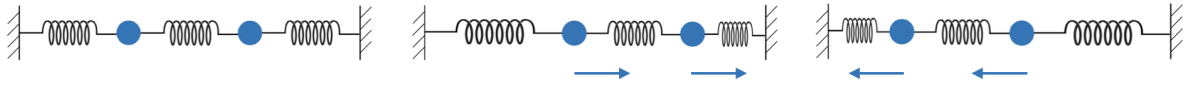
$$x_2(t) = \frac{x_1^{(0)} + x_2^{(0)}}{2} \cos(\omega_1 t) - \frac{x_1^{(0)} - x_2^{(0)}}{2} \cos(\omega_2 t) \quad (2.47)$$

Si  $x_1^{(0)} = x_2^{(0)}$ , obtenemos

$$x_1(t) = x_1^{(0)} \cos(\omega_1 t) \quad (2.48)$$

$$x_2(t) = x_1^{(0)} \cos(\omega_1 t) \quad (2.49)$$

lo que implica  $x_1(t) = x_2(t)$  es decir se mueven en fase. El resorte central no sufre ninguna deformación y por lo tanto, no ejerce ninguna fuerza sobre las partículas, se mueven como si no estuvieran acoplados



Se llama un modo normal (movimiento asociado a una sola frecuencia, en este caso  $\omega_1$ ). Hay un segundo modo normal, asociado a la segunda frecuencia. Se encuentra por  $x_1^{(0)} = -x_2^{(0)}$ , lo que implica

$$x_1 = -x_2^{(0)} \cos(\omega_2 t) \quad (2.50)$$

$$x_2 = x_2^{(0)} \cos(\omega_2 t) \quad (2.51)$$

es decir  $x_1(t) = -x_2(t)$ , lo que corresponde a un movimiento en oposición de fase



Estos dos modos normales son los modos fundamentales del sistema. Cualquier otro movimiento es una combinación de estos modos. Por ejemplo

$$x_1(t) = \underbrace{\frac{x_1^{(0)} + x_2^{(0)}}{2} \cos(\omega_1 t)}_{\text{modo normal 1}} + \underbrace{\frac{x_1^{(0)} - x_2^{(0)}}{2} \cos(\omega_2 t)}_{\text{modo normal 2}} \quad (2.52)$$

Otro caso interesante que podemos ver es cuando  $x_2^{(0)} = 0$

$$x_1 = \frac{x_1^{(0)}}{2} [\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)] \quad (2.53)$$

$$x_2 = \frac{x_1^{(0)}}{2} [\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)] \quad (2.54)$$

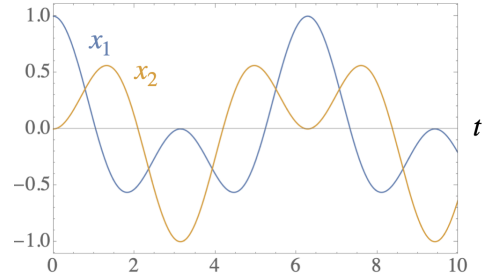
Es una cierta combinación lineal de los dos modos normales. Usando las relaciones de los coseno y seno, obtenemos

$$x_1 = x_1^{(0)} \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \quad (2.55)$$

$$x_2 = -x_1^{(0)} \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \quad (2.56)$$

Por la ilustración, consideramos  $x_1^{(0)} = 1, \omega_1 = 1$  y  $\omega_2 = 2$

Observamos una diferencia de fase entre los dos movimientos y por lo tanto un intercambio de energía. De hecho, si la energía total es constante, podemos identificar una energía de intercambio

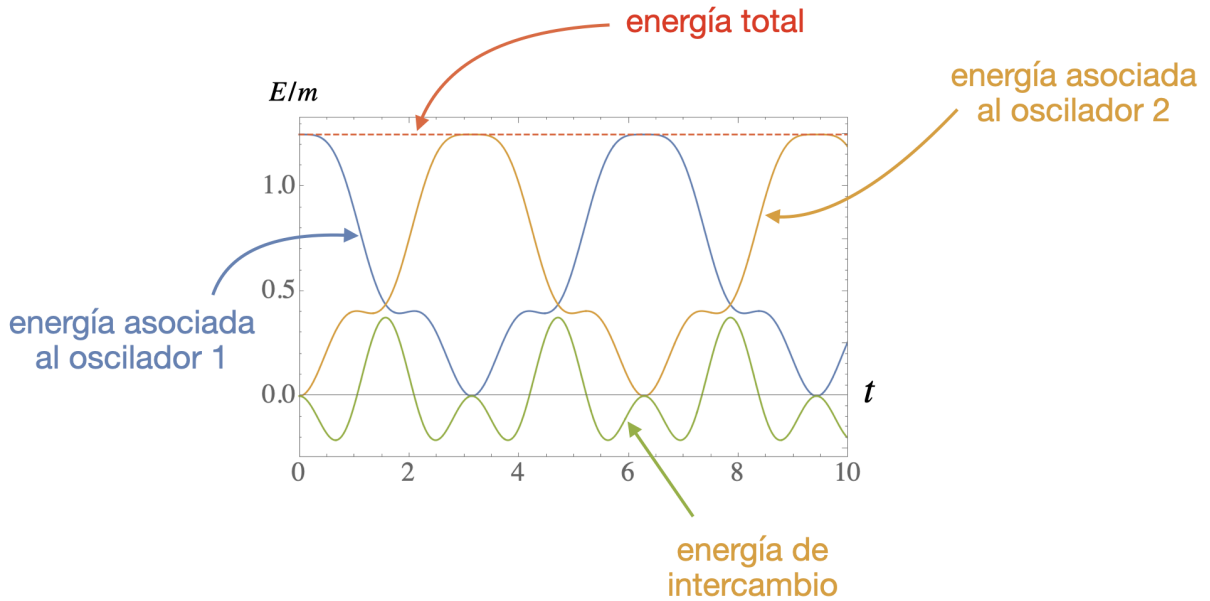


$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 \quad (2.57)$$

$$= \frac{1}{4}m(x_1^{(0)})^2(\omega_1^2 + \omega_2^2) \equiv c^{\text{ste}} \quad (2.58)$$

Podemos escribir

$$\frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 = \underbrace{\frac{1}{2}k_1x_1^2}_{\text{energía potencial asociada al oscilador 1}} + \underbrace{\frac{1}{2}k_2x_2^2}_{\text{energía potencial asociada al oscilador 2}} - \underbrace{k_2x_1x_2}_{\text{energía de intercambio}} \quad (2.59)$$



Una segunda manera para estudiar estos problemas es de usar matrices. Tenemos las ecuaciones siguientes

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k_2(x_2 - x_1) \end{cases}$$

Para simplificar aún más, consideramos  $k_1 = k_2 = k_3 \equiv k$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -2kx_1 + kx_2 \\ m\ddot{x}_2 = kx_1 - 2kx_2 \end{cases}$$

Podemos definir un vector  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ , una matriz  $M = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$  y una matriz

$$K = \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix}$$

$$M\ddot{X} = -KX \quad (2.60)$$

Buscamos soluciones de la forma  $X(t) = Ae^{i\Omega t}$  con  $A$  un vector constante. Obtenemos

$$-\Omega^2 MA = -KA \quad \Rightarrow \quad \underbrace{(\Omega^2 M - K)}_{\text{matriz}} \underbrace{A}_{\text{vector}} = 0 \quad (2.61)$$

Hay una solución trivial  $A = \mathbf{0}$  es decir  $x_1(t) = x_2(t) = 0$ . Una solución mas interesante

es cuando

$$\det(\Omega^2 M - K) = 0 \quad (2.62)$$

es decir

$$\det(\Omega^2 M - K) = \det \begin{pmatrix} m\Omega^2 - 2k & k \\ k & m\Omega^2 - 2k \end{pmatrix} = (2k - m\Omega^2)^2 - k^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2k - m\Omega^2 = \pm k \quad \Leftrightarrow \quad \Omega^2 = \begin{cases} k/m \\ 3k/m \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \Omega = \begin{cases} \pm\sqrt{k/m} \\ \pm\sqrt{3k/m} \end{cases} \equiv \begin{cases} \pm\omega_1 \\ \pm\omega_2 \end{cases}$$

con  $(\omega_1, \omega_2)$  los modos normales. Los vectores propios corresponden al vector  $A$ . Es fácil verificar que el vector propio asociado a  $\omega_1$  es

$$A = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

con  $\alpha$  una constante. Mientras que para el segundo valor propio,  $\omega_2$ , tenemos

$$A = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

con  $\beta$  otra constante. La solución final es una combinación lineal de estas soluciones

$$X(t) = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_1 t} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\omega_1 t} + \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\omega_2 t} + \beta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-i\omega_2 t} \quad (2.65)$$

lo que podemos escribir

$$X(t) = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad (2.66)$$

Pero como  $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ , obtenemos

$$x_1(t) = \alpha \cos(\omega_1 t + \phi_1) + \beta \cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad (2.67)$$

$$x_2(t) = \alpha \cos(\omega_1 t + \phi_1) - \beta \cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad (2.68)$$

Si queremos resolver el problema genérico, podemos calcular el determinante

$$\det \begin{pmatrix} k_1 + k_2 - m_1 \Omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - m_2 \Omega^2 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.69)$$

es decir los dos modos normales del sistema son

$$\Omega_{\pm}^2 = \frac{m_1 (k_2 + k_3) + m_2 (k_1 + k_2) \pm \sqrt{\Delta}}{2m_1 m_2} \quad (2.70)$$

con

$$\Delta = [m_1 (k_2 + k_3) + m_2 (k_1 + k_2)]^2 - 4m_1 m_2 (k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3) \quad (2.71)$$

# Relatividad especial

## 3. La velocidad de la luz

Durante muchos siglos, la tradición aristotélica dominante no consideró la luz como un cuerpo que se desplaza a través del espacio, sino más bien como una propiedad de un medio transparente, como el aire o el agua. En consecuencia, la *propagación de la luz* en el sentido moderno no era la forma natural de plantear el problema. Sin embargo, ya en el siglo V a. C., a Empédocles (−494, −434) se le atribuye la idea de que la luz es algo que está en movimiento y que, por tanto, requiere tiempo para recorrer el espacio, aunque ese tiempo sea demasiado pequeño para ser detectado por los sentidos. Esta propuesta fue puramente deductiva y no se basó en experimentos.

A comienzos del siglo XI, Ibn al-Haytham (Alhacén, 965–1040) rechazó de manera decisiva la idea, sostenida por muchos pensadores griegos, incluido Empédocles, de que la luz es emitida por el ojo. En su lugar, sostuvo que el ojo es un receptor pasivo de la luz emitida por los objetos luminosos. Respaldó esta afirmación mediante experimentos sistemáticos y un análisis cuidadoso, en particular utilizando argumentos basados en una habitación oscura y una abertura (la cámara oscura) para demostrar la propagación rectilínea de la luz. Asimismo, llevó a cabo un estudio sistemático de la desviación de la luz en medios más densos, fenómeno que hoy llamamos refracción, a partir del cual infirió que la luz se propaga más lentamente en medios más densos, un efecto que, por supuesto, no pudo medir cuantitativamente en su época.

En 1638, Galileo (1564–1642) publicó *Dos nuevas ciencias*, en la que describió un intento de medir la velocidad de la luz. El dispositivo experimental involucraba a dos observadores, A y B, cada uno equipado con una farola que podía cubrirse y descubrirse rápidamente. Situados a gran distancia uno del otro, el procedimiento era el siguiente:

A descubría su farola; tan pronto como B percibía la luz de A, B descubría la suya; A medía entonces el tiempo transcurrido entre descubrir su farola y observar la respuesta de B. Galileo señala que solo intentó el experimento a una distancia corta y que no pudo detectar ningún retardo, concluyendo únicamente que, si la luz no es instantánea, entonces es extraordinariamente rápida. Un experimento similar con farolas fue realizado posteriormente por la Accademia del Cimento en Florencia (reportado en 1667), con las farolas separadas por alrededor de  $\sim 1.6$  km, nuevamente sin observarse un retardo medible.

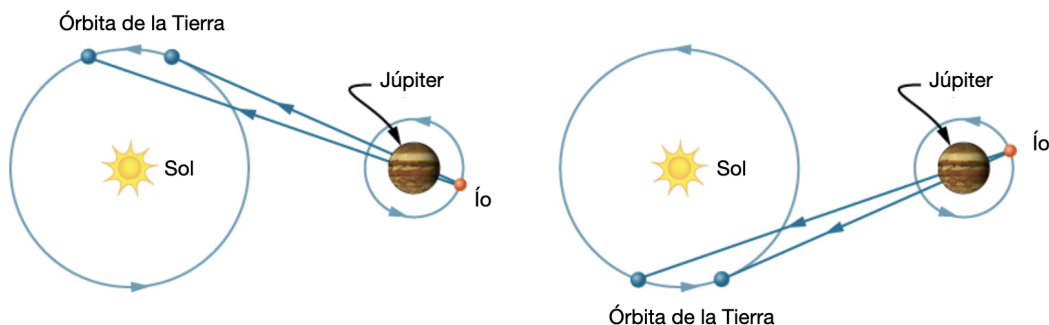
### 3.1. El satélite Io de Júpiter

En la década de 1670, los astrónomos del Observatorio de París cronometraban de manera sistemática las inmersiones y emersiones de los satélites de Júpiter con el fin de construir efemérides precisas, que podían servir como un *reloj universal* para la navegación y la determinación de la longitud. Io era particularmente adecuado para este propósito: su período orbital es ligeramente inferior a 42.5 horas, por lo que los eclipses ocurren con frecuencia y pueden observarse con buena regularidad.

Durante una visita al Observatorio, Ole Rømer (1644–1710) observó un patrón claro y sistemático en los tiempos medidos de los eclipses. Cuando la Tierra se desplazaba hacia Júpiter, los eclipses de Io ocurrían ligeramente antes de lo previsto por las tablas; cuando la Tierra se alejaba de Júpiter, los eclipses se retrasaban progresivamente. Rømer interpretó correctamente este efecto como consecuencia del tiempo finito que requiere la luz para recorrer la distancia variable entre la Tierra y Júpiter. Propuso la relación

$$t_{\text{obs}} = \frac{D_{\text{Tierra-Júpiter}}}{c}, \quad (3.1)$$

donde  $t_{\text{obs}}$  es el tiempo observado del eclipse y  $D_{\text{Tierra-Júpiter}}$  la distancia recorrida por la luz.



En 1676, Rømer anunció que el eclipse de Io esperado para el 9 de noviembre ocurriría aproximadamente diez minutos más tarde de lo predicho a partir de observaciones anteriores del mismo satélite. Cuando el evento se desarrolló exactamente como él

había anticipado, Rømer concluyó que la luz requiere unos 22 minutos para atravesar el diámetro de la órbita terrestre, o de manera equivalente, unos 11 minutos para recorrer la distancia entre la Tierra y el Sol.

Posteriormente, el matemático neerlandés Christiaan Huygens (1629–1695), en su *Traité de la lumière* (1690), utilizó el razonamiento de Rømer para obtener una estimación numérica de la velocidad de la luz. Suponiendo que la distancia Tierra–Sol es 11 000 veces el radio de la Tierra, obtuvo

$$c = 33.3 R_{\oplus} \text{ [km]/s.} \quad (3.2)$$

Este valor era notablemente cercano al aceptado en la actualidad, aunque todavía inexacto debido a una sobreestimación del retardo temporal y a las incertidumbres existentes entonces sobre el tamaño de la órbita terrestre. Utilizando el valor actualmente conocido del radio de la órbita de la Tierra, el mismo razonamiento conduce a

$$c \simeq 2.12 \times 10^5 \text{ km/s.} \quad (3.3)$$

Utilizando el método de Rømer, Newton concluyó en 1704 que, en lugar de tardar 11 minutos, la luz emplea entre 7 y 8 minutos en llegar desde el Sol hasta nosotros. Tras más de un siglo de observaciones, Delambre (1749–1822) llegó en 1809 a la conclusión de que la luz tarda 8 minutos y 12 segundos en llegar del Sol hasta nosotros.

### 3.2. Aberración estelar y la velocidad de la luz

En 1729, James Bradley (1692–1762) descubrió la aberración de la luz y dedujo que la velocidad de la luz es aproximadamente 10 210 veces la velocidad de la Tierra en su órbita.

Para entenderlo, necesitamos introducir la noción de distancia cenital. Sea  $\mathbf{Z}$  la dirección cenital *unitaria* en el observador, es decir la dirección directamente encima y sea  $\mathbf{n}'(t)$  la dirección *unitaria* de la estrella inferida a partir de la observación en el instante  $t$ . La distancia cenital  $z(t)$  se define como el ángulo entre estos dos vectores unitarios:

$$\cos z(t) = \mathbf{n}'(t) \cdot \mathbf{Z} \quad (3.4)$$

Bradley estudió la estrella  $\gamma$  Draconis porque pasa casi por el cenit a la latitud de su observatorio. Cerca del cenit, la refracción atmosférica es mínima y estable, por lo que la astrometría a nivel de segundos de arco está mucho menos contaminada. Midió la distancia cenital de la estrella en el tránsito meridiano, es decir, cuando la estrella cruza la línea norte–sur. Repitió la medición a lo largo del año y encontró que  $z(t)$  varía de forma sinusoidal con un período de 1 año. Para  $\gamma$  Draconis la variación total fue de

aproximadamente  $\sim 40.4''$ , es decir, una amplitud  $\sim 20.2''$ .

Como  $\mathbf{Z}$  es fijo, la variación de la ecuación (3.4) da

$$-\delta z \sin z = \delta \mathbf{n}' \cdot \mathbf{Z} \quad (3.5)$$

lo que implica

$$\delta z = -\frac{\delta \mathbf{n}' \cdot \mathbf{Z}}{\sin z}. \quad (3.6)$$

Para conectar esto con la aberración, necesitamos calcular la relación entre  $\delta \mathbf{n}'$  y la velocidad de la luz. Sea la luz propagándose en un sistema inercial  $S$  con velocidad  $\mathbf{v} = c \mathbf{n}$ , donde  $\mathbf{n}$  es un vector unitario en la dirección real de propagación. El sistema del observador (la Tierra)  $S'$  se mueve con velocidad  $\mathbf{u}$  respecto de  $S$ , con  $u \ll c$ . La velocidad observada es

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u} = c \mathbf{n} - \mathbf{u}, \quad \mathbf{n}' = \frac{\mathbf{v}'}{|\mathbf{v}'|} = \frac{c \mathbf{n} - \mathbf{u}}{|c \mathbf{n} - \mathbf{u}|}. \quad (3.7)$$

El denominador, para  $u/c$  pequeño, es

$$|c \mathbf{n} - \mathbf{u}| = c \sqrt{1 - 2 \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}}{c} + O\left(\frac{u^2}{c^2}\right)} \quad (3.8)$$

$$= c \left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}}{c} + O\left(\frac{u^2}{c^2}\right)\right). \quad (3.9)$$

De donde se obtiene

$$\mathbf{n}' = \left(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{u}}{c}\right) \left(1 + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}}{c}\right) + O\left(\frac{u^2}{c^2}\right) \quad (3.10)$$

$$= \mathbf{n} - \frac{\mathbf{u}}{c} + \frac{\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})}{c} + O\left(\frac{u^2}{c^2}\right). \quad (3.11)$$

Por tanto, el cambio de primer orden en la dirección entre la posición aparente de la estrella y la posición real es

$$\delta \mathbf{n}' \equiv \mathbf{n}' - \mathbf{n} = -\frac{1}{c} \left(\mathbf{u} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{n}\right). \quad (3.12)$$

En consecuencia,

$$\delta z = -\frac{\delta \mathbf{n}' \cdot \mathbf{Z}}{\sin z} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{Z} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{Z})}{c \sin z}. \quad (3.13)$$

Si definimos localmente el cenit en la dirección  $\mathbf{Z}$  y la dirección norte como  $\mathbf{N}$ , se tiene

$$\mathbf{n} = \cos z \mathbf{Z} \pm \sin z \mathbf{N}. \quad (3.14)$$

El signo  $\pm$  depende de si la estrella transita al norte del cenit (+) o al sur (-). Como  $\gamma$  Draconis transita al norte en el lugar de observación de Bradley, elegimos el signo +, lo que da

$$\delta z = \frac{\sin z}{c} \mathbf{u} \cdot \mathbf{Z} - \frac{\cos z}{c} \mathbf{u} \cdot \mathbf{N}. \quad (3.15)$$

Para valores pequeños de  $z$  (cerca del cenit),

$$\delta z \simeq -\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{N}}{c}. \quad (3.16)$$

Como el vector velocidad orbital de la Tierra  $\mathbf{u}(t)$  rota una vez por año, se obtiene

$$\delta z \simeq -\frac{u}{c} \cos \psi(t), \quad (3.17)$$

donde  $\psi(t)$  es el ángulo entre  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{N}$ . Por tanto,  $\delta z(t)$  es una senoide en el tiempo con período de 1 año, tal como observó Bradley. En la configuración de Bradley para  $\gamma$  Draconis se tiene

$$\max_t |\cos \psi(t)| \simeq 1, \quad (3.18)$$

por lo que, con buena aproximación, la amplitud de oscilación es  $\simeq u/c$ .

Como se mencionó, para  $\gamma$  Draconis Bradley encontró

$$\frac{u}{c} = 20.2'' = \frac{20.2}{60 \times 60} \frac{\pi}{180} \Leftrightarrow c = 10\,210 u. \quad (3.19)$$

Bradley no tenía un conocimiento preciso de la velocidad de la Tierra, por lo que obtuvo una relación entre la velocidad de la luz y la velocidad terrestre.

Hoy sabemos que la velocidad media orbital de la Tierra es  $29.78 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$  y que

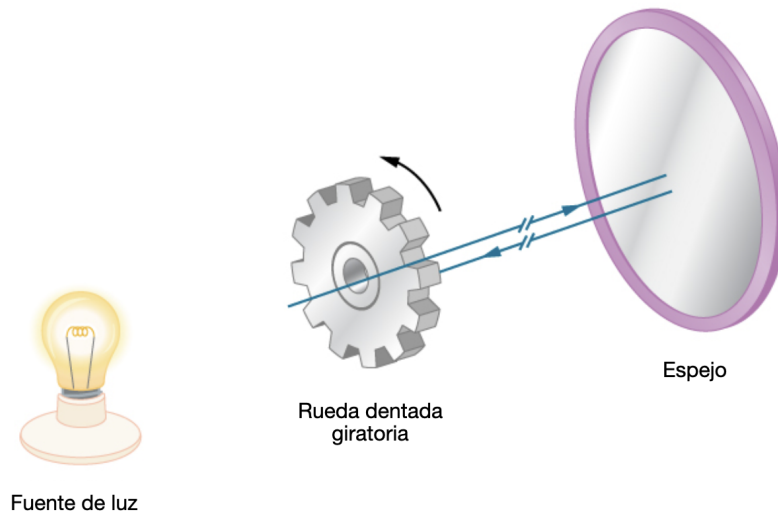
$c = 299792.458 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ , lo que da

$$\frac{c}{u} = 10\,067. \quad (3.20)$$

Esto implica que Bradley cometió solo un error del 1.4%.

### 3.3. Experimento de Fizeau

Los previos experimentos eran de naturaleza astronómica. En 1849, Fizeau (1819–1896) realizó el primer experimento de laboratorio para medir la velocidad de la luz, utilizando un disco dentado. La luz atravesaba una ranura del disco, se reflejaba en un espejo distante y, al regresar, podía ser bloqueada por el disco si este giraba con la velocidad adecuada.



En el montaje de Fizeau, la rueda dentada actúa como un obturador periódico: tiene  $N$  ranuras y  $N$  dientes alternados, es decir,  $2N$  sectores igualmente espaciados. Un rayo pasa por una ranura, recorre la distancia hasta un espejo lejano y vuelve por el mismo eje. El punto clave es que, durante el tiempo de ida y vuelta  $t_{\text{vuelo}}$ , la rueda gira un cierto ángulo; por tanto, cuando el rayo regresa ya no encuentra necesariamente la misma ranura alineada.

Si la rueda gira lentamente, el avance angular durante  $t_{\text{vuelo}}$  es pequeño y el rayo vuelve a atravesar la misma ranura: se observa luz. Al aumentar la velocidad de giro, la rueda avanza más durante el mismo  $t_{\text{vuelo}}$  y una fracción creciente del rayo de retorno es interceptada por el diente que *entra* en la trayectoria, de modo que la intensidad observada disminuye. Para una velocidad particular, el avance durante  $t_{\text{vuelo}}$  coincide exactamente con el paso de una ranura al diente adyacente; entonces el rayo que salió por una ranura regresa justo cuando esa abertura ha sido reemplazada por el diente

siguiente y la luz desaparece por completo: esta es la *primera extinción*. Al aumentar la velocidad, aparecen otras extinciones.

En términos de tiempos, si la rueda gira a  $f$  rotaciones por segundo, el tiempo para pasar de una ranura al diente siguiente (medio “paso” ranura→diente) es

$$T_{\frac{1}{2}\text{paso}} = \frac{1}{2Nf}. \quad (3.21)$$

El tiempo de vuelo es el tiempo de ida y vuelta,

$$t_{\text{vuelo}} = \frac{2d}{c}, \quad (3.22)$$

donde  $d$  es la distancia rueda–espejo.

La condición de *extinción* es que, durante  $t_{\text{vuelo}}$ , la rueda avance un número impar de medios pasos (ranura→diente, o ranura→diente tras varias alternancias):

$$t_{\text{vuelo}} = (2m + 1) T_{\frac{1}{2}\text{paso}} = \frac{2m + 1}{2Nf}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.23)$$

de donde

$$c = \frac{2d}{t_{\text{vuelo}}} = \frac{4dNf}{2m + 1}. \quad (3.24)$$

El caso  $m = 0$  es la *primera* extinción;  $m = 1$  es la siguiente extinción, etc.

La condición de *reaparición* (máximo) es que la rueda avance un número entero de pasos completos ranura→ranura (un número par de medios pasos):

$$t_{\text{vuelo}} = 2m T_{\frac{1}{2}\text{paso}} = \frac{m}{Nf}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.25)$$

lo que explica por qué, si la primera extinción ocurre a  $f_1$ , la primera reaparición ocurre aproximadamente a  $2f_1$  (y la siguiente extinción a  $3f_1$ , etc.).

Fizeau utilizó una rueda con  $N = 720$  dientes (y 720 ranuras). La primera extinción se producía para  $f \simeq 12.6$  rotaciones por segundo, y la distancia entre la rueda y el espejo era  $d \simeq 8.633$  km, entre Suresnes y Montmartre, de modo que el recorrido total era  $2d \simeq 17.266$  km.

En la primera extinción, el tiempo de vuelo coincide con el tiempo que tarda la rueda en girar desde una ranura hasta el diente siguiente:

$$t_{\text{vuelo}} = \frac{1}{2Nf}, \quad c = \frac{2d}{t_{\text{vuelo}}} = 4dNf. \quad (3.26)$$

Con  $N = 720$ ,  $f = 12.6 \text{ s}^{-1}$  y  $d = 8.633 \text{ km}$  se obtiene

$$c \simeq 4 \times 8.633 \times 720 \times 12.6 \simeq 3.13 \times 10^5 \text{ km/s.} \quad (3.27)$$

Esta medición fue mejorada por Foucault (1819–1868) en 1862 mediante un experimento *distinto* (el método del espejo giratorio), obteniendo

$$c \simeq 2.98 \times 10^5 \text{ km s}^{-1}. \quad (3.28)$$

En conclusión, tras siglos de estudios, no solo se estableció que la luz se propaga, sino también que su velocidad es finita y medible. Sin embargo, durante mucho tiempo se asumió que todo aquello que se propaga debe hacerlo necesariamente en un medio.

### 3.4. El éter luminífero y su no detección

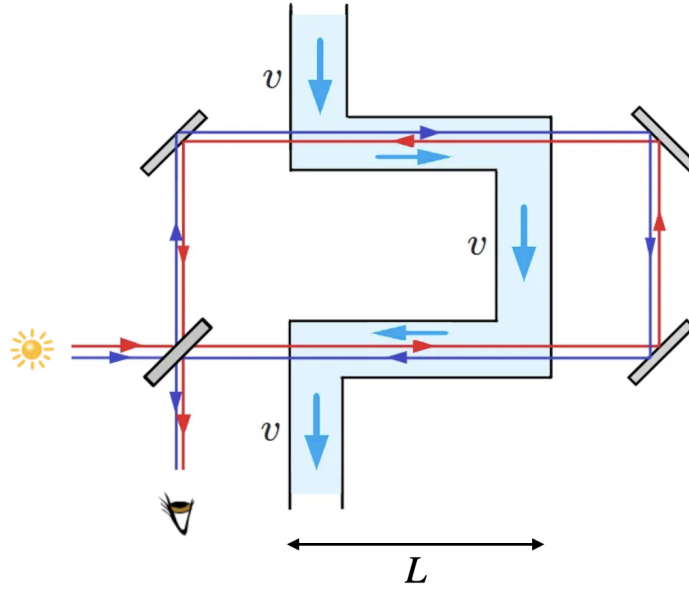
La palabra *éter* es antigua: en la tradición aristotélica designaba una sustancia *celestes* (el quinto elemento) que llenaría la región supralunar. Esta idea, sin embargo, no es todavía el *éter luminífero* de la física moderna. El éter luminífero aparece cuando la luz empieza a pensarse como un fenómeno ondulatorio. En ese marco, por analogía con el sonido o las ondas en el agua, se asumía que toda onda requiere un soporte material; como la luz se propaga en el vacío, se postuló entonces un medio extremadamente sutil, transparente y omnipresente que llenaría todo el espacio: **el éter**.

En el siglo XVII, Huygens formuló explícitamente una teoría ondulatoria en la que la luz es una perturbación que se transmite a gran velocidad (finita) a través del éter. Newton, aunque defendía una teoría corpuscular, también especuló con un *medio etéreo* para explicar fenómenos ópticos como refracción e inflexión, lo que muestra que la noción de un medio sutil estaba muy extendida incluso con físicos que no pensaban la luz como una onda. Ya en el siglo XIX, los trabajos de Thomas Young (1773–1829) en interferencia y, sobre todo, Augustin-Jean Fresnel (1788–1827) en difracción y polarización, consolidaron la óptica ondulatoria; la polarización empujó a interpretar la luz como una vibración *transversal*, y eso llevó a atribuir al éter propiedades mecánicas muy exigentes, capaz de sostener esfuerzos transversales y, a la vez, no frenar el movimiento de los cuerpos celestes. El éter, por tanto, nace históricamente como el soporte hipotético de las ondas luminosas en el vacío, heredando el nombre antiguo pero con una función física distinta.

#### 3.4.1. Fizeau

Diversos experimentos fueron diseñados para poner a prueba la hipótesis del éter. En 1851, Fizeau estudió la propagación de la luz en agua en movimiento mediante un interferómetro: dos haces recorrían la misma longitud  $L$  dentro de tubos con agua que fluía, uno a favor de la corriente y el otro en contra, y luego se recombinaban para medir

el desfase.



En reposo respecto del agua, la luz se propaga con velocidad  $c/n$  (para el agua,  $n \simeq 1.33$ ). Según las transformaciones de Galileo, se esperaría

$$u_{\pm} = \frac{c}{n} \pm v, \quad (3.29)$$

lo que daría una diferencia de tiempos (a primer orden en  $v$ )

$$\Delta t_{\text{Galileo}} \equiv \frac{L}{\frac{c}{n} - v} - \frac{L}{\frac{c}{n} + v} \simeq 2Lv \left(\frac{n}{c}\right)^2. \quad (3.30)$$

Sin embargo, Fizeau observó

$$\Delta t_{\text{Fizeau}} \simeq 2Lv \left(\frac{n}{c}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{2Lv}{c^2} (n^2 - 1). \quad (3.31)$$

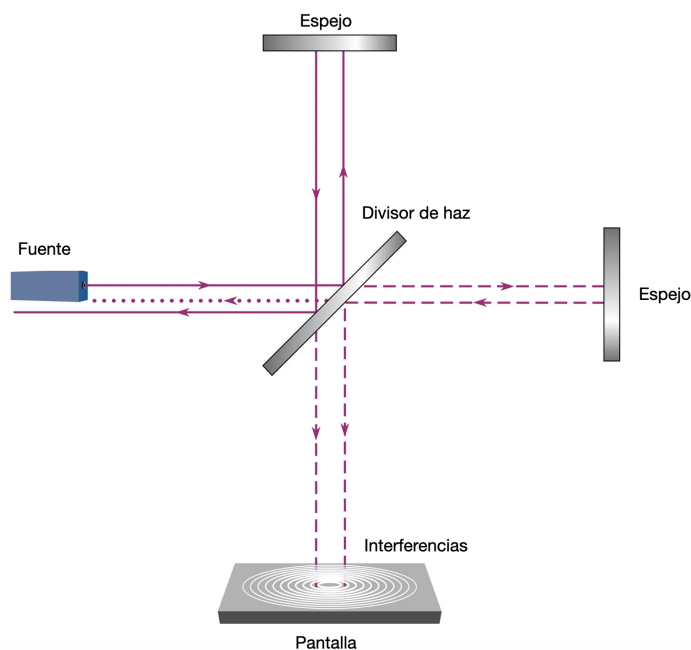
lo que corresponde a un *arrastré parcial*: las velocidades efectivas eran

$$u_{\pm} = \frac{c}{n} \pm v \left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \quad (3.32)$$

Este resultado coincide con la hipótesis de Fresnel de *arrastré parcial* (coeficiente  $\kappa = 1 - \frac{1}{n^2}$ ) y descarta los dos extremos:  $\kappa = 1$  (suma galileana  $c/n \pm v$ , arrastré total) y  $\kappa = 0$  (sin dependencia en  $v$ , ausencia de arrastré). En particular, este resultado muestra que el *arrastré total*, es decir considerando la suma galileana  $u_{\pm} = \frac{c}{n} \pm v$  es incorrecto.

### 3.4.2. Michelson y Morley

En 1887, Michelson (1852–1931) y Morley (1838–1923) realizaron su famoso experimento interferométrico. El interferómetro de Michelson divide un haz luminoso mediante una lámina semirrefleitora en dos haces coherentes que recorren dos brazos perpendiculares de longitud  $L$ , se reflejan en espejos al final de cada brazo y regresan para recombinarse.



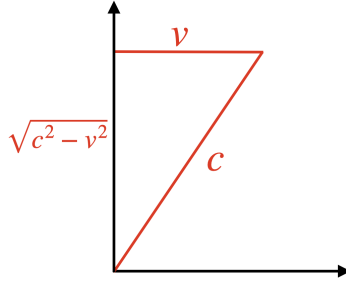
La interferencia depende de la diferencia de tiempos de ida y vuelta en ambos brazos. En la hipótesis clásica de un éter estacionario, si la Tierra se mueve con velocidad  $v$  respecto del éter, la luz debería propagarse con velocidad efectiva distinta según la orientación del brazo con respecto a  $v$ . Al rotar el aparato, la diferencia de tiempos cambiaría, lo que produciría un corrimiento observable de las franjas.

Para el brazo paralelo a  $v$ , el haz va a favor del viento en un trayecto y en contra en el retorno, de modo que

$$t_{\parallel} = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{2Lc}{c^2-v^2} = \frac{2L}{c} \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \simeq \frac{2L}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right), \quad (3.33)$$

donde en la última igualdad se expandió a orden  $(v/c)^2$ .

Para el brazo perpendicular, en el marco del éter el rayo debe tener un componente transversal que compense el movimiento del aparato; el módulo de la velocidad de la luz es  $c$ , pero la componente efectiva a lo largo del brazo es  $\sqrt{c^2 - v^2}$ .



Por tanto,

$$t_{\perp} = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2L}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \simeq \frac{2L}{c} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right). \quad (3.34)$$

La diferencia (a orden  $(v/c)^2$ ) es

$$\Delta t \equiv t_{\parallel} - t_{\perp} \simeq \frac{2L}{c} \left( \frac{v^2}{c^2} - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{Lv^2}{c^3}. \quad (3.35)$$

Al rotar el interferómetro  $90^\circ$ , los brazos intercambian sus papeles (el que era paralelo pasa a ser perpendicular y viceversa), por lo que la diferencia cambia de signo. El cambio total esperado al rotar es entonces

$$\Delta t_{\text{rot}} \simeq 2 \Delta t = \frac{2Lv^2}{c^3}. \quad (3.36)$$

La diferencia de camino óptico asociada es  $\Delta s_{\text{rot}} = c \Delta t_{\text{rot}}$ , y el número de franjas (ver curso de ondas y óptica) que deberían desplazarse es

$$\Delta N = \frac{\Delta s_{\text{rot}}}{\lambda} = \frac{c \Delta t_{\text{rot}}}{\lambda} \simeq \frac{2L v^2}{\lambda c^2}. \quad (3.37)$$

Michelson y Morley buscaron este corrimiento al rotar el aparato (a distintas horas y estaciones), y encontraron un resultado esencialmente nulo dentro de su sensibilidad experimental: no apareció el corrimiento periódico esperado por un *viento de éter* estacionario.

Para explicar el resultado nulo de Michelson y Morley dentro de una teoría con éter estacionario, George Francis FitzGerald (1851–1901) en el año 1889 y Hendrik Lorentz (1853–1928) en 1892 propusieron la hipótesis de una contracción de los cuerpos en movimiento *respecto del éter*. En particular, si el brazo paralelo al *viento de éter* se

contrae según

$$L_{\parallel} = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad L_{\perp} = L_0, \quad (3.38)$$

entonces los tiempos de ida y vuelta resultan iguales,

$$T_{\parallel} = T_{\perp}, \quad (3.39)$$

y no se espera corrimiento de franjas al rotar el interferómetro.

En medio de esta confusión sobre la velocidad de la luz y la posible existencia del éter, Albert Einstein (1879–1955) formuló, a partir de dos postulados, una nueva teoría.

## 4. Invariancia de las leyes físicas

### 4.1. Transformación de Galileo

En mecánica clásica sabemos que existen sistemas de referencia especiales, llamados **sistemas inerciales**. En un sistema de referencia inercial, las distancias son euclidianas y existe un tiempo universal, en el sentido de que las partículas libres permanecen en reposo o se mueven con velocidad constante en líneas rectas. Se asume además que todo sistema de referencia que se mueve con velocidad uniforme respecto de un sistema inercial también es inercial.

El principio de relatividad de Galileo establece que las leyes de la mecánica son invariantes bajo cambios de sistema de referencia inercial. En otras palabras, no existe ningún experimento puramente mecánico capaz de distinguir entre dos sistemas de referencia inerciales. Por lo tanto, no existe un sistema inercial privilegiado: todos son equivalentes y las transformaciones que permiten pasar de uno a otro son simetrías de la teoría. En este contexto, el tiempo es absoluto.

Bajo una transformación de Galileo,

$$t' = t, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{v}_0 t. \quad (4.2)$$

Las velocidades y aceleraciones se transforman como

$$\frac{d\mathbf{x}'}{dt'} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} - \mathbf{v}_0, \quad (4.3)$$

$$\frac{d^2\mathbf{x}'}{dt'^2} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}. \quad (4.4)$$

De aquí se sigue inmediatamente que

$$m \frac{d^2\mathbf{x}'}{dt'^2} = m \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \equiv \mathbf{F}, \quad (4.5)$$

es decir, la masa no cambia de un sistema inercial a otro y la ley de Newton es invariante bajo transformaciones galileanas.

## 4.2. Distancia invariante

También puede verificarse que las distancias euclidianas permanecen invariantes. De hecho, en un sistema ( $R'$ ), la distancia entre dos puntos  $\mathbf{x}'_A$  y  $\mathbf{x}'_B$  es

$$(\mathbf{x}'_B - \mathbf{x}'_A)^2 = (x'_B - x'_A)^2 + (y'_B - y'_A)^2 + (z'_B - z'_A)^2, \quad (4.6)$$

$$= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2, \quad (4.7)$$

$$= (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A)^2 \quad (4.8)$$

lo que muestra que la distancia no cambia bajo una transformación de Galileo.

Este resultado es equivalente a la invariancia del intervalo infinitesimal. Para una separación infinitesimal entre los puntos  $x^i$  y  $x^i + dx^i$ , la distancia cuadrada es

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \sum_{i,j=1}^3 \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (4.9)$$

donde  $\delta_{ij}$  es el delta de Kronecker. Como

$$x'^i = x^i - (v_0)^i t \quad \Rightarrow \quad dx'^i = dx^i, \quad (4.10)$$

se obtiene

$$ds'^2 = ds^2. \quad (4.11)$$

**Convención de suma de Einstein:** si un índice aparece exactamente dos veces en un mismo término, una vez como subíndice y una vez como superíndice, se entiende que se suma sobre todos sus valores; un índice no debe aparecer más de dos veces en un mismo término.

Usando la convención de suma de Einstein, la distancia infinitesimal se escribe de manera compacta como

$$ds^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (4.12)$$

en lugar de expresar explícitamente la suma doble

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^3 \delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (4.13)$$

### 4.3. Cálculo de Ricci

En la sección previa introducimos la notación de Einstein, que forma parte de un marco más amplio conocido como el cálculo de Ricci, es decir, el conjunto de notaciones y convenciones empleadas en el estudio de tensores. En este curso adoptaremos un punto de vista simple: un tensor será, esencialmente, un objeto con índices. Para una discusión más formal y general, se remite al curso de *métodos matemáticos*.

La primera convención se refiere al tipo de índices utilizados. Los índices latinos  $i, j, a, b, \dots$  se emplean para describir componentes espaciales. Por ejemplo,  $v^i$  denota la componente  $i$  de un vector tridimensional (o bidimensional...). Más adelante introduciremos vectores de espacio-tiempo, es decir, objetos que no poseen tres componentes sino cuatro. En ese caso utilizaremos índices griegos  $\mu, \nu, \dots$ , escribiendo por ejemplo  $v^\mu$ . Con esta notación se sobreentiende que el vector es cuadridimensional y que sus componentes son  $(v^0, v^1, v^2, v^3)$ , donde  $v^0$  representa la componente temporal y  $(v^1, v^2, v^3)$  las componentes espaciales. Cabe señalar que en algunos libros la componente temporal se denota como  $v^4$  en lugar de  $v^0$ ; se trata simplemente de una convención alternativa.

Podemos introducir la noción de *vector*, es decir un objeto con componentes. En una base dada podemos escribir

$$v^i \quad (i = 1, \dots, n), \quad (4.14)$$

donde el índice arriba indica un *componente contravariante*. Un *covector* se escribe con índice abajo, es decir componente covariante,

$$w_i, \quad (4.15)$$

y actúa sobre un vector para dar un escalar:

$$w_i v^i. \quad (4.16)$$

es decir el producto escalar entre  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$ . De hecho, podemos subir y bajar índices con la delta de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j, \end{cases} \quad \delta^{ij} = \delta_{ij}, \quad (4.17)$$

y satisface

$$\delta_{ij} \delta^{jk} = \delta_i^k. \quad (4.18)$$

Con esto, se bajan y suben índices así:

$$v_i = \delta_{ij} v^j, \quad (4.19)$$

$$w^i = \delta^{ij} w_j. \quad (4.20)$$

En particular,

$$w_i v^i = \delta_{ij} w^j v^i. \quad (4.21)$$

lo que corresponde al producto escalar entre los 2 vectores

$$\delta_{ij} w^j v^i \equiv \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \delta_{ij} w^j v^i = w^1 v^1 + w^2 v^2 + w^3 v^3 = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \quad (4.22)$$

Podemos notar que el índice de suma puede cambiarse por otra letra sin que el resultado se modifique; a este tipo de índice se le llama *índice mudo*. En efecto,

$$w_i v^i = w_1 v^1 + w_2 v^2 + w_3 v^3 = w_j v^j. \quad (4.23)$$

Por lo tanto, la letra utilizada para un índice de suma es irrelevante.

Además de la delta de Kronecker que ya hemos introducido, para definir otro tipo de producto, el producto vectorial en lugar del producto escalar, se introduce el símbolo de Levi-Civita  $\varepsilon_{ijk}$ , definido por

$$\varepsilon_{123} = +1, \quad (4.24)$$

y  $\varepsilon_{ijk}$  cambia de signo bajo el intercambio de dos índices. Además,

$$\varepsilon_{ijk} = 0 \quad \text{si dos índices son iguales.} \quad (4.25)$$

De forma equivalente,  $\varepsilon_{ijk} = +1$  para permutaciones pares de  $(1, 2, 3)$  y  $\varepsilon_{ijk} = -1$  para permutaciones impares. Obtenemos

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \varepsilon_{ijk} a^j b^k, \quad (4.26)$$

Por ejemplo, sabemos que

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^1 = a^2 b^3 - a^3 b^2 \quad (4.27)$$

Usando (4.26)

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^1 &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i \delta^{i1} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_1 \\ &= \varepsilon_{1jk} a^j b^k = \varepsilon_{123} a^2 b^3 + \varepsilon_{132} a^3 b^2 = a^2 b^3 - a^3 b^2 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Se puede fácilmente demostrar que en 3 dimensiones

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon^{imn} = \delta_j^m \delta_k^n - \delta_j^n \delta_k^m. \quad (4.29)$$

De aquí se obtiene, por ejemplo,

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}). \quad (4.30)$$

De hecho,

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) &= \delta^{ij} (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i (\mathbf{c} \times \mathbf{d})_j = \delta^{ij} \varepsilon_{ikm} a^k b^m \varepsilon_{jpn} c^p d^n \\ &= \varepsilon_{ikm} \varepsilon^{ipn} a^k b^m c_p d_n = (\delta_k^p \delta_m^n - \delta_k^n \delta_m^p) a^k b^m c_p d_n \\ &= a^k b^m c_k d_m - a^k b^m c_m d_k = (a^k c_k)(b^m d_m) - (a^k d_k)(b^m c_m) \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \end{aligned} \quad (4.31)$$

#### 4.4. Ecuaciones de Maxwell

Hemos visto que las transformaciones de Galileo dejan invariantes las distancias y las aceleraciones y, en consecuencia, también las fuerzas. Sin embargo, ya era conocido que las ecuaciones de Maxwell no son invariantes bajo transformaciones galileanas. De hecho, en un sistema inercial, las ecuaciones de Maxwell se escriben como

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (4.32)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (4.33)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (4.34)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (4.35)$$

Pero, de las transformaciones (4.1,4.2) obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial t} \cdot \nabla' = \frac{\partial}{\partial t'} - \mathbf{v}_0 \cdot \nabla' \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial x'} \quad (4.37)$$

es decir

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - \mathbf{v}_0 \cdot \nabla', \quad (4.38)$$

$$\nabla = \nabla'. \quad (4.39)$$

Además, como la masa y la carga  $q$  no cambian de un marco inercial a otro (hecho experimental), y dado que las distancias no cambian entre dos sistemas de referencias inerciales ( $R$ ) y ( $R'$ ), el volumen tampoco cambia. En consecuencia, la densidad de carga es la misma en ambos marcos

$$\rho = \rho'. \quad (4.40)$$

es decir

$$\rho(t, \mathbf{x}) = \rho'(t', \mathbf{x}') \quad (4.41)$$

con la transformación (4.1,4.2), es decir, la densidad es la misma, cuando se evalúa en el mismo **evento** usando 2 sistemas de coordenadas diferentes.

Además, si  $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$ , entonces bajo una transformación de Galileo

$$\mathbf{J}' \equiv \rho \mathbf{v}' = \rho(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) = \mathbf{J} - \rho \mathbf{v}_0. \quad (4.42)$$

Finalmente, para las fuerzas, usando la ley de Lorentz y la invariancia de la ley de Newton,

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = q(\mathbf{E}' + \mathbf{v}' \times \mathbf{B}'), \quad (4.43)$$

obtenemos

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{E}' + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) \times \mathbf{B}' = \mathbf{E}' - \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}' + \mathbf{v} \times \mathbf{B}' \quad (4.44)$$

y como deben ser iguales para cualquier velocidad  $\mathbf{v}$ , obtenemos

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B}, \quad \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}. \quad (4.45)$$

lo que nos da en el nuevo sistema de referencia

$$\nabla' \cdot \mathbf{B}' = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (4.46)$$

por lo tanto, la ley de Gauss para el campo magnético es invariante. De forma similar,

la ley de Faraday es invariante

$$\begin{aligned}\nabla' \times \mathbf{E}' + \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'} &= \nabla \times (\mathbf{E} + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}) + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{B}, \\ &= \nabla \times (\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}) + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{B}.\end{aligned}\quad (4.47)$$

Pero

$$\begin{aligned}(\nabla \times (\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}))_i &= \epsilon_{ijk} \nabla^j (\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B})^k = \epsilon_{ijk} \nabla^j \epsilon^{kmn} (v_0)_m B_n = \epsilon_{ijk} \epsilon^{kmn} (v_0)_m \nabla^j B_n \\ &= \epsilon_{kij} \epsilon^{kmn} (v_0)_m \nabla^j B_n = (\delta_i^m \delta_j^n - \delta_i^n \delta_j^m) (v_0)_m \nabla^j B_n \\ &= (v_0)_i \nabla^n B_n - (v_0)_j \nabla^j B_i = -(v_0)_j \nabla^j B_i \\ &= -((\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{B})_i\end{aligned}\quad (4.48)$$

Hemos usado  $\nabla^n B_n = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  y la notación

$$\nabla_j \equiv \frac{\partial}{\partial x^j} \quad (4.49)$$

lo que se escribe también  $\partial_j$ . En conclusión

$$\nabla' \times \mathbf{E}' + \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'} = 0 \quad (4.50)$$

Finalmente las leyes de Gauss y de Ampère no son invariantes

$$\nabla' \cdot \mathbf{E}' - \frac{\rho'}{\epsilon_0} = \nabla \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}) - \frac{\rho}{\epsilon_0} = \nabla \cdot (\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}) = -\mathbf{v}_0 \cdot (\nabla' \times \mathbf{B}') \neq 0, \quad (4.51)$$

donde hemos usado que

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}) &= \nabla^i (\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B})_i = \nabla^i \epsilon_{ijk} (\mathbf{v}_0)^j B^k = (\mathbf{v}_0)^j \epsilon_{ijk} \nabla^i B^k = -(\mathbf{v}_0)^j \epsilon_{jik} \nabla^i B^k \\ &= -(\mathbf{v}_0)^j (\nabla \times \mathbf{B})_j = -\mathbf{v}_0 \cdot (\nabla \times \mathbf{B})\end{aligned}\quad (4.52)$$

y finalmente

$$\begin{aligned}\nabla' \times \mathbf{B}' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t'} - \mu_0 \mathbf{J}' &= \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \right) (\mathbf{E} + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}) - \mu_0 (\mathbf{J} - \rho \mathbf{v}_0) \\ &= -\frac{1}{c^2} \mathbf{v}_0 \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) (\mathbf{E} + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}) + \mu_0 \rho \mathbf{v}_0 \\ &\neq 0\end{aligned}\quad (4.53)$$

Las ecuaciones de Maxwell no son invariantes bajo transformaciones galileanas.

Esto significa que, mediante un experimento electromagnético, sería posible distinguir entre distintos sistemas inerciales. En consecuencia, debería existir un sistema inercial privilegiado con respecto al cual los demás se mueven con velocidad constante: el éter. Pero, como hemos visto, ningún tipo de éter era observable.

## 5. Fundamentos de la Relatividad Especial

### 5.1. Postulados de la Relatividad Especial

Hemos visto que las leyes de Newton son invariantes bajo transformaciones de Galileo, mientras que las ecuaciones de Maxwell no lo son. Además, la teoría electromagnética predice la propagación de ondas electromagnéticas que no parecen requerir un medio material de soporte como el éter, cuya existencia nunca fue observada experimentalmente. En este contexto de confusión y contradicciones teóricas, Einstein postuló:

1. **Principio de relatividad:** todas las leyes de la física tienen la misma forma en todos los sistemas de referencia inerciales. Todos los observadores inerciales son equivalentes.
2. **Constancia de la velocidad de la luz:** la velocidad de la luz en el vacío tiene el mismo valor en todos los sistemas de referencia inerciales.

El primer postulado implica que no existe un movimiento absoluto observable; por tanto, un *éter* entendido como marco inercial privilegiado no tiene contenido físico operacional. El segundo postulado es consistente con el primero: si la rapidez de la luz en el vacío dependiera del marco inercial, se introduciría un criterio experimental para distinguir observadores inerciales. Este postulado explica el resultado nulo de Michelson y Morley y afirma que, en cada sistema inercial, la luz en el vacío se propaga con la misma rapidez en todas las direcciones.

Finalmente, estos postulados invalidan las transformaciones de Galileo. En efecto, si en  $(R')$  un rayo de luz tiene velocidad  $\mathbf{c}'$  con  $|\mathbf{c}'| = c$ , entonces bajo suma galileana se tendría  $\mathbf{c} = \mathbf{c}' + \mathbf{V}$ , de modo que en general  $|\mathbf{c}| \neq c$  (por ejemplo  $c_{\parallel} = c \pm V$ ), en contradicción directa con el segundo postulado.

### 5.2. Cinemática relativista

#### 5.2.1. Espacio-tiempo

Hemos visto que  $c$  desempeña un papel fundamental: su valor constante modifica de manera radical los conceptos de espacio y tiempo. De hecho, como es una constante, podemos introducir una coordenada temporal con dimensiones de longitud como  $ct$ . Esto conduce naturalmente a la noción de espacio-tiempo, cuyas coordenadas son

$$(ct, x, y, z), \tag{5.1}$$

Un punto del espacio-tiempo es conocido como un **evento**. En consecuencia, al enviar un rayo de luz entre dos eventos, es posible medir una distancia a partir del tiempo de

propagación o a partir de la distancia espacial.

Dados dos eventos  $(ct_1, x_1, y_1, z_1)$  y  $(ct_2, x_2, y_2, z_2)$ , la distancia espacial entre ellos es

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (5.2)$$

Pero la distancia recorrida también puede escribirse como

$$c(t_2 - t_1). \quad (5.3)$$

Por lo tanto,

$$c(t_2 - t_1) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \quad (5.4)$$

es decir

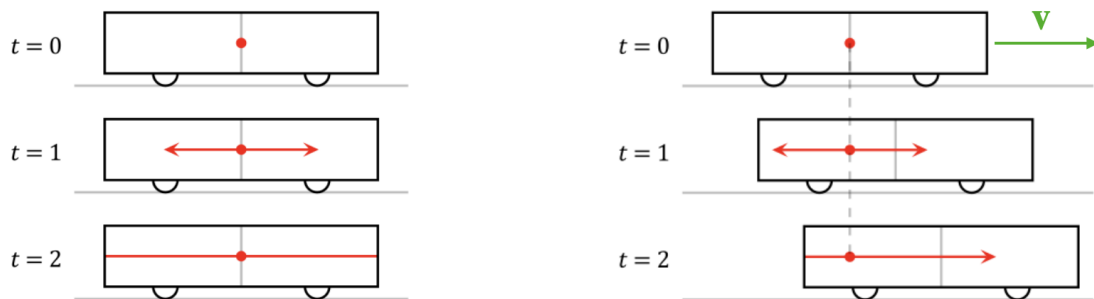
$$-c^2(t_2 - t_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = 0. \quad (5.5)$$

Dado que  $c$  tiene el mismo valor en todos los sistemas de referencia inerciales, esta relación se cumple en cualquiera de ellos. Es un invariante.

$$-c^2\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = 0. \quad (5.6)$$

### 5.2.2. Simultaneidad

Dos eventos simultáneos en un sistema de referencia inercial no lo son necesariamente en otro: **la simultaneidad es relativa.**



Consideremos un tren que se desplaza con velocidad constante  $v$ . Desde el punto medio del tren se emiten dos rayos de luz en direcciones opuestas. Para un observador situado en el tren, ambos rayos alcanzan simultáneamente los extremos, ya que recorren la misma distancia y, por hipótesis, la luz se propaga con la misma velocidad  $c$  en ambas direcciones.

Para un observador externo, en cambio, la situación es distinta. Aunque la velocidad de la luz es la misma para ambos rayos, el tren está en movimiento: el extremo trasero se acerca al punto de emisión mientras que el extremo delantero se aleja. En consecuencia, el rayo que se dirige hacia la parte trasera recorre una distancia menor y llega antes que el rayo que se dirige hacia la parte delantera.

A diferencia, si el análisis galileano fuese correcto, ambos observadores deberían estar de acuerdo. En efecto, consideremos que  $c$  es la velocidad de la luz medida por el observador en el suelo. En el sistema de referencia del suelo  $S$ , la luz se propaga con velocidad  $c$  en ambas direcciones. Por adición galileana de velocidades, las velocidades de la luz medidas en el sistema del tren  $S'$  son

$$u'_+ = c - v \quad (\text{hacia el frente}), \quad (5.7)$$

$$u'_- = -(c + v) \quad (\text{hacia la parte trasera}). \quad (5.8)$$

Por lo tanto, en el sistema del tren la propagación de la luz es anisótropa.

El evento de emisión ocurre en

$$x' = 0, \quad t' = 0. \quad (5.9)$$

El frente y la parte trasera del tren se encuentran en

$$x'_{\text{frente}} = +\frac{L}{2}, \quad x'_{\text{trasera}} = -\frac{L}{2}. \quad (5.10)$$

Los tiempos de recorrido de las dos señales luminosas en el sistema del tren son entonces

$$t'_{\text{frente}} = \frac{L/2}{c - v}, \quad t'_{\text{trasera}} = \frac{L/2}{c + v}. \quad (5.11)$$

Así, dentro de la física galileana, un observador situado en el tren predice que la luz alcanza primero la parte trasera y luego el frente del tren.

En el sistema de referencia del suelo  $S$ , la luz se propaga con velocidad  $c$  en ambas direcciones. En el instante de emisión  $t = 0$ , el punto medio del tren se encuentra en  $x = 0$  y, dado que la cinemática galileana asume invariancia de las longitudes, los extremos del tren están en

$$x_{\text{frente}}(0) = +\frac{L}{2}, \quad x_{\text{trasera}}(0) = -\frac{L}{2}. \quad (5.12)$$

Su movimiento posterior está descrito por

$$x_{\text{frente}}(t) = \frac{L}{2} + vt, \quad x_{\text{trasera}}(t) = -\frac{L}{2} + vt. \quad (5.13)$$

Las trayectorias de los rayos de luz emitidos desde el punto medio son

$$x_{\text{luz}}^{(+)}(t) = ct, \quad x_{\text{luz}}^{(-)}(t) = -ct. \quad (5.14)$$

Los tiempos de llegada se obtienen al intersectar estas trayectorias con las de los extremos del tren. Para el frente,

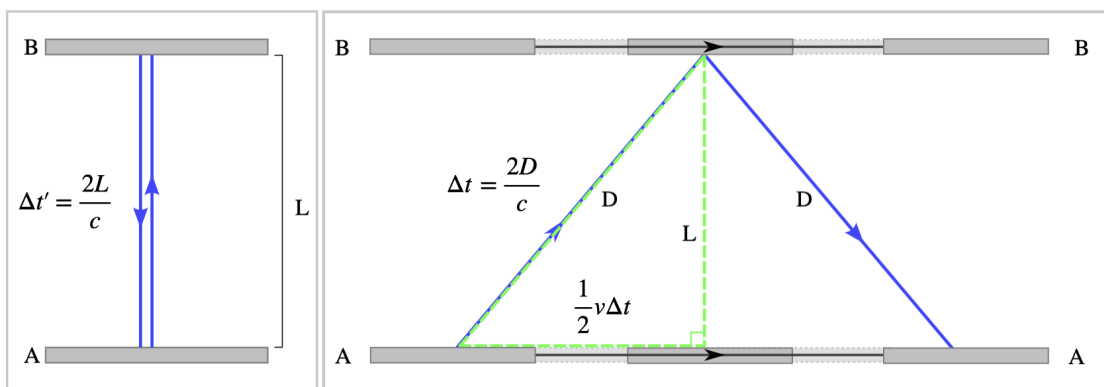
$$ct = \frac{L}{2} + vt \Rightarrow t_{\text{frente}} = \frac{L/2}{c-v}, \quad (5.15)$$

y para la parte trasera,

$$-ct = -\frac{L}{2} + vt \Rightarrow t_{\text{trasera}} = \frac{L/2}{c+v}. \quad (5.16)$$

Estos tiempos coinciden exactamente con los obtenidos en el sistema del tren (5.11). Dado que en la física galileana el tiempo es absoluto,  $t' = t$ , todos los observadores concuerdan en el orden temporal de los eventos.

### 5.2.3. Dilatación del tiempo



Consideremos ahora un rayo de luz dentro del mismo tren, emitido hacia arriba y reflejado de vuelta hacia abajo. Para un observador en reposo dentro del tren, el tiempo entre dos rebotes consecutivos es

$$\Delta t' = \frac{2L}{c}. \quad (5.17)$$

Para un observador externo que ve el experimento moverse con velocidad  $v$ , la trayectoria del rayo es oblicua y satisface

$$L^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 = D^2 = \left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2, \quad (5.18)$$

de donde se obtiene

$$\Delta t = \frac{2L}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (5.19)$$

Esto conduce a la dilatación temporal,

$$\Delta t = \gamma \Delta t', \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (5.20)$$

Si  $v \ll c$ , entonces  $\gamma \simeq 1$  y se recupera el límite newtoniano, es decir la universalidad del tiempo. En cambio, si  $v \neq 0$ , se tiene  $\gamma > 1$  y por lo tanto

$$\Delta t > \Delta t'. \quad (5.21)$$

El intervalo  $\Delta t'$  se denomina *tiempo propio*: es el intervalo medido en el sistema donde los dos eventos ocurren en el mismo punto del espacio. El tiempo propio es el intervalo de tiempo más corto. En otras palabras, en un experimento local, el tiempo medido por el reloj que acompaña al experimento es siempre menor que el tiempo asignado por cualquier observador que se mueva con respecto a él.

#### 5.2.4. Contracción de longitud

Las distancias tampoco son absolutas. Sea  $L_0$  la distancia entre dos puntos fijos  $A$  y  $B$  medida en el sistema donde ambos están en reposo (longitud propia). Un viajero se desplaza de  $A$  a  $B$  con rapidez  $v$  según ese sistema, de modo que el tiempo transcurrido allí es

$$\Delta t = \frac{L_0}{v}. \quad (5.22)$$

En el sistema del viajero el intervalo temporal correspondiente (tiempo propio del reloj que lo acompaña) es

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (5.23)$$

Desde el sistema del viajero, el punto  $A$  está en reposo y el punto  $B$  se aproxima con rapidez  $v$ . Por lo tanto, durante el intervalo  $\Delta t'$  la separación disminuye en  $v\Delta t'$ , lo que implica que la separación inicial (la distancia entre  $A$  y  $B$  medida en el sistema del viajero) es

$$L = v \Delta t' = v \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{L_0}{\gamma}. \quad (5.24)$$

Como  $\gamma > 1$ , se tiene  $L < L_0$ . Este efecto se conoce como *contracción de longitud*.

### 5.3. Transformaciones de Lorentz

Hemos visto que la noción de tiempo absoluto es incorrecta; en consecuencia, las transformaciones de Galileo no pueden ser exactas. Necesitamos transformaciones entre marcos de referencia inerciales en las que el tiempo no sea universal.

Consideremos dos sistemas de referencia inerciales ( $S$ ) y ( $S'$ ), con  $S'$  un sistema de referencia a velocidad constante  $\mathbf{v}$  con respecto a  $S$ , y busquemos transformaciones que relacionen sus coordenadas. En general,

$$t' = f(t, x, y, z), \quad x' = g(t, x, y, z), \quad y' = h(t, x, y, z), \quad z' = k(t, x, y, z). \quad (5.25)$$

Pero una partícula libre en ( $S$ ) también es libre en ( $S'$ ), ya que ambos son marcos inerciales. Por lo tanto, como la trayectoria de una partícula libre es una recta; la transformación entre ( $S$ ) y ( $S'$ ) debe llevar rectas en rectas, es decir, debe ser lineal. En consecuencia,

$$t' = \delta_0 t + \delta_1 x + \delta_2 y + \delta_3 z, \quad (5.26)$$

$$x' = \alpha_0 t + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z, \quad (5.27)$$

$$y' = \beta_0 t + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z, \quad (5.28)$$

$$z' = \gamma_0 t + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z. \quad (5.29)$$

Supongamos ahora que ( $S'$ ) se mueve con velocidad  $v$  respecto de ( $S$ ) a lo largo del eje  $x$ . Por simetría, las coordenadas transversales no deben cambiar:

$$y' = y, \quad (5.30)$$

$$z' = z. \quad (5.31)$$

Las transformaciones se reducen entonces a

$$t' = \delta_0 t + \delta_1 x, \quad (5.32)$$

$$x' = \alpha_0 t + \alpha_1 x. \quad (5.33)$$

El origen  $O'$  de  $(S')$  satisface  $x' = 0$ , y en  $(S)$  se mueve como  $x = vt$ . De aquí,

$$0 = \alpha_0 t + \alpha_1(vt) \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 = -\alpha_1 v, \quad (5.34)$$

y por tanto

$$x' = \alpha_1(x - vt). \quad (5.35)$$

El coeficiente  $\alpha_1$  puede depender de  $v$ .

Por el principio de relatividad, la transformación inversa debe tener la misma forma al intercambiar  $x \leftrightarrow x'$ ,  $t \leftrightarrow t'$  y  $v \rightarrow -v$ :

$$x = \alpha_1(x' + vt'). \quad (5.36)$$

Sustituyendo  $x'$ ,

$$x = \alpha_1[\alpha_1(x - vt) + vt'] = \alpha_1^2 x + \alpha_1 v(t' - \alpha_1 t), \quad (5.37)$$

de donde se obtiene

$$t' = \alpha_1 t + \frac{1 - \alpha_1^2}{\alpha_1 v} x. \quad (5.38)$$

Si se impusiera  $t' = t$ , se tendría  $\alpha_1 = 1$  y

$$x' = x - vt, \quad (5.39)$$

que corresponde a las transformaciones de Galileo. Sin embargo, exigimos ahora que la velocidad de la luz sea la misma en todos los marcos inerciales. Si  $x = ct$  en  $(S)$ , entonces  $x' = ct'$  en  $(S')$ . Esto implica

$$ct' = \alpha_1(c - v)t, \quad (5.40)$$

$$ct = \alpha_1(c + v)t'. \quad (5.41)$$

Eliminando  $t$  y  $t'$ ,

$$\alpha_1^2 = \frac{c^2}{(c-v)(c+v)} = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (5.42)$$

y por tanto

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \equiv \gamma, \quad (5.43)$$

donde  $\gamma$  es el factor de Lorentz.

Las transformaciones quedan entonces

$$t' = \gamma \left( t - \frac{v}{c^2} x \right), \quad x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad (5.44)$$

o, de forma equivalente,

$$ct' = \gamma \left( ct - \frac{v}{c} x \right). \quad (5.45)$$

La transformación de Lorentz entre dos sistemas de referencia inerciales ( $S$ ) y ( $S'$ ) es

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma \left( ct - \frac{v}{c} x \right), \\ x' &= \gamma(x - vt), \\ y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Para  $v \ll c$ , se tiene  $\gamma \simeq 1$  y se recupera el límite galileano:

$$t' \simeq t, \quad x' \simeq x - vt. \quad (5.47)$$

Estas transformaciones se denominan *boosts de Lorentz*. La transformación inversa se obtiene reemplazando  $v \rightarrow -v$ :

$$ct = \gamma \left( ct' + \frac{v}{c} x' \right), \quad (5.48)$$

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad (5.49)$$

$$y = y', \quad (5.50)$$

$$z = z'. \quad (5.51)$$

Con estas ecuaciones, la velocidad de la luz es la misma en todas las direcciones. Por ejemplo, si  $x = ct$  en  $(S)$ , entonces

$$ct' = \gamma(ct - vt), \quad (5.52)$$

$$x' = \gamma(ct - vt), \quad (5.53)$$

lo que implica  $x' = ct'$ .

De manera análoga, si en el sistema  $S$ , un rayo de luz se propaga en la dirección  $y$ . Su trayectoria está dada por

$$x = 0, \quad y = ct. \quad (5.54)$$

Aplicamos ahora un boost de Lorentz en la dirección  $x$ , bajo el cual las coordenadas transforman como

$$ct' = \gamma \left( ct - \frac{vx}{c} \right), \quad (5.55)$$

$$x' = \gamma(x - vt), \quad (5.56)$$

$$y' = y. \quad (5.57)$$

Dado que para el rayo  $x = 0$ , se obtiene inmediatamente

$$t' = \gamma t, \quad (5.58)$$

lo que implica

$$t = \frac{t'}{\gamma}. \quad (5.59)$$

Además,

$$x' = -\gamma vt = -vt', \quad (5.60)$$

$$y' = ct = \frac{c}{\gamma} t'. \quad (5.61)$$

Por tanto, en el sistema  $S'$  la trayectoria del rayo puede escribirse como

$$x' = -vt', \quad (5.62)$$

$$y' = \frac{c}{\gamma} t'. \quad (5.63)$$

Las componentes de la velocidad medidas en  $S'$  son

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = -v, \quad (5.64)$$

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{c}{\gamma}. \quad (5.65)$$

La rapidez en  $S'$  resulta

$$|\mathbf{v}'| = \sqrt{(v'_x)^2 + (v'_y)^2} = \sqrt{v^2 + \frac{c^2}{\gamma^2}} = \sqrt{v^2 + c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = c. \quad (5.66)$$

Así, aunque las componentes de la velocidad cambian, la rapidez de la luz sigue siendo  $c$  también en el sistema  $S'$ .

Finalmente, las transformaciones de Lorentz permiten recuperar los resultados discutidos anteriormente. En particular, dos eventos simultáneos en  $(S)$ ,

$$(t_1, x_1) \quad \text{y} \quad (t_1, x_2), \quad (5.67)$$

satisfacen en  $(S')$

$$ct'_1 = \gamma \left( ct_1 - \frac{v}{c} x_1 \right), \quad (5.68)$$

$$ct'_2 = \gamma \left( ct_1 - \frac{v}{c} x_2 \right), \quad (5.69)$$

de donde

$$c(t'_2 - t'_1) = -\gamma \frac{v}{c} (x_2 - x_1), \quad (5.70)$$

mostrando que no son simultáneos en  $(S')$ .

Asimismo, la dilatación del tiempo se obtiene de manera inmediata a partir de las transformaciones de Lorentz. Para incrementos entre dos eventos,

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v \Delta t), \quad (5.71)$$

$$\Delta t' = \gamma \left( \Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right), \quad (5.72)$$

con  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ .

Si en el sistema  $S$  los dos eventos ocurren en el mismo punto del espacio, entonces

$\Delta x = 0$ , y la transformación temporal da

$$\Delta t' = \gamma \Delta t. \quad (5.73)$$

Por tanto, el observador para el cual ese reloj está en movimiento mide un intervalo mayor entre los mismos dos eventos: concluye que el reloj en movimiento corre más lentamente.

Recíprocamente, si los dos eventos ocurren en el mismo punto del sistema  $S'$ , entonces  $\Delta x' = 0$ . Usando la transformación inversa,

$$\Delta t = \gamma \left( \Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x' \right), \quad (5.74)$$

y como  $\Delta x' = 0$  se obtiene

$$\Delta t = \gamma \Delta t'. \quad (5.75)$$

Cada observador inercial encuentra que los relojes que se mueven respecto de él corren más lentamente.

La contracción de longitudes se obtiene de forma análoga. Consideremos una barra en reposo en el sistema  $S'$ , cuya longitud propia es  $\Delta x'$  (medida en  $S'$  con simultaneidad  $\Delta t' = 0$ ).

Toda medición de una distancia (longitud) requiere registrar simultáneamente las posiciones de sus extremos, es decir, imponer  $\Delta t = 0$  en el sistema donde se realiza la medida.

Para relacionarla con una medición en  $S$ , usamos

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v \Delta t). \quad (5.76)$$

La longitud en  $S$  debe medirse con simultaneidad en  $S$ , es decir  $\Delta t = 0$ . Entonces

$$\Delta x' = \gamma \Delta x \quad \implies \quad \Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma}. \quad (5.77)$$

Así, la longitud medida por el observador respecto del cual la barra está en movimiento es menor que la longitud propia.

Finalmente, las transformaciones de Lorentz implican necesariamente  $v < c$ , pues

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (5.78)$$

solo es real si  $1 - \frac{v^2}{c^2} > 0$ , es decir,

$$v^2 < c^2 \quad \Longrightarrow \quad v < c. \quad (5.79)$$

La velocidad de la luz constituye así una velocidad límite.

#### 5.4. Espacio de Minkowski

Sabemos que una transformación de Galileo no modifica la distancia entre dos puntos del espacio. En efecto,

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2. \quad (5.80)$$

Esto se debe a que, bajo una transformación galileana,

$$x' = x - vt \quad \Rightarrow \quad \Delta x' = \Delta x \quad (\Delta t = 0), \quad (5.81)$$

ya que la distancia se mide a un mismo instante de tiempo. Esta invariancia define la geometría euclídea del espacio clásico.

Las transformaciones de Lorentz, en cambio, no dejan invariante esta distancia euclídea, sino otra combinación distinta, lo que implica una geometría diferente. Consideremos dos eventos tales que

$$\Delta t = 0, \quad \Delta x, \Delta y, \Delta z \neq 0. \quad (5.82)$$

Bajo una transformación de Lorentz en la dirección  $x$ , se tiene

$$\Delta x' = \gamma \Delta x, \quad (5.83)$$

$$\Delta y' = \Delta y, \quad (5.84)$$

$$\Delta z' = \Delta z, \quad (5.85)$$

$$c \Delta t' = -\gamma \frac{v}{c} \Delta x. \quad (5.86)$$

Al evaluar la combinación

$$-c^2(\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2, \quad (5.87)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} -\gamma^2 \frac{v^2}{c^2} (\Delta x)^2 + \gamma^2 (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 &= \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \\ &= (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2, \end{aligned} \quad (5.88)$$

donde en el último paso hemos usado que  $\Delta t = 0$ .

Parece entonces que la combinación

$$-c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \quad (5.89)$$

es invariante bajo transformaciones de Lorentz.

En forma general, para un boost de Lorentz en la dirección  $x$ , los intervalos transforman como

$$c \Delta t' = \gamma \left( c \Delta t - \frac{v}{c} \Delta x \right), \quad (5.90)$$

$$\Delta x' = \gamma (\Delta x - v \Delta t), \quad (5.91)$$

$$\Delta y' = \Delta y, \quad (5.92)$$

$$\Delta z' = \Delta z. \quad (5.93)$$

Al evaluar la combinación

$$-c^2(\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2, \quad (5.94)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} -\gamma^2 \left( c^2(\Delta t)^2 + \frac{v^2}{c^2} (\Delta x)^2 - 2v \Delta t \Delta x \right) + \gamma^2 \left( (\Delta x)^2 + v^2(\Delta t)^2 - 2v \Delta t \Delta x \right) + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \\ = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2. \end{aligned} \quad (5.95)$$

Esto define una nueva noción de distancia en un espacio-tiempo de cuatro dimensiones.

El intervalo infinitesimal se escribe como

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (5.96)$$

y recibe el nombre de *elemento de línea*.

En resumen, en la mecánica clásica, las transformaciones de Galileo dejan invariante

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (5.97)$$

lo que corresponde a un espacio euclídeo. En relatividad especial, las transformaciones de Lorentz dejan invariante

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (5.98)$$

lo que define el espacio-tiempo de Minkowski. Aunque se denota  $ds^2$ , esta cantidad no es necesariamente positiva.

Este intervalo infinitesimal puede ser escrito como

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \equiv \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (5.99)$$

donde

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.100)$$

$\eta$  es conocida como la métrica del espacio-tiempo de Minkowski. Análoga a la delta de Kronecker, esta métrica permite bajar o subir índices:

$$A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu, \quad (5.101)$$

es decir

$$A_0 = -A^0, \quad A_1 = A^1, \quad A_2 = A^2, \quad A_3 = A^3. \quad (5.102)$$

También define el producto escalar (producto de Minkowski):

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu. \quad (5.103)$$

Sabemos que para un rayo de luz se cumple

$$c^2 dt^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (5.104)$$

es decir,

$$ds^2 = 0. \tag{5.105}$$

Por lo tanto, existen intervalos nulos.

Para un objeto que se desplaza con velocidad  $v$ ,

$$v^2 dt^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \tag{5.106}$$

y entonces

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + v^2 dt^2 \tag{5.107}$$

$$= (v^2 - c^2) dt^2. \tag{5.108}$$

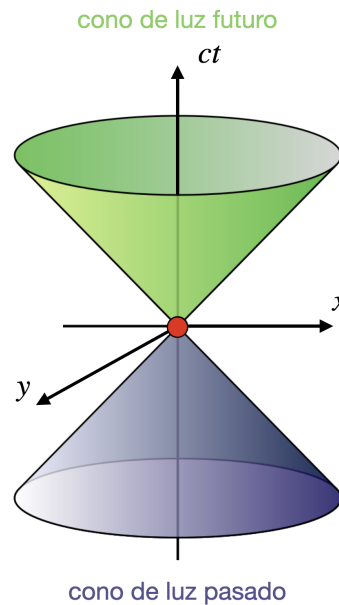
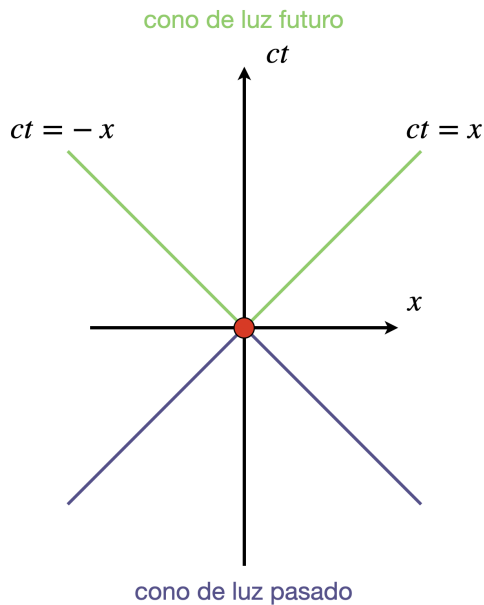
Si  $v < c$ , se tiene  $ds^2 < 0$ . Si  $v > c$ , se tendría  $ds^2 > 0$ , lo que correspondería a un movimiento superluminal, el cual es imposible. Dado que siempre  $v \leq c$ , se concluye que

$$ds^2 \leq 0. \tag{5.109}$$

Se dice que el intervalo es de **tipo tiempo**, ya que en ese caso tiene el mismo signo que la componente temporal del espacio-tiempo. Por el contrario, si  $ds^2 > 0$ , el intervalo es de **tipo espacio**.

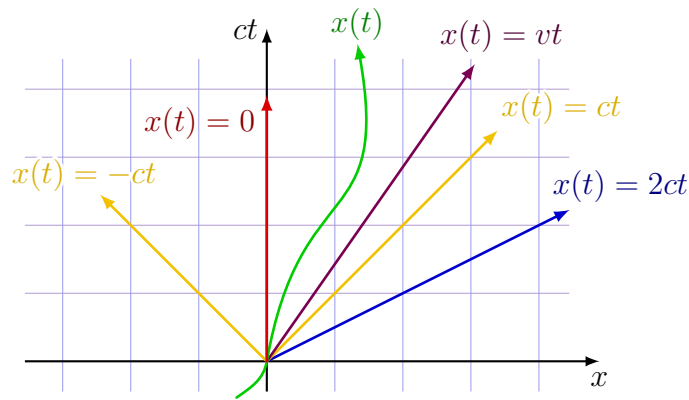
## 5.5. Diagrama de espacio-tiempo

Una herramienta fundamental para entender la estructura del espacio-tiempo, es el diagrama de espacio-tiempo. Como no es posible representar cuatro dimensiones, se utilizan diagramas bidimensionales o tridimensionales. Se eliminan algunas dimensiones espaciales por simplicidad. En ellos, la propagación de la luz define el llamado cono de luz.



- El cono de luz corresponde a las trayectorias de los rayos de luz. Son trayectorias nulas, es decir  $ds^2 = 0$ .
- Un objeto que permanece en reposo espacial tiene una trayectoria vertical en el diagrama de espacio-tiempo. Corresponde a una trayectoria de tipo tiempo, para la cual  $ds^2 < 0$ .
- Un objeto que se desplazara de manera instantánea correspondería a una trayectoria horizontal, lo que implicaría una velocidad infinita, lo cual es imposible. Esto corresponde a una trayectoria de tipo espacio, para la cual  $ds^2 > 0$ .
- Las partículas libres tienen velocidad constante; por lo tanto, su trayectoria es una recta en el diagrama de espacio-tiempo.
- Para una línea recta de la forma  $ct = \alpha x$ , la velocidad es  $v = c/\alpha$ . Por lo tanto, una trayectoria subluminal corresponde a  $\alpha > 1$ , es decir, a una recta situada dentro del cono de luz.
- La trayectoria de una partícula en el espacio-tiempo se denomina su línea de universo.

En resumen, el cono de luz separa lo físicamente posible de lo imposible en el espacio-tiempo.



Las coordenadas  $(ct, x)$  corresponden a un observador dado. Para otro observador inercial que se desplaza con velocidad  $v$ , las coordenadas se relacionan mediante (5.46)

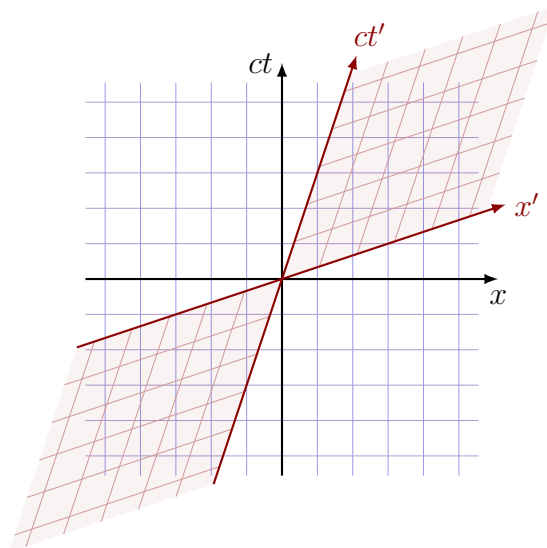
$$ct' = \gamma \left( ct - \frac{v}{c}x \right), \quad x' = \gamma(x - vt). \quad (5.110)$$

La recta  $ct' = 0$  corresponde a

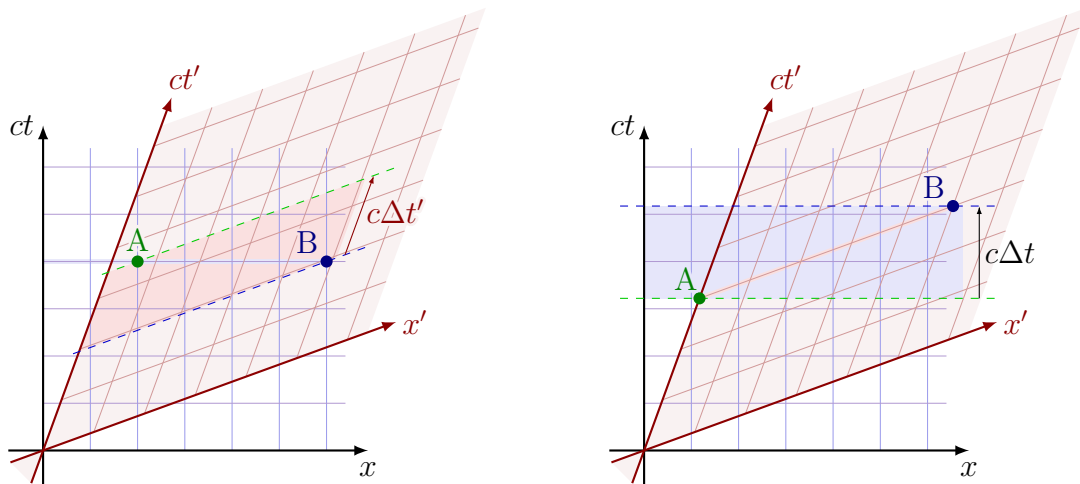
$$ct = \frac{v}{c}x, \quad (5.111)$$

es decir, corresponde al eje  $x'$  en el sistema de referencia  $(ct', x')$ , mientras que la recta  $x' = 0$ , es decir el eje  $ct'$ , corresponde a

$$ct = \frac{c}{v}x. \quad (5.112)$$



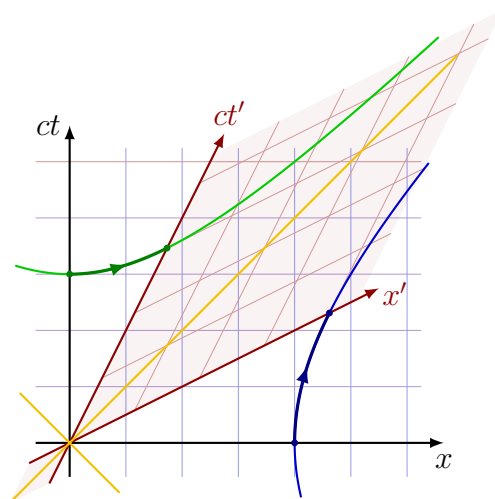
En los dos próximos diagramas, podemos ver fácilmente que la simultaneidad es un concepto relativo.



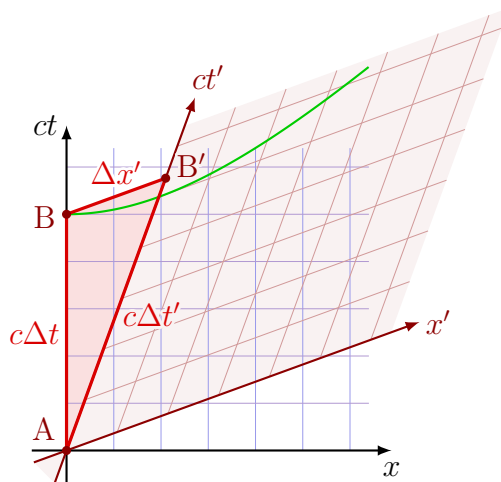
Para comparar escalas espaciales y temporales entre distintos observadores, utilizamos la invariancia del intervalo:

$$-c^2t^2 + x^2 = -c^2t'^2 + x'^2. \quad (5.113)$$

Los puntos de coordenadas constantes en un sistema se transforman en hipérbolas en el otro, lo que refleja la geometría del espacio-tiempo de Minkowski.



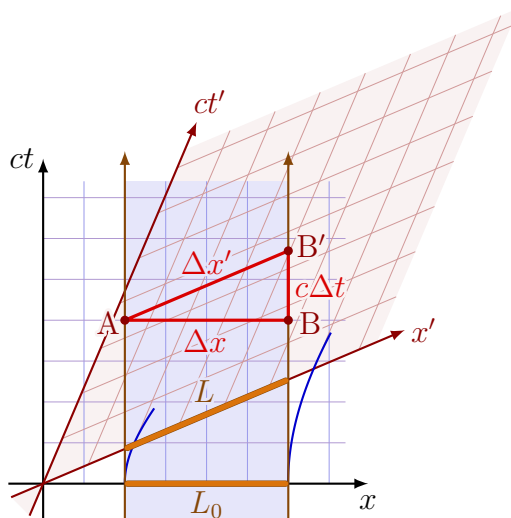
La dilatación del tiempo se interpreta geoméricamente comparando las líneas de universo.



El tiempo propio medido por un observador en reposo es medido a lo largo de la línea ( $AB$ ) aunque el tiempo medido por el observador en movimiento es definido a partir de ( $AB'$ ). Observamos fácilmente que el tiempo medido por un observador en reposo es menor al de un observador en movimiento,

$$\Delta t < \Delta t'. \quad (5.114)$$

De manera análoga, la contracción de longitudes se obtiene al medir distancias entre puntos simultáneos en un sistema de referencia

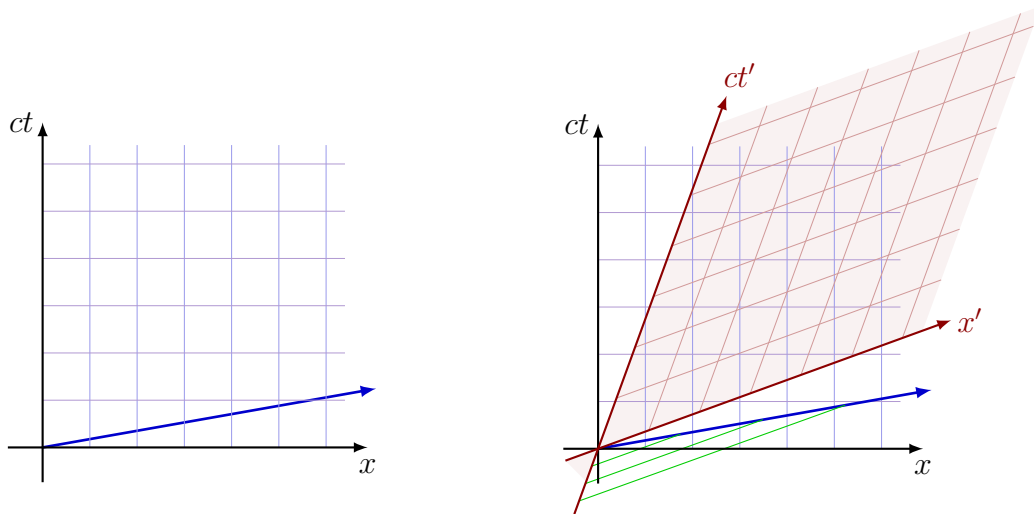


Tomando en cuenta las diferencias de escalas dibujadas por las hipérbolas en azul, observamos que

$$L < L_0. \quad (5.115)$$

Finalmente, ya hemos visto una razón fundamental por la cual no es posible viajar a una velocidad mayor que la de la luz. En el diagrama de espacio-tiempo observamos, en el dibujo izquierdo, que un viajero superluminal (en azul) parece desplazarse hacia el futuro. Sin embargo, en el dibujo derecho, ese mismo viajero es descrito desde un sistema de referencia que se mueve con velocidad  $v$ ; en este caso, el viajero azul se desplaza hacia el pasado (ver las líneas verde).

En conclusión, si existieran señales superluminales, siempre sería posible encontrar un marco inercial en el que dichas señales se propagaran hacia el pasado. Esto violaría la causalidad. Para evitar paradojas causales, es necesario que  $v < c$ .



## 5.6. El grupo de Lorentz

Hemos visto las transformaciones de Galileo y de Lorentz en las secciones anteriores. Podemos entenderlas también desde otro punto de vista: definimos una distancia entre dos puntos y exigimos que las transformaciones entre observadores la dejen invariante.

### 5.6.1. Caso euclídeo en 3D

Consideremos dos puntos del espacio representados por los vectores  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$ . La distancia al cuadrado entre ellos es

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (5.116)$$

$$= \delta_{ij}(x^i - y^i)(x^j - y^j). \quad (5.117)$$

Bajo una traslación espacial

$$x'^i = x^i + a^i, \quad y'^i = y^i + a^i, \quad (5.118)$$

se tiene

$$\delta_{ij}(x'^i - y'^i)(x'^j - y'^j) = \delta_{ij}(x^i - y^i)(x^j - y^j), \quad (5.119)$$

por lo que la distancia no cambia. De manera análoga, una traslación temporal  $t \mapsto t + a$  tampoco afecta distancias puramente espaciales.

Análogamente, bajo una rotación

$$x'^i = R^i_k x^k, \quad y'^i = R^i_l y^l, \quad (5.120)$$

con  $(R)$  una matriz de rotación, obtenemos

$$\delta_{ij}(x'^i - y'^i)(x'^j - y'^j) = \delta_{ij}R^i_k R^j_l (x^k - y^k)(x^l - y^l). \quad (5.121)$$

Como las rotaciones satisfacen

$$\delta_{ij}R^i_k R^j_l = \delta_{kl}, \quad (5.122)$$

se concluye que

$$\delta_{ij}(x'^i - y'^i)(x'^j - y'^j) = \delta_{kl}(x^k - y^k)(x^l - y^l), \quad (5.123)$$

es decir, la distancia euclídea es invariante.

La relación  $\delta_{ij}R^i_k R^j_l = \delta_{kl}$  puede ser escrita de otra forma

$$\begin{aligned} & \delta_{ij}R^i_k R^j_l = \delta_{kl} \\ \Leftrightarrow & \delta_{ij}(R^T)_k^i R^j_l = \delta_{kl} \\ \Leftrightarrow & (R^T)_{kj} R^j_l = \delta_{kl} \\ \Leftrightarrow & R^T R = I \end{aligned} \quad (5.124)$$

lo que corresponde a una matrix ortogonal.

Finalmente, para un cambio galileano de velocidad  $v$  en la dirección  $x$ ,

$$x'^1 = x^1 - vt, \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3, \quad (5.125)$$

y de manera análoga para  $y^i$ . Si medimos distancias a tiempo fijo  $\Delta t = 0$ , entonces  $\Delta x'^1 = \Delta x^1$  y resulta trivial que la distancia euclídea entre puntos simultáneos es invariante.

### 5.6.2. Caso de Minkowski en 4D

De forma similar, podemos preguntarnos, cuales son las transformaciones que dejan la distancia en 4D invariante. Para el espacio-tiempo, el intervalo (cuadrado) entre el origen y un punto  $x^\mu$  es

$$x^2 \equiv \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu, \quad (5.126)$$

y entre dos eventos  $x^\mu$  y  $y^\mu$  es

$$(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2 \equiv \eta_{\mu\nu} (x^\mu - y^\mu)(x^\nu - y^\nu). \quad (5.127)$$

Las traslaciones espaciales o temporales

$$x'^\mu = x^\mu + a^\mu \quad (5.128)$$

dejan invariante  $(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2$ .

Queremos determinar las otras transformaciones que dejan invariante esta distancia, es decir, aquellas que juegan un papel análogo al de las rotaciones o al de las transformaciones de Galileo en el espacio euclídeo. Por esta razón, consideramos la búsqueda a transformaciones lineales de la forma

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (5.129)$$

tales que el intervalo sea invariante:

$$\eta_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu. \quad (5.130)$$

Sustituyendo  $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\alpha x^\alpha$ ,

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta x^\alpha x^\beta = \eta_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta. \quad (5.131)$$

Como esto debe valer para todo  $x^\mu$ , se obtiene la condición fundamental:

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta = \eta_{\alpha\beta}. \quad (5.132)$$

$\Lambda$  son matrices  $4 \times 4$  (16 componentes) y la condición anterior impone 10 restricciones independientes, por lo que quedan 6 parámetros libre que describen estas transformaciones. Esta expresión puede ser escrita de forma matricial

$$\begin{aligned}
& \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta = \eta_{\alpha\beta} \\
\Leftrightarrow & (\Lambda^T)_{\alpha\mu} \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta = \eta_{\alpha\beta} \\
\Leftrightarrow & \Lambda^T \eta \Lambda = \eta
\end{aligned} \tag{5.133}$$

Dentro de las 6 transformaciones posible, tenemos las 3 rotaciones espacial

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}, \tag{5.134}$$

donde  $R \in SO(3)$  es una matriz de rotación  $3 \times 3$ . Por ejemplo, una rotación en el plano  $yz$  es

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \tag{5.135}$$

Se verifica directamente que satisface

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta = \eta_{\alpha\beta}. \tag{5.136}$$

Las 2 otras rotaciones, son las rotaciones en los planos  $(xy)$  y  $(xz)$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, \tag{5.137}$$

Las otras 3 transformaciones fundamentales son los **boosts**, es decir rotaciones entre una coordenada espacial y otra temporal. Un boost puede interpretarse formalmente como una rotación con funciones hiperbólicas, en contraste con las rotaciones euclídeas que involucran  $\cos \theta$  y  $\sin \theta$ . Esta es la razón matemática de que el *ángulo* asociado a un boost sea la rapidez  $\phi$ . Un boost en la dirección  $x$  se escribe convenientemente en términos de la rapidez  $\phi$ :

$$\Lambda(\phi) = \begin{pmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi & 0 & 0 \\ -\sinh \phi & \cosh \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.138}$$

La identidad hiperbólica

$$\cosh^2 \phi - \sinh^2 \phi = 1 \quad (5.139)$$

garantiza automáticamente la invariancia del intervalo o de forma equivalente la relación (5.133).

Como  $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \geq 1$ , podemos parametrizar

$$\cosh \phi = \gamma, \quad \sinh \phi = \sqrt{\gamma^2 - 1}. \quad (5.140)$$

Además,

$$\sqrt{\gamma^2 - 1} = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - 1} = \sqrt{\frac{\frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \frac{v}{c} \equiv \gamma\beta, \quad (5.141)$$

por lo que el boost se reescribe como

$$\Lambda(v) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.142)$$

que corresponde exactamente a la transformación de Lorentz para movimiento relativo en la dirección  $x$  (5.46). Para las 2 otras direcciones, tenemos

$$\Lambda(\phi) = \begin{pmatrix} \cosh \phi & 0 & -\sinh \phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sinh \phi & 0 & \cosh \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(\phi) = \begin{pmatrix} \cosh \phi & 0 & 0 & -\sinh \phi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \phi & 0 & 0 & \cosh \phi \end{pmatrix}. \quad (5.143)$$

Las 3 rotaciones y los 3 boosts forman el grupo de Lorentz. Al incluir las 4 traslaciones del espaciotiempo se obtiene el grupo de Poincaré, es decir el grupo que deja invariante, la distancia entre 2 eventos del espacio-tiempo.

Como hemos visto, un *boost* en Minkowski es, geoméricamente, una *rotación hiperbólica* en el plano  $(ct, x)$ : preserva el intervalo  $-c^2t^2 + x^2$ . Sin embargo, de manera *formal*, mediante una continuación analítica puede relacionarse con una rotación euclídea

introduciendo un tiempo imaginario. Para ello, definimos

$$\tau = i ct, \quad (5.144)$$

de modo que

$$X^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -i \tau \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (5.145)$$

Consideremos un boost en la dirección  $x$ , cuya matriz es (5.138). Si ahora tomamos un parámetro puramente imaginario,

$$\phi = i\theta, \quad (5.146)$$

y usamos

$$\cosh(i\theta) = \cos \theta, \quad \sinh(i\theta) = i \sin \theta, \quad (5.147)$$

la transformación actúa sobre el cuadrivector como

$$\begin{pmatrix} -i \tau' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \tau \cos \theta - i x \sin \theta \\ -\tau \sin \theta + x \cos \theta \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (5.148)$$

Multiplicando la primera componente por  $i$ , obtenemos

$$\begin{pmatrix} \tau' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau \cos \theta + x \sin \theta \\ -\tau \sin \theta + x \cos \theta \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (5.149)$$

Esta última transformación es exactamente una *rotación ordinaria* en el plano  $(\tau, x)$ . En resumen, un boost es una rotación hiperbólica en  $(ct, x)$ , y mediante la sustitución formal  $\tau = i ct$  junto con  $\phi = i\theta$  se obtiene una rotación euclídea en  $(\tau, x)$ .

### 5.7. Ley de adición relativista de velocidades

En relatividad las velocidades no se suman de manera galileana. Supongamos que un objeto se mueve con velocidad  $u'$  en  $(S')$ , y que  $(S')$  se mueve con velocidad  $v$  respecto de  $(S)$ , todo en la misma dirección  $x$ . La velocidad en  $(S)$  no es  $u' + v$ . Las transformaciones

inversas de  $(S')$  a  $(S)$  son

$$ct = \gamma \left( ct' + \frac{v}{c} x' \right), \quad (5.150)$$

$$x = \gamma(x' + vt'). \quad (5.151)$$

Derivando,

$$c dt = \gamma \left( c dt' + \frac{v}{c} dx' \right), \quad (5.152)$$

$$dx = \gamma(dx' + v dt'). \quad (5.153)$$

Definiendo

$$u \equiv \frac{dx}{dt}, \quad u' \equiv \frac{dx'}{dt'}, \quad (5.154)$$

obtenemos

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma(dx' + v dt')}{\gamma \left( dt' + \frac{v}{c^2} dx' \right)} = \frac{u' + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'}. \quad (5.155)$$

Esta es la ley de adición relativista de velocidades:

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}. \quad (5.156)$$

En el límite  $u'v \ll c^2$  se recupera  $u \simeq u' + v$ . Si  $u' = c$ , entonces

$$u = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c}} = c, \quad (5.157)$$

mostrando que la velocidad de la luz permanece invariante.

Es importante notar que, aunque las velocidades no se suman, para boosts en una misma dirección las rapidez sí se suman. Es decir

$$\Lambda(\phi_1) \Lambda(\phi_2) = \Lambda(\phi_1 + \phi_2), \quad \Lambda(v_1) \Lambda(v_2) \neq \Lambda(v_1 + v_2) \quad (5.158)$$

Usando (5.140,5.141), tenemos  $\tanh \phi = v/c \equiv \beta$  lo que implica

$$\phi = \operatorname{arctanh}(\beta) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) \quad (5.159)$$

Como bajo 2 boosts, tenemos  $\phi = \phi_1 + \phi_2$ , tenemos

$$\ln \left( \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) = \ln \left( \frac{1 + \beta_1}{1 - \beta_1} \right) + \ln \left( \frac{1 + \beta_2}{1 - \beta_2} \right) \quad (5.160)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + \beta}{1 - \beta} = \left( \frac{1 + \beta_1}{1 - \beta_1} \right) \left( \frac{1 + \beta_2}{1 - \beta_2} \right) \quad (5.161)$$

$$\Leftrightarrow \beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2} \quad (5.162)$$

Finalmente, considerando  $\beta = v/c$ , obtenemos

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \quad (5.163)$$

lo que corresponde a (5.156).

## 6. Cinemática relativista

### 6.1. Cuadrivelocidad y cuadraticeleración

La ecuación de Newton es invariante bajo transformaciones de Galileo. Pero si queremos una formulación invariante bajo transformaciones de Lorentz, debemos pasar al lenguaje de 4 dimensiones. Uno podría intentar definir, a partir de las coordenadas de Minkowski  $x^\mu$ , un *cuadrivector velocidad* como  $dx^\mu/dt$ . El problema es que esto *no* es un cuadrivector de Lorentz, porque el parámetro  $t$  no es invariante. En efecto, si

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad (6.1)$$

entonces

$$dx'^\mu = \Lambda^\mu_\nu dx^\nu, \quad (6.2)$$

pero el tiempo también cambia. Por ejemplo, para un boost en la dirección  $x$ ,

$$dt' = \gamma \left( dt - \frac{v}{c^2} dx \right), \quad (6.3)$$

de modo que, en general,

$$\frac{dx'^\mu}{dt'} \neq \Lambda^\mu_\nu \frac{dx^\nu}{dt}. \quad (6.4)$$

La raíz del problema es precisamente que el tiempo es relativo.

La forma correcta de resolverlo es parametrizar la línea de universo con un parámetro invariante: el *tiempo propio*. Se define en el sistema instantáneamente comóvil, donde  $d\mathbf{x}' = 0$ . En ese sistema el intervalo cumple

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2. \quad (6.5)$$

Como  $ds^2$  es invariante, en un sistema arbitrario tenemos

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + d\mathbf{x}^2, \quad d\mathbf{x}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (6.6)$$

y por lo tanto

$$-c^2 d\tau^2 = -c^2 dt^2 + d\mathbf{x}^2. \quad (6.7)$$

Dividiendo por  $(-c^2)$ ,

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{d\mathbf{x}^2}{c^2} = dt^2 \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}\right), \quad (6.8)$$

donde  $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$ . Así,

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}}. \quad (6.9)$$

Definimos la cuadrivelocidad como

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (6.10)$$

Ahora sí,  $u^\mu$  es un verdadero cuadvivector: bajo una transformación de Lorentz satisface  $u'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu u^\nu$ , porque  $dx^\mu$  transforma linealmente y  $d\tau$  es invariante. Sus componentes se obtienen directamente. Para  $\mu = 0$ , con  $x^0 = ct$ ,

$$u^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = c \frac{dt}{d\tau} = c\gamma. \quad (6.11)$$

Para  $\mu = i = 1, 2, 3$ ,

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dx^i}{dt} \frac{dt}{d\tau} = v^i \gamma, \quad (6.12)$$

y por tanto

$$u^\mu = (\gamma c, \gamma \mathbf{v}). \quad (6.13)$$

Obtenemos por lo tanto que la norma de Minkowski de la cuadrivelocidad es constante

$$u^\mu u_\mu = \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -(u^0)^2 + \sum_{i=1}^3 (u^i)^2 \quad (6.14)$$

$$= -\gamma^2 c^2 + \gamma^2 \mathbf{v}^2 = -\gamma^2 c^2 \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}\right) = -c^2. \quad (6.15)$$

Esto muestra que las cuatro componentes de  $u^\mu$  no son independientes: la condición  $u^\mu u_\mu = -c^2$  fija una relación, dejando 3 grados de libertad, como en la mecánica newtoniana, con sus 3 componentes de la velocidad.

De manera análoga, la cuadriaceleración se define como

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau}. \quad (6.16)$$

## 6.2. Cuadrimomento y energía

Definimos el cuadrimomento como

$$p^\mu = m u^\mu. \quad (6.17)$$

Entonces

$$p^\mu p_\mu = m^2 u^\mu u_\mu = -m^2 c^2. \quad (6.18)$$

Sus componentes son

$$p^i = m u^i = \gamma m v^i, \quad (6.19)$$

que es el momento relativista  $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$ , y

$$p^0 = m u^0 = \gamma m c. \quad (6.20)$$

Para velocidades pequeñas, usando  $\gamma \simeq 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots$ ,

$$p^0 = \gamma m c \simeq m c \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right) = \frac{1}{c} \left( m c^2 + \frac{1}{2} m v^2 + \dots \right). \quad (6.21)$$

Esto sugiere la identificación

$$p^0 = \frac{E}{c}, \quad p^\mu = \left( \frac{E}{c}, \mathbf{p} \right). \quad (6.22)$$

La relación invariante  $p^\mu p_\mu = -m^2 c^2$  se convierte en

$$-\frac{E^2}{c^2} + \mathbf{p}^2 = -m^2 c^2, \quad (6.23)$$

es decir,

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2}, \quad (6.24)$$

tomando la raíz positiva. En el sistema propio  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$  obtenemos

$$E = mc^2. \quad (6.25)$$

Esta ecuación significa que incluso una partícula en reposo posee energía asociada a su masa; la masa puede convertirse en energía, con un factor enorme  $c^2$ .

Para partículas sin masa,  $m = 0$ , la relación da

$$E = pc, \quad p^\mu p_\mu = 0, \quad (6.26)$$

o sea, el cuádrimomento es nulo: la partícula se mueve sobre el cono de luz y por tanto siempre a velocidad  $c$ .

Una partícula sin masa se desplaza siempre a la velocidad de la luz.

### 6.3. Ley de Newton relativista

La generalización relativista de la segunda ley de Newton es

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = f^\mu, \quad (6.27)$$

donde  $f^\mu$  es la cuádrifuerza. Sus componentes se relacionan con las cantidades tridimensionales usuales. Definiendo la fuerza 3D como

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad \mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}, \quad (6.28)$$

se tiene

$$f^i = \frac{dp^i}{d\tau} = \frac{dp^i}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma F^i. \quad (6.29)$$

Además, como  $p^0 = E/c$ ,

$$f^0 = \frac{dp^0}{d\tau} = \frac{1}{c} \frac{dE}{d\tau} = \frac{\gamma}{c} \frac{dE}{dt}. \quad (6.30)$$

Por tanto,

$$f^\mu = \left( \frac{\gamma}{c} \frac{dE}{dt}, \gamma \mathbf{F} \right). \quad (6.31)$$

Por lo tanto, la ecuación (6.27) corresponde a una generalización de la ley de Newton además de una ley de conservación de la energía.

Podemos también recuperar la relación trabajo, energía. Como  $p^\mu p_\mu = -m^2 c^2$  es constante,

$$\frac{d}{d\tau} (p_\mu p^\mu) = 0 \quad \Rightarrow \quad p_\mu \frac{dp^\mu}{d\tau} = 0. \quad (6.32)$$

Usando  $\frac{dp^\mu}{d\tau} = f^\mu$  y separando componentes,

$$-p^0 \frac{dp^0}{d\tau} + \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = 0. \quad (6.33)$$

Multiplicando por  $d\tau/dt = 1/\gamma$  y usando  $p^0 = E/c$  y  $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$ ,

$$-\frac{E}{c^2} \frac{dE}{dt} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{F} = 0. \quad (6.34)$$

Con  $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$  y  $E = \gamma m c^2$ , esto equivale a

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}, \quad (6.35)$$

que es la potencia (tasa de trabajo) realizada por la fuerza  $\mathbf{F}$  sobre la partícula.

Por último, podemos ver una tercera razón de por qué no se puede alcanzar  $v = c$ . En tres dimensiones,

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt} (\gamma m \mathbf{v}). \quad (6.36)$$

Considerando que tenemos un movimiento en una sola dirección, tenemos

$$F = m \frac{d}{dt} (\gamma v) = m \left( \gamma \frac{dv}{dt} + v \frac{d\gamma}{dt} \right) = m \left( \gamma + v \frac{d\gamma}{dv} \right) \frac{dv}{dt}. \quad (6.37)$$

Como

$$\gamma = \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2}, \quad \frac{d\gamma}{dv} = \frac{v/c^2}{\left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2}} = \gamma^3 \frac{v}{c^2}, \quad (6.38)$$

obtenemos

$$F = m \left( \gamma + v \gamma^3 \frac{v}{c^2} \right) \frac{dv}{dt} = m \gamma \left( 1 + \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{dv}{dt}. \quad (6.39)$$

Usando  $\gamma^2 \frac{v^2}{c^2} = \gamma^2 - 1$ , resulta

$$F = m \gamma \left( 1 + \gamma^2 - 1 \right) \frac{dv}{dt} = m \gamma^3 \frac{dv}{dt}. \quad (6.40)$$

Por tanto,

$$a \equiv \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m \gamma^3}, \quad (6.41)$$

y no  $a = F/m$ . Si queremos mantener una aceleración finita mientras  $v$  crece, la fuerza requerida crece como  $\gamma^3$ . En el límite  $v \rightarrow c$ ,  $\gamma \rightarrow \infty$ , y se necesitaría una fuerza infinita para alcanzar  $v = c$ . Por eso ninguna partícula masiva puede llegar a la velocidad de la luz.

De otra forma, sabemos que la energía relativista satisface la relación

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2}, \quad (6.42)$$

y el momento lineal es

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v} = \frac{m \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (6.43)$$

Por lo tanto, para una partícula masiva,

$$E = \gamma m c^2 = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (6.44)$$

Lo que implica, cuando  $v \rightarrow c$ , se tiene  $\gamma \rightarrow \infty$  y la energía requerida crece sin límite.

## 7. Dinámica relativista

En esta sección queremos ver algunas aplicaciones, en particular en física de partículas. Consideremos un proceso sin fuerzas externas, es decir  $f^\mu = 0$ . Entonces

$$f^\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dp^\mu}{d\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad p^\mu = \text{constante.} \quad (7.1)$$

En una colisión entre partículas, la conservación del cuádrimomento se escribe como

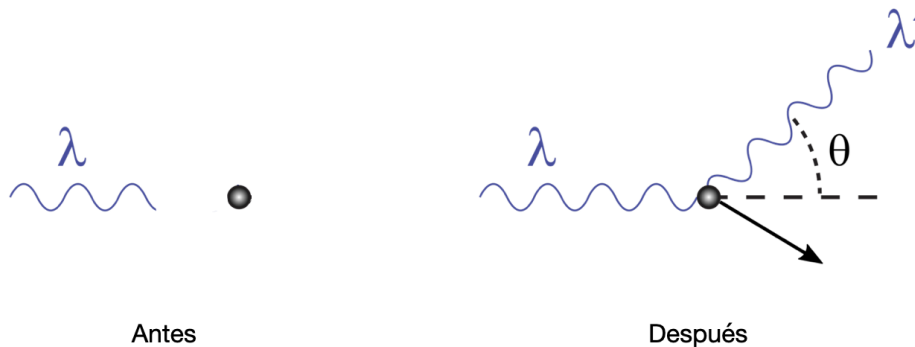
$$p_{\text{antes}}^\mu = p_{\text{después}}^\mu. \quad (7.2)$$

Equivalentemente, se obtiene a partir de (6.22) la conservación de la energía y del momento lineal

$$E_{\text{antes}} = E_{\text{después}}, \quad (7.3)$$

$$\mathbf{P}_{\text{antes}} = \mathbf{P}_{\text{después}}. \quad (7.4)$$

A partir de la conservación de la energía y del momento, se pueden analizar y calcular numerosos procesos de colisión y decaimiento. Por ejemplo, se puede obtener la dispersión de Compton<sup>1</sup>. Un fotón de longitud de onda  $\lambda$  incide sobre un electrón inicialmente en reposo. Tras el choque, el fotón sale con longitud de onda  $\lambda'$  formando un ángulo  $\theta$  con la dirección incidente.



El 4-momento del fotón incidente es

$$p_\gamma^\mu = \left( \frac{h\nu}{c}, \mathbf{p} \right), \quad |\mathbf{p}| = \frac{h\nu}{c}, \quad (7.5)$$

<sup>1</sup>será estudiado en el curso de física moderna.

y el del electrón inicialmente (en reposo) es

$$p_e^\mu = (m_e c, \mathbf{0}). \quad (7.6)$$

Después del choque,

$$p_\gamma^{\mu'} = \left( \frac{h\nu'}{c}, \mathbf{p}' \right), \quad |\mathbf{p}'| = \frac{h\nu'}{c}, \quad (7.7)$$

y para el electrón

$$p_e^{\mu'} = \left( \frac{E}{c}, \mathbf{p}_e \right), \quad E^2 = m_e^2 c^4 + |\mathbf{p}_e|^2 c^2. \quad (7.8)$$

La conservación del 4-momento se escribe

$$p_\gamma^\mu + p_e^\mu = p_\gamma^{\mu'} + p_e^{\mu'}. \quad (7.9)$$

Separando componentes temporal y espacial:

$$h\nu + m_e c^2 = h\nu' + E, \quad (7.10)$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{p}_e. \quad (7.11)$$

De (7.11) se obtiene

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{p} - \mathbf{p}', \quad (7.12)$$

y por tanto, usando que el ángulo entre  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{p}'$  es  $\theta$ ,

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}_e|^2 &= |\mathbf{p} - \mathbf{p}'|^2 = |\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{p}'|^2 - 2|\mathbf{p}||\mathbf{p}'| \cos \theta \\ &= \left( \frac{h\nu}{c} \right)^2 + \left( \frac{h\nu'}{c} \right)^2 - 2 \left( \frac{h\nu}{c} \right) \left( \frac{h\nu'}{c} \right) \cos \theta. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Insertando (7.13) en la relación relativista del electrón,

$$\begin{aligned} E^2 &= m_e^2 c^4 + |\mathbf{p}_e|^2 c^2 \\ &= m_e^2 c^4 + h^2 \nu^2 + h^2 \nu'^2 - 2h^2 \nu \nu' \cos \theta. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Por otra parte, de (7.10):

$$E = m_e c^2 + h(\nu - \nu'). \quad (7.15)$$

Elevando al cuadrado (7.15) y comparando con (7.14):

$$\left(m_e c^2 + h(\nu - \nu')\right)^2 = m_e^2 c^4 + h^2 \nu^2 + h^2 \nu'^2 - 2h^2 \nu \nu' \cos \theta. \quad (7.16)$$

Desarrollando el lado izquierdo,

$$m_e^2 c^4 + h^2(\nu - \nu')^2 + 2hm_e c^2(\nu - \nu') = m_e^2 c^4 + h^2 \nu^2 + h^2 \nu'^2 - 2h^2 \nu \nu' \cos \theta. \quad (7.17)$$

Usando  $h^2(\nu - \nu')^2 = h^2 \nu^2 + h^2 \nu'^2 - 2h^2 \nu \nu'$ , se cancela todo salvo

$$-2h^2 \nu \nu' + 2hm_e c^2(\nu - \nu') = -2h^2 \nu \nu' \cos \theta, \quad (7.18)$$

y por tanto

$$2hm_e c^2(\nu - \nu') = 2h^2 \nu \nu'(1 - \cos \theta). \quad (7.19)$$

Dividiendo por  $2h\nu\nu'$ ,

$$m_e c^2 \left( \frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} \right) = h(1 - \cos \theta). \quad (7.20)$$

Finalmente, usando  $\lambda = c/\nu$  y  $\lambda' = c/\nu'$ :

$$\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = \frac{\lambda'}{c} - \frac{\lambda}{c} = \frac{\lambda' - \lambda}{c}, \quad (7.21)$$

se obtiene

$$m_e c^2 \frac{\lambda' - \lambda}{c} = h(1 - \cos \theta), \quad (7.22)$$

es decir

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta), \quad (7.23)$$

que es la fórmula de Compton.

# Mecánica lagrangiana

## 8. Formalismo

### 8.1. Motivación

Se suele preferir la mecánica lagrangiana a la newtoniana por:

- **Generalización a distintos sistemas de coordenadas:** El formalismo lagrangiano ofrece un marco más general que puede aplicarse a una gran variedad de sistemas de coordenadas, incluidas coordenadas generalizadas que resultan más naturales en muchos problemas (por ejemplo, coordenadas polares en movimientos de rotación). Esto es especialmente útil en mecánica celeste, donde se emplean con frecuencia coordenadas no cartesianas.
- **Simetrías y leyes de conservación:** La formulación lagrangiana está ligada al principio de mínima acción, del cual se leen las simetrías del sistema. Estas simetrías se traducen en leyes de conservación mediante el teorema de Noether, lo que facilita identificar y explotar invariancias en sistemas complejos.
- **Tratamiento de restricciones:** El formalismo lagrangiano es particularmente adecuado para sistemas con restricciones (ligaduras). Estas pueden incorporarse mediante multiplicadores de Lagrange, obteniendo ecuaciones de movimiento que satisfacen automáticamente las condiciones impuestas.
- **Puente natural hacia la mecánica cuántica:** Este formalismo encaja de manera directa con la mecánica cuántica y la teoría cuántica de campos, y por eso es el lenguaje estándar para describir partículas e interacciones de campos.
- **Elegancia y economía matemática:** En muchos sistemas, el formalismo lagrangiano produce expresiones más compactas y estructuradas que la formulación

newtoniana, sobre todo en dinámica con varios grados de libertad o en espacios de mayor dimensión.

## 8.2. Principio de Fermat

El principio de Fermat afirma que, entre dos puntos  $A$  y  $B$ , la trayectoria seguida por la luz es aquella para la cual es extremo el *tiempo de propagación* a lo largo del camino. En un medio isotrópico y estacionario, la rapidez local de la luz es

$$v(\mathbf{x}) = \frac{c}{n(\mathbf{x})}, \quad (8.1)$$

de modo que el tiempo empleado por la luz al recorrer un elemento de longitud  $ds$  es

$$dt = \frac{ds}{v(\mathbf{x})} = \frac{n(\mathbf{x})}{c} ds. \quad (8.2)$$

Por tanto, el tiempo total de viaje a lo largo de una curva  $\gamma$  que une  $A$  con  $B$  es

$$T[\gamma] = \int_{\gamma} dt = \frac{1}{c} \int_{\gamma} n(\mathbf{x}) ds, \quad (8.3)$$

y el principio de Fermat se escribe como

$$\delta T = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta \left( \int_{\gamma} n(\mathbf{x}) ds \right) = 0. \quad (8.4)$$

Esta forma es la que se usa en la práctica: la trayectoria real es aquella para la cual una pequeña deformación del camino no cambia el tiempo a primer orden, considerando los puntos extremos fijos.

Un ejemplo inmediato es la ley de Snell. Consideremos dos medios homogéneos con índices constantes  $n_1$  (arriba) y  $n_2$  (abajo), separados por una interfaz plana. Sean  $A = (x_A, y_A)$  con  $y_A > 0$  y  $B = (x_B, y_B)$  con  $y_B < 0$ . El rayo cruza la interfaz en un punto  $P = (x, 0)$ , que es el único grado de libertad geométrico. El tiempo de viaje en función de  $x$  es

$$T(x) = \frac{n_1}{c} \sqrt{(x - x_A)^2 + y_A^2} + \frac{n_2}{c} \sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}. \quad (8.5)$$

La condición de Fermat impone  $dT/dx = 0$ , es decir

$$0 = \frac{dT}{dx} = \frac{n_1}{c} \frac{x - x_A}{\sqrt{(x - x_A)^2 + y_A^2}} - \frac{n_2}{c} \frac{x_B - x}{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}}. \quad (8.6)$$

Si  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son los ángulos que forman los rayos incidente y transmitido con la normal a la interfaz, entonces

$$\sin \theta_1 = \frac{x - x_A}{\sqrt{(x - x_A)^2 + y_A^2}}, \quad \sin \theta_2 = \frac{x_B - x}{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}}, \quad (8.7)$$

y la condición anterior se convierte en

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2, \quad (8.8)$$

que es precisamente la ley de Snell.

La interpretación física se ve desde la óptica ondulatoria. Una onda monocromática acumula una fase proporcional al tiempo de propagación:

$$\phi[\gamma] = \omega T[\gamma] = \frac{\omega}{c} \int_{\gamma} n(\mathbf{x}) ds. \quad (8.9)$$

El campo observado en  $B$  puede entenderse como una superposición de contribuciones con distintas fases; cuando la fase cambia rápidamente al variar el camino, las contribuciones vecinas llegan desfasadas y se cancelan por interferencia. En cambio, alrededor de los caminos para los cuales  $\delta\phi = 0$  (equivalentemente  $\delta T = 0$ ), las fases de contribuciones cercanas cambian muy poco y se refuerzan coherentemente. En el límite de longitud de onda pequeña, estos caminos dominantes son los rayos.

### 8.3. Principio de mínima acción

Conociendo dos eventos  $A$  y  $B$ , queremos determinar cuál es el camino seguido por la partícula. Para la luz, el principio de Fermat afirma que la trayectoria real hace extremo el tiempo de propagación,

$$\delta \left( \int_{\gamma} dt \right) = 0, \quad (8.10)$$

lo que en un medio isotrópico y estacionario equivale a  $\delta \left( \int_{\gamma} n(\mathbf{x}) ds \right) = 0$ . Para una partícula masiva, la magnitud físicamente relevante no es  $dt$ , sino el tiempo propio  $d\tau$  medido por un reloj que acompaña a la partícula. Por ello definimos la acción

$$S \equiv -mc^2 \int_A^B d\tau, \quad (8.11)$$

y postulamos que el camino real es aquel que extremiza  $S$ . En efecto, el signo global no tiene relevancia: si se hubiera definido  $S \equiv +mc^2 \int_A^B d\tau$  se habría hablado de una

maximización en lugar de una minimización. Por esta razón, en general se habla de *extremizar*  $S$ . El tiempo propio  $\tau$  aparece como generalización relativista del tiempo universal  $t$ . Tenemos

$$\int_A^B d\tau = \frac{1}{c} \int_A^B \sqrt{-ds^2} = \frac{1}{c} \int_A^B \sqrt{-\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \frac{1}{c} \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} dt. \quad (8.12)$$

En coordenadas cartesianas,

$$-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = c^2 - \mathbf{v}^2. \quad (8.13)$$

Por lo tanto,

$$\int_A^B d\tau = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} dt \simeq \int_{t_A}^{t_B} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}\right) dt. \quad (8.14)$$

En resumen, tenemos

$$S = -mc^2 \int_A^B d\tau \simeq -mc^2(t_B - t_A) + \int_{t_A}^{t_B} \frac{1}{2} m\mathbf{v}^2 dt. \quad (8.15)$$

El término  $mc^2(t_B - t_A)$  es constante, de modo que el camino que extremiza el tiempo propio es el que minimiza la energía cinética.

Este cálculo considera relatividad especial en ausencia de fuerzas o potenciales, por lo que aparece únicamente la energía cinética. La relatividad general incorpora estos efectos y establece que, en presencia de materia, el espacio-tiempo se deforma, es decir, la métrica se modifica. Cuando estos efectos son débiles, la métrica pasa de

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 - \frac{2U}{mc^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.16)$$

con  $U$  la energía potencial gravitacional. Entonces,

$$-mc^2 \int_A^B d\tau = -mc^2 \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{1 + \frac{2U}{mc^2} - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} dt \quad (8.17)$$

$$\simeq -mc^2(t_B - t_A) + \int_{t_A}^{t_B} \left(\frac{1}{2} m\mathbf{v}^2 - U\right) dt. \quad (8.18)$$

El camino real minimiza ahora la energía cinética menos la energía potencial gravitacional.

Este principio puede generalizarse a otras fuerzas. Definimos las coordenadas generalizadas

$$q_i \equiv \{q_1, q_2, \dots, q_N\}, \quad (8.19)$$

que describen el estado del sistema, por ejemplo

$$(x, y, z), \quad (r, \theta, \phi), \dots \quad (8.20)$$

Las velocidades generalizadas se definen como

$$\dot{q}_i \equiv \frac{dq_i}{dt}. \quad (8.21)$$

A partir de estas cantidades se define el lagrangiano,

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = T(\dot{q}_i, t) - V(q_i, t), \quad (8.22)$$

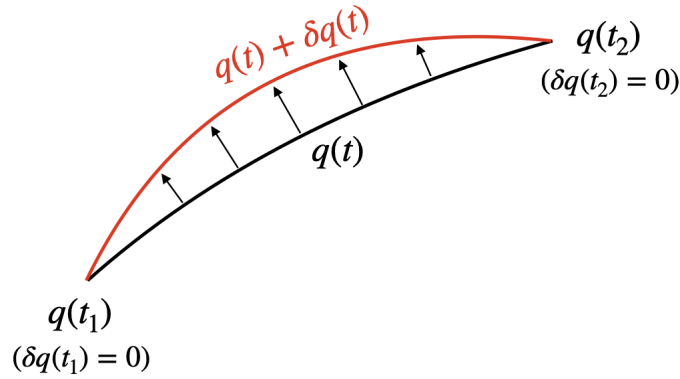
y la acción

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt. \quad (8.23)$$

El principio de acción estacionaria establece que

$$\delta S = 0. \quad (8.24)$$

Por ejemplo, para un solo grado de libertad es decir una sola coordenada  $q$  en vez de  $q_i$  podemos obtener las ecuaciones fácilmente.



Si tenemos un camino  $q(t)$ , podemos deformarlo ligeramente como

$$q(t) \longrightarrow q(t) + \delta q(t), \quad (8.25)$$

para verificar si dicho camino corresponde a un extremo de la acción. Esto equivale a imponer

$$\delta S = 0, \quad (8.26)$$

donde  $\delta S$  representa una variación infinitesimal de la acción

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (8.27)$$

con la condición

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0, \quad (8.28)$$

es decir, se imponen los mismos puntos inicial y final para todas las trayectorias consideradas.

$$\delta S \simeq \int_{t_1}^{t_2} \left[ L(q, \dot{q}, t) + \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right] dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (8.29)$$

$$\simeq \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt \quad (8.30)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \delta q \right) dt. \quad (8.31)$$

Como  $\delta\dot{q} = \frac{d}{dt}\delta q$ , podemos integrar por partes el segundo término:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \right] dt \quad (8.32)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] \delta q dt + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right|_{t_1}^{t_2}. \quad (8.33)$$

Con la condición  $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ , el término de borde se anula y queda

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] \delta q dt = 0. \quad (8.34)$$

Con la condición  $\delta S = 0$ , obtenemos la ecuación de Euler–Lagrange

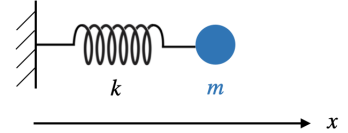
$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0. \quad (8.35)$$

Para  $N$  coordenadas, obtenemos fácilmente una generalización

$$\forall i \in \{1, \dots, N\}, \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0. \quad (8.36)$$

#### 8.4. Resorte

Como primer ejemplo, consideramos un resorte de constante  $k$  y una masa  $m$ . Llamamos la posición de la masa  $x$ , de lo cual definimos la energía cinética por  $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$  y su energía potencial  $\frac{1}{2}kx^2$ , lo que nos permite definir el lagrangiano



$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \quad (8.37)$$

lo que implica

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x} \quad (8.38)$$

y la ecuación de Euler-Lagrange (8.36) nos da

$$m\ddot{x} = -kx \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{con} \quad \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

con solución

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (8.39)$$

### 8.5. Cambio de coordenadas

Las ecuaciones de Euler–Lagrange conservan su forma bajo un cambio invertible de coordenadas generalizadas, incluso si el cambio depende explícitamente del tiempo. Sea

$$Q_i \equiv Q_i(q_1, \dots, q_N, t), \quad (8.40)$$

con jacobiano  $\det(\partial Q_i / \partial q_j) \neq 0$ , de modo que existe la transformación inversa

$$q_i \equiv q_i(Q_1, \dots, Q_N, t). \quad (8.41)$$

Derivando respecto del tiempo,

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial Q_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \dot{q}_j, \quad (8.42)$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \dot{Q}_j. \quad (8.43)$$

Partimos de un lagrangiano  $L(q, \dot{q}, t)$  y definimos el lagrangiano expresado en las nuevas coordenadas como

$$L'(Q, \dot{Q}, t) \equiv L(q(Q, t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t). \quad (8.44)$$

Aplicando la regla de la cadena (y usando que  $t$  no depende de  $Q_i$ ) obtenemos

$$\frac{\partial L'}{\partial Q_i} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_i}. \quad (8.45)$$

A partir de

$$\dot{q}_j = \frac{\partial q_j}{\partial t} + \sum_{k=1}^N \frac{\partial q_j}{\partial Q_k} \dot{Q}_k, \quad (8.46)$$

y tomando derivada parcial respecto de  $Q_i$  a  $t$  y  $\dot{Q}$  fijos, se sigue

$$\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_i} = \frac{\partial^2 q_j}{\partial Q_i \partial t} + \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 q_j}{\partial Q_i \partial Q_k} \dot{Q}_k = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \right). \quad (8.47)$$

Por otra parte,

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i}. \quad (8.48)$$

Pero de

$$\dot{q}_j = \frac{\partial q_j}{\partial t} + \sum_{k=1}^N \frac{\partial q_j}{\partial Q_k} \dot{Q}_k, \quad (8.49)$$

se obtiene inmediatamente

$$\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} = \frac{\partial q_j}{\partial Q_i}, \quad (8.50)$$

y por tanto

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial q_j}{\partial Q_i}. \quad (8.51)$$

Derivando respecto del tiempo,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_i} \right) = \sum_{j=1}^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \right) \right]. \quad (8.52)$$

En cambio,

$$\frac{\partial L'}{\partial Q_i} = \sum_{j=1}^N \left[ \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \right) \right]. \quad (8.53)$$

Restando ambas expresiones se cancelan los términos con  $\frac{d}{dt}(\partial q_j / \partial Q_i)$  y queda

$$\frac{\partial L'}{\partial Q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_i} \right) = \sum_{j=1}^N \left[ \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \frac{\partial q_j}{\partial Q_i}. \quad (8.54)$$

En particular, si en las coordenadas  $q_i$  se satisfacen las ecuaciones de Euler–Lagrange,

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0, \quad \forall j, \quad (8.55)$$

entonces también en las coordenadas  $Q_i$

$$\frac{\partial L'}{\partial Q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_i} \right) = 0, \quad \forall i. \quad (8.56)$$

Es decir, las ecuaciones de Euler–Lagrange conservan su forma bajo cambios invertibles de coordenadas generalizadas, aun cuando dependan explícitamente del tiempo.

### 8.6. Sistema de referencia en rotación

Como ejemplo, estudiaremos una partícula libre en un sistema de referencia en rotación. En las coordenadas cartesianas

$$L = \frac{1}{2}m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (8.57)$$

Consideramos un sistema de coordenadas  $(x', y', z')$  en rotación a velocidad angular constante alrededor del eje  $z$ , es decir

$$\begin{cases} x' = x \cos(\omega t) + y \sin(\omega t) \\ y' = -x \sin(\omega t) + y \cos(\omega t) \\ z' = z \end{cases} \quad (8.58)$$

o al revés

$$\begin{cases} x = x' \cos(\omega t) - y' \sin(\omega t) \\ y = x' \sin(\omega t) + y' \cos(\omega t) \\ z = z' \end{cases} \quad (8.59)$$

lo que implica

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = [\dot{x}' \cos(\omega t) - \dot{y}' \sin(\omega t) - \omega x' \sin(\omega t) - \omega y' \cos(\omega t)]^2 \quad (8.60)$$

$$+ [\dot{x}' \sin(\omega t) + \dot{y}' \cos(\omega t) + \omega x' \cos(\omega t) - \omega y' \sin(\omega t)]^2 + \dot{z}'^2 \quad (8.61)$$

$$= \dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \omega^2 x'^2 + \omega^2 y'^2 - 2\omega \dot{x}' y' + 2\omega \dot{y}' x' + \dot{z}'^2 \quad (8.62)$$

$$= (\dot{x}' - \omega y')^2 + (\dot{y}' + \omega x')^2 + \dot{z}'^2 \quad (8.63)$$

En conclusión en este sistema de coordenadas, el lagrangiano se escribe

$$L = \frac{1}{2}m [(\dot{x}' - \omega y')^2 + (\dot{y}' + \omega x')^2 + \dot{z}'^2] \quad (8.64)$$

Pero como las ecuaciones de Euler–Lagrange no cambian de forma, tenemos

$$\frac{\partial L}{\partial x'} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}'} \right) \Rightarrow m\omega (\dot{y}' + \omega x') = m \frac{d}{dt} (\dot{x}' - \omega y') \quad (8.65)$$

$$\Rightarrow \ddot{x}' - 2\omega \dot{y}' - \omega^2 x' = 0 \quad (8.66)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}'} \right) \Rightarrow -m\omega (\dot{x}' - \omega y') = m \frac{d}{dt} (\dot{y}' + \omega x') \quad (8.67)$$

$$\Rightarrow \ddot{y}' + 2\omega \dot{x}' - \omega^2 y' = 0 \quad (8.68)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z'} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{z}'} \right) \Rightarrow m \frac{d}{dt} \dot{z}' = 0 \Rightarrow \ddot{z}' = 0 \quad (8.69)$$

Lo que corresponde a las ecuaciones de Newton con fuerzas ficticias. Es decir, podemos reescribir nuestras ecuaciones de la forma siguiente

$$\ddot{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}' = 0, \quad \text{con } \mathbf{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (8.70)$$

El tercer término está relacionado a la fuerza de Coriolis mientras que el segundo a la fuerza centrífuga. Esta ecuación podía ser obtenida directamente a partir del lagrangiano. De hecho podemos ver que

$$L = \frac{1}{2}m [(\dot{x}' - \omega y')^2 + (\dot{y}' + \omega x')^2 + \dot{z}'^2] = \frac{1}{2}m (\dot{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')^2 \quad (8.71)$$

Por un lado, tenemos

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}'} = m (\dot{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \quad (8.72)$$

y nos falta calcular  $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}'}$  o en componente  $\frac{\partial L}{\partial r'_p}$

$$L = \frac{1}{2}m (\dot{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')^2 = \frac{1}{2}m \sum_i \left( \dot{r}'_i + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')_i \right) \left( \dot{r}'_i + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')_i \right) \quad (8.73)$$

$$= \frac{1}{2}m \left( \dot{r}'_i + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')_i \right) \left( \dot{r}'_i + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')_i \right), \quad (8.74)$$

$$= \frac{1}{2}m \left( \dot{r}'_i + \varepsilon_{ijk} \omega_j r'_k \right) \left( \dot{r}'_i + \varepsilon_{ilm} \omega_l r'_m \right) \quad (8.75)$$

Obtenemos

$$\frac{\partial L}{\partial r'_p} = m \varepsilon_{ijp} \omega_j \left( \dot{r}'_i + \varepsilon_{ilm} \omega_l r'_m \right) = m [(\dot{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \times \boldsymbol{\omega}]_p \quad (8.76)$$

es decir

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}'_p} = m \left( \dot{\mathbf{r}}' \times \boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \times \boldsymbol{\omega} \right) = -m \left( \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \right) \quad (8.77)$$

Lo que nos da

$$\frac{d}{dt} [m (\dot{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')] = m [-\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}' - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')] \quad (8.78)$$

y finalmente

$$m [\ddot{\mathbf{r}}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')] = \mathbf{0} \quad (8.79)$$

### 8.7. Unicidad del lagrangiano

El lagrangiano no es único: siempre se puede agregar una derivada total respecto al tiempo de una función sin modificar las ecuaciones de movimiento

$$L' = L + \frac{d}{dt} f(q, t) \quad (8.80)$$

con  $f$  una función cualquiera.

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L' dt = S + \int_{t_1}^{t_2} \frac{df(q, t)}{dt} dt = S + f(q(t_2), t_2) - f(q(t_1), t_1) = S + \text{constante}$$

lo que implica trivialmente que  $\delta S' = \delta S$ . Lo podemos demostrar también al nivel de las ecuaciones

$$\frac{\partial L'}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{d}{dt} f \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} \right] \right)}_{=0} \quad (8.81)$$

De forma similar,  $L' = \alpha L$ , con  $\alpha$  constante, conduce a las mismas ecuaciones de movimiento.

### 8.8. Multiplicadores de Lagrange

En algunas situaciones existen ecuaciones de ligadura. Por ejemplo, en un movimiento circular las coordenadas  $(x, y)$  no son libres, ya que están sujetas a la restricción

$$x^2 + y^2 = c^{\text{ste}}, \quad (8.82)$$

o, de forma más general,

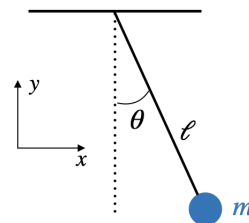
$$f(x, y) = 0, \quad f(x, y) = x^2 + y^2 - c^{\text{ste}}. \quad (8.83)$$

Las ligaduras de tipo  $f(q_i, t) = 0$  se denominan ligaduras holonómicas, mientras que las de tipo  $f(q_i, \dot{q}_i, t) = 0$  se llaman no holonómicas. Nos restringiremos al caso de ligaduras holonómicas. Si un sistema posee  $N$  variables  $\{q_i\}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , y  $P$  ligaduras

$$f_j(q_i, t) = 0, \quad j = 1, \dots, P, \quad (8.84)$$

entonces el sistema tiene  $N - P$  grados de libertad.

En el caso ilustrado, tenemos dos variables  $(x, y)$  y una ligadura  $x^2 + y^2 - \ell^2 = 0$ , por lo que el sistema posee un solo grado de libertad. Para ligaduras holonómicas, la restricción puede satisfacerse mediante un cambio de variables. En este ejemplo, podemos introducir



$$y = -\ell \cos \theta, \quad x = \ell \sin \theta, \quad (8.85)$$

donde  $\theta$  es el único grado de libertad. El lagrangiano es  $L = T - V$ , con

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2, \quad (8.86)$$

$$V = mgy = -mg\ell \cos \theta. \quad (8.87)$$

Por lo tanto,

$$L = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell \cos \theta. \quad (8.88)$$

Se obtiene

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg\ell \sin \theta, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\ell^2\dot{\theta}, \quad (8.89)$$

y finalmente la ecuación de movimiento

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0. \quad (8.90)$$

En este caso fue sencillo encontrar una variable que satisfaga la ligadura. Sin embargo, si la ecuación de ligadura es complicada y no admite un cambio de variables simple, por

ejemplo

$$x^{10} + \frac{x^3}{y} + xy^3 - 2 = 0, \quad (8.91)$$

existe un procedimiento sistemático en el formalismo lagrangiano.

Se introducen multiplicadores de Lagrange  $\{\lambda_i\}$ . Si hay  $p$  ligaduras  $f_j(q_i, t) = 0$ , se definen  $p$  multiplicadores y un nuevo lagrangiano

$$L' = L(q_i, \dot{q}_i, t) + \sum_{j=1}^p \lambda_j f_j(q_i, t). \quad (8.92)$$

Los  $\lambda_j$  se tratan como nuevas variables,

$$L' \equiv L'(q_i, \dot{q}_i, \lambda_i, t). \quad (8.93)$$

La variación respecto de  $\lambda_i$  da

$$\frac{\partial L'}{\partial \lambda_i} = f_i(q, t), \quad \frac{\partial L'}{\partial \dot{\lambda}_i} = 0, \quad (8.94)$$

y por lo tanto se recuperan las ligaduras  $f_i(q, t) = 0$ . La variación respecto de  $q_i$  conduce a

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i} = 0. \quad (8.95)$$

Como ejemplo, consideremos nuevamente el péndulo simple. El lagrangiano extendido es

$$L' = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy + \lambda(x^2 + y^2 - \ell^2). \quad (8.96)$$

De aquí se obtienen

$$x^2 + y^2 - \ell^2 = 0, \quad (8.97)$$

$$m\ddot{x} - 2\lambda x = 0, \quad (8.98)$$

$$m\ddot{y} + mg - 2\lambda y = 0. \quad (8.99)$$

Para eliminar  $\lambda$ , combinamos (8.98)  $\times x$  y (8.99)  $\times y$ ,

$$\lambda = \frac{m(x\ddot{x} + y\ddot{y} + gy)}{2\ell^2}. \quad (8.100)$$

Derivando dos veces la ligadura,

$$x\ddot{x} + y\ddot{y} + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 0, \quad (8.101)$$

obtenemos

$$\lambda = \frac{m(gy - \dot{x}^2 - \dot{y}^2)}{2\ell^2}. \quad (8.102)$$

Finalmente,

$$\begin{cases} \ddot{x} - \frac{x}{\ell^2}(gy - \dot{x}^2 - \dot{y}^2) = 0, \\ \ddot{y} + g - \frac{y}{\ell^2}(gy - \dot{x}^2 - \dot{y}^2) = 0. \end{cases} \quad (8.103)$$

Estas son las mismas ecuaciones escritas en coordenadas cartesianas. Si tomamos  $x = \ell \sin \theta$  y  $y = -\ell \cos \theta$ , se recupera

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0. \quad (8.104)$$

A partir de las ecuaciones (8.98) y (8.99) se identifica una fuerza de la forma

$$2\lambda x \mathbf{e}_x + 2\lambda y \mathbf{e}_y = 2\lambda r \mathbf{e}_r, \quad (8.105)$$

que corresponde a la fuerza de tensión del hilo, responsable de la ligadura.

### 8.9. Variable cíclica

Si el lagrangiano no depende de una coordenada generalizada, esta se denomina variable cíclica. En ese caso, la cantidad conjugada a la velocidad generalizada asociada es constante. Por ejemplo, si el lagrangiano no depende de  $q_2$ ,

$$L = L(q_1, q_3, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N, t), \quad (8.106)$$

la ecuación de movimiento correspondiente se reduce a

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) = 0. \quad (8.107)$$

Esto implica la existencia de una integral de movimiento,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = C^{\text{ste}}. \quad (8.108)$$

## 9. Teorema de Noether

En muchas situaciones aparecen cantidades conservadas. Por ejemplo, para un resorte cuya ecuación de movimiento es  $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ , la energía  $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$  es conservada porque

$$\frac{dE}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = \dot{x}(m\ddot{x} + kx) = 0. \quad (9.1)$$

El teorema de Noether explica el origen general de este tipo de conservaciones: una simetría continua de la acción (o, de forma equivalente, del integrando  $L dt$  hasta una derivada total) implica una cantidad conservada.

### 9.1. Formulación

Sea  $L(q_i, \dot{q}_i, t)$  un lagrangiano. Consideremos una familia de transformaciones

$$t' = t + \alpha \tau(t, q), \quad (9.2)$$

$$q'_i(t') = q_i(t) + \alpha \eta_i(t, q), \quad (9.3)$$

donde  $\alpha \in \mathbb{R}$  es un parámetro (constante) y  $\tau, \eta_i$  son funciones dadas. Supongamos que la transformación es una simetría de la acción,  $S$ , *hasta un término de borde*, es decir, que existe una función  $F(t, q)$  tal que, a primer orden en  $\alpha$ , y para toda trayectoria  $q(t)$

$$L(q'_i(t'), \dot{q}'_i(t'), t') dt' = L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) dt + \alpha \frac{dF}{dt} dt + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (9.4)$$

es decir

$$S[q'] = S[q] + \alpha (F(t_2, q(t_2)) - F(t_1, q(t_1))) + \mathcal{O}(\alpha^2) \quad (9.5)$$

Entonces, para cualquier movimiento físico descrito por  $q_i(t)$  que satisface las ecuaciones de Euler–Lagrange, la cantidad  $\mathcal{Q}$  no cambia con el tiempo, es decir, es una constante de movimiento

$$\mathcal{Q} = \sum_i p_i \eta_i - H \tau - F, \quad \text{con } p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad H \equiv \sum_i p_i \dot{q}_i - L \quad (9.6)$$

$\mathcal{Q}$  es la carga de Noether.

## 9.2. Demostración

Como  $t' = t + \alpha\tau$ , se tiene

$$\frac{dt'}{dt} = 1 + \alpha\dot{\tau} + \mathcal{O}(\alpha^2), \quad dt' = (1 + \alpha\dot{\tau}) dt + \mathcal{O}(\alpha^2), \quad (9.7)$$

donde  $\dot{\tau}$  es la derivada total a lo largo de la trayectoria:

$$\dot{\tau} = \frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial\tau}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial\tau}{\partial q_j} \dot{q}_j. \quad (9.8)$$

De manera análoga

$$\begin{aligned} \dot{q}'_i(t') &\equiv \frac{dq'_i(t')}{dt'} = \frac{dq'_i(t')/dt}{dt'/dt} = \frac{\dot{q}_i + \alpha\dot{\eta}_i}{1 + \alpha\dot{\tau}} = (\dot{q}_i + \alpha\dot{\eta}_i)(1 - \alpha\dot{\tau}) + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ &= \dot{q}_i + \alpha(\dot{\eta}_i - \dot{q}_i\dot{\tau}) + \mathcal{O}(\alpha^2), \end{aligned} \quad (9.9)$$

con

$$\dot{\eta}_i = \frac{d\eta_i}{dt} = \frac{\partial\eta_i}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial\eta_i}{\partial q_j} \dot{q}_j. \quad (9.10)$$

Expandimos  $L(q'(t'), \dot{q}'(t'), t')$  a primer orden:

$$L(q'_i(t'), \dot{q}'_i(t'), t') = L(q_i(t) + \alpha\eta_i, \dot{q}_i(t) + \alpha(\dot{\eta}_i - \dot{q}_i\dot{\tau}), t + \alpha\tau) \quad (9.11)$$

$$= L(q_i, \dot{q}_i, t) + \alpha \left[ \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \eta_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (\dot{\eta}_i - \dot{q}_i\dot{\tau}) + \frac{\partial L}{\partial t} \tau \right] + \mathcal{O}(\alpha^2), \quad (9.12)$$

y multiplicamos por  $dt'$  usando (9.7):

$$\begin{aligned} L(q'_i, \dot{q}'_i, t') dt' &= \left( L + \alpha[\dots] \right) (1 + \alpha\dot{\tau}) dt + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ &= \left[ L + \alpha \left( \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \eta_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{\eta}_i - \dot{\tau} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} \tau + L\dot{\tau} \right) \right] dt + \mathcal{O}(\alpha^2). \end{aligned} \quad (9.13)$$

Definimos

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad H \equiv \sum_i p_i \dot{q}_i - L \quad (9.14)$$

Entonces

$$-\dot{\tau} \sum_i p_i \dot{q}_i + L\dot{\tau} = -H\dot{\tau}, \quad (9.15)$$

y (9.13) queda

$$L(q'_i, \dot{q}'_i, t') dt' = \left[ L + \alpha \left( \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \eta_i + \sum_i p_i \dot{\eta}_i + \frac{\partial L}{\partial t} \tau - H\dot{\tau} \right) \right] dt + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (9.16)$$

Por tanto, la variación del integrando es

$$\delta(L dt) \equiv L(q'_i, \dot{q}'_i, t') dt' - L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = \alpha \left( \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \eta_i + \sum_i p_i \dot{\eta}_i + \frac{\partial L}{\partial t} \tau - H\dot{\tau} \right) dt + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (9.17)$$

Esta relación puede ser escrita de otra manera. Por eso, escribimos

$$\sum_i p_i \dot{\eta}_i = \frac{d}{dt} \left( \sum_i p_i \eta_i \right) - \sum_i \dot{p}_i \eta_i, \quad (9.18)$$

y sustituimos en (9.17):

$$\delta(L dt) = \alpha \left[ \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \dot{p}_i \right) \eta_i + \frac{d}{dt} \left( \sum_i p_i \eta_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \tau - H\dot{\tau} \right] dt + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (9.19)$$

Ahora usamos la identidad

$$\begin{aligned} \dot{H} &= \frac{d}{dt} \left( \sum_i p_i \dot{q}_i - L \right) \\ &= \sum_i \dot{p}_i \dot{q}_i + \sum_i p_i \ddot{q}_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \sum_i \left( \dot{p}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t}. \end{aligned} \quad (9.20)$$

Multiplicando por  $\tau$  y reordenando,

$$\frac{\partial L}{\partial t} \tau = -\dot{H} \tau - \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \dot{p}_i \right) \dot{q}_i \tau. \quad (9.21)$$

Sustituyendo (9.21) en (9.19) obtenemos

$$\delta(L dt) = \alpha \left[ \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \dot{p}_i \right) (\eta_i - \dot{q}_i \tau) + \frac{d}{dt} \left( \sum_i p_i \eta_i \right) - H\dot{\tau} - \dot{H}\tau \right] dt + \mathcal{O}(\alpha^2), \quad (9.22)$$

$$= \alpha \left[ \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) (\eta_i - \dot{q}_i \tau) + \frac{d}{dt} \left( \sum_i p_i \eta_i - H\tau \right) \right] dt + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (9.23)$$

Esta expresión puede ser escrita de forma más compacta, si definimos la variación a **tiempo fijo**  $t$  (usamos (9.9))

$$\begin{aligned} q'_i(t) &= q'_i(t' - \alpha\tau) = q'_i(t') - \alpha\tau \frac{d}{dt'} q'_i(t') + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ &= (q_i + \alpha\eta_i) - \alpha\tau \dot{q}_i + \mathcal{O}(\alpha^2). \end{aligned} \quad (9.24)$$

Por tanto,

$$\delta q_i(t) \equiv q'_i(t) - q_i(t) = \alpha(\eta_i - \tau \dot{q}_i) + \mathcal{O}(\alpha^2), \quad (9.25)$$

lo que nos permite escribir (9.23)

$$\delta(L dt) = \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i(t) + \alpha \left[ \frac{d}{dt} \left( \sum_i p_i \eta_i - H\tau \right) \right] dt + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (9.26)$$

La hipótesis de simetría (9.4) dice que  $\delta(L dt) = \alpha \frac{dF}{dt} dt + \mathcal{O}(\alpha^2)$ . Comparando con (9.26) se sigue que

$$\sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \alpha \frac{d}{dt} \left( \sum_i p_i \eta_i - H\tau - F \right) = 0. \quad (9.27)$$

Por lo tanto, para cualquier movimiento físico que satisfice la ecuación de Euler–Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_i p_i \eta_i - H\tau - F \right) = 0, \quad (9.28)$$

y queda probado que  $\mathcal{Q} = \sum_i p_i \eta_i - H\tau - F$  es constante.

### 9.3. Homogeneidad del espacio

Consideramos el caso de un espacio homogéneo, y un sistema de  $N$  partículas interactuando, descrito por el lagrangiano

$$L = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 - V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \quad (9.29)$$

Este lagrangiano es claramente invariante bajo traslaciones

$$\mathbf{r}_i \longmapsto \mathbf{r}_i + \alpha \mathbf{n}, \quad \text{con } \mathbf{n} \text{ un vector} \quad (9.30)$$

es decir, tenemos  $\mathbf{q}_i = \mathbf{r}_i + \alpha \mathbf{n}$ . Podemos fácilmente verificar que

$$L(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i, t) = L(\mathbf{r}_i + \alpha \mathbf{n}, \dot{\mathbf{r}}_i, t) \quad (9.31)$$

es decir, la carga de Noether es

$$Q = \sum_i \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{n} = \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{n} \quad (9.32)$$

Es decir, el momento lineal total proyectado en la dirección  $\mathbf{n}$  se conserva. Como  $\mathbf{n}$  es una dirección arbitraria, se deduce que el momento lineal total se conserva. En conclusión, la homogeneidad del espacio implica la invariancia del lagrangiano  $L$  bajo traslaciones y, por el teorema de Noether, la conservación del momento lineal total.

### 9.4. Isotropía del espacio

La isotropía del espacio implica que el lagrangiano es invariante bajo rotaciones. Dado que la carga de Noether se obtiene a partir de la variación infinitesimal (equivalentemente, derivando respecto del parámetro de la transformación y evaluando en  $\alpha = 0$ ), basta considerar una rotación de ángulo pequeño  $\alpha$ .

Cuando realizamos una rotación infinitesimal de ángulo  $\alpha$  alrededor de un eje unitario  $\mathbf{n}$ , la posición de la partícula  $i$ ,  $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ , se transforma como

$$\mathbf{r}_i \longmapsto \mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \delta \mathbf{r}_i, \quad \delta \mathbf{r}_i = \alpha \mathbf{n} \times \mathbf{r}_i. \quad (9.33)$$

Por ejemplo, para una rotación de ángulo  $\alpha$  alrededor del eje  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$ , se tiene

$$\delta \mathbf{r}_i = \alpha \mathbf{e}_z \times \mathbf{r}_i = \alpha \begin{pmatrix} -y_i \\ x_i \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.34)$$

es decir

$$x'_i = x_i - \alpha y_i, \quad y'_i = y_i + \alpha x_i, \quad z'_i = z_i. \quad (9.35)$$

lo que corresponde a una rotación infinitesimal. De hecho

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (9.36)$$

es decir

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \\ z' = z \end{cases} \quad (9.37)$$

o para  $\alpha \ll 1$

$$\begin{cases} x' = x - \alpha y = x + \alpha (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r})_x \\ y' = y + \alpha x = y + \alpha (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r})_y \\ z' = z = z + \alpha (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r})_z \end{cases} \quad (9.38)$$

Por lo tanto, para un lagrangiano que tiene esta simetría, tenemos

$$q_i = \mathbf{r}_i + \alpha \mathbf{n} \times \mathbf{r}_i \quad (9.39)$$

lo que nos da una carga de Noether

$$Q = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_i) \quad (9.40)$$

pero como  $\mathbf{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}$ , obtenemos

$$Q = \sum_i \mathbf{p}_i \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_i) = \sum_i \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{L}$$

con  $\mathbf{L}$  el momento angular. Como  $\mathbf{n}$  es cualquier, tenemos conservación del momento angular total. En conclusión, la isotropía del espacio implica la invarianza por rotación de  $L$  y por lo tanto la conservación del momento angular total.

### 9.5. Homogeneidad en el tiempo

Finalmente, consideramos la homogeneidad en el tiempo, es decir, consideramos que  $t \mapsto t + \alpha$  es una simetría. Según nuestras definiciones (9.2),  $\tau = 1$  y  $\eta_i = 0$  es decir

$$t' = t + \alpha, \quad q'(t') = q(t), \quad (9.41)$$

lo que implica que (9.4) se transforma en

$$L(q(t), \dot{q}(t), t + \alpha) = L(q(t), \dot{q}(t), t) + \alpha \frac{dF}{dt} + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (9.42)$$

Expandiendo el lado izquierdo a primer orden en  $\alpha$  se obtiene

$$L(q(t), \dot{q}(t), t + \alpha) = L(q(t), \dot{q}(t), t) + \alpha \frac{\partial L}{\partial t} + \mathcal{O}(\alpha^2), \quad (9.43)$$

y, por tanto, la condición de simetría queda

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{dF}{dt}. \quad (9.44)$$

La carga de Noether asociada es

$$\mathcal{Q} = \sum_i p_i \eta_i - H \tau - F = -H - F \quad (9.45)$$

En particular, para una homogeneidad temporal estricta,  $L$  no depende explícitamente de  $t$ , de modo que

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \implies \quad \frac{dF}{dt} = 0. \quad (9.46)$$

Por tanto,  $F$  es constante; sin pérdida de generalidad se puede tomar

$$F = 0, \quad (9.47)$$

y la cantidad conservada queda

$$\mathcal{Q} = -H, \quad \text{podemos también tomar } +H \quad (9.48)$$

lo que corresponde a la energía. Por ejemplo, si  $L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - \frac{1}{2}kx^2$ , tenemos

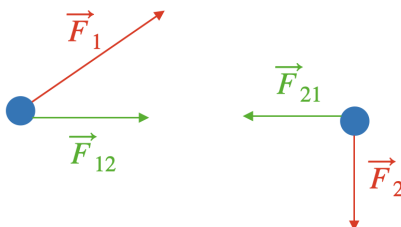
$$Q = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} - L = m\mathbf{v}^2 - \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (9.49)$$

El teorema de Noether no aplica a simetrías **discretas** como por ejemplo la simetría de reflexión  $\mathbf{r}_i \mapsto -\mathbf{r}_i$

## 10. Problema de dos cuerpos

### 10.1. Descripción del problema

Estudiamos el problema de dos cuerpos con un potencial de interacción proporcional a la distancia entre estos cuerpos.



Sobre cada una de estas partículas actúan las fuerzas exteriores al sistema y las fuerzas de interacción mutua entre las partículas del sistema.

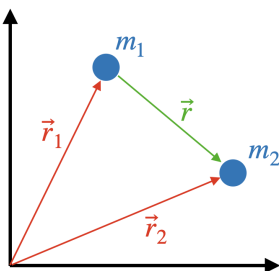
$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{12} \quad (10.1)$$

$$\frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{21} = \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_{12} \quad (10.2)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \equiv \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (10.3)$$

donde  $\mathbf{p}$  es el momento lineal total del sistema y  $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_{\text{ext}}$  es la resultante de las fuerzas exteriores. El movimiento del sistema de partículas viene determinado solamente por las fuerzas exteriores. Estudiaremos un sistema aislado es decir cuando  $\mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{0}$  o  $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{0}$ .

Sea  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  el vector entre las dos partículas, es una coordenada conveniente para nuestro estudio además de la posición del centro de masa



$$\mathbf{r}_{\text{CM}} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \quad (10.4)$$

en términos de las cuales las coordenadas originales se escriben

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{\text{CM}} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_{\text{CM}} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad (10.5)$$

lo que implica

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = (m_1 + m_2) \ddot{\mathbf{r}}_{\text{CM}} = \mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{0} \quad (10.6)$$

En ausencia de fuerzas externas, el centro de masa se moverá a velocidad constante, por esa razón es un sistema de coordenadas interesante.

## 10.2. El lagrangiano

El lagrangiano del sistema se define por

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2 - U(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|) \quad (10.7)$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \left[ \dot{\mathbf{r}}_{\text{CM}} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}} \right]^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[ \dot{\mathbf{r}}_{\text{CM}} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}} \right]^2 - U(r) \quad (10.8)$$

$$= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\mathbf{r}}_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}}^2 - U(r) \quad (10.9)$$

Observamos que la energía cinética ( $T$ ) es la suma de la energía cinética del movimiento del centro de masa más la energía cinética del movimiento en torno al centro de masa ( $T'$ ).

$$T' = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2'^2, \quad (10.10)$$

con

$$\mathbf{r}'_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \text{y} \quad \mathbf{r}'_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad (10.11)$$

Definiendo la masa total del sistema,  $M = m_1 + m_2$  y la masa reducida  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  (o  $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ ) obtenemos

$$L = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{r}}_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 - U(r) \quad (10.12)$$

Los seis grados de libertad (tres para  $\mathbf{r}_1$  y tres para  $\mathbf{r}_2$ ) se describen mediante las componentes de los vectores  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{r}_{\text{CM}}$ . Pero las componentes de  $\mathbf{r}_{\text{CM}}$  son coordenadas

cíclicas

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\text{CM}}} = \mathbf{0} \Rightarrow M \dot{\mathbf{r}}_{\text{CM}} = \text{constante} \quad (10.13)$$

El centro de masa se moverá con velocidad constante (no hay fuerzas externas) y es entonces posible describir el movimiento con respecto a un sistema inercial en el cual el centro de masa es el centro, es decir  $\mathbf{r}_{\text{CM}} = \mathbf{0}$ . En consecuencia de lo cual, el lagrangiano se reduce a

$$L = \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 - U(r). \quad (10.14)$$

Por lo tanto, hemos reducido el problema de dos cuerpos a un problema de un cuerpo equivalente de masa  $\mu$  en el campo central  $U(r)$ . Una vez que se ha obtenido  $\mathbf{r}$ , podemos obtener los movimientos individuales con ( $r_{\text{CM}} = \mathbf{0}$ )

$$\mathbf{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad (10.15)$$

### 10.3. Propiedades del movimiento

Tenemos con este lagrangiano, varias simetrías y por lo tanto cantidades conservadas. Como la energía potencial sólo depende de la distancia de la partícula al centro de fuerzas, y no de la orientación, este sistema posee simetría esférica, lo que implica que el momento angular del sistema es conservado

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \text{constante} \quad (10.16)$$

Eso implica que el vector que une a las dos partículas,  $\mathbf{r}$ , permanece siempre en un plano normal a  $\mathbf{L}$ . Es decir, nuestro problema es planar y por lo tanto se reduce a dos dimensiones (espacio ortogonal a  $\mathbf{L}$ ). Podemos usar las coordenadas polares,  $\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\mathbf{e}}_r = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta \quad (10.17)$$

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \quad (10.18)$$

El lagrangiano se escribe

$$L = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - U(r) \quad (10.19)$$

Veamos que  $\theta$  es una coordenada cíclica

$$p_\theta \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \text{constante} = \mu r^2 \dot{\theta} \quad (10.20)$$

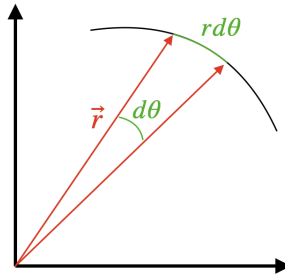
Es el momento angular del sistema, ya que

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = (r\mathbf{e}_r) \times (\mu(\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta)) = \mu r^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_z \quad (10.21)$$

Definimos  $\ell \equiv \mu r^2 \dot{\theta}$ , con  $\ell$  la norma del vector momento angular. Por lo tanto,  $\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$  es conservado. Es la velocidad areolar área barrida por el vector de posición por unidad de tiempo.

El área barrida en un tiempo  $dt$  es

$$dA = \frac{1}{2}r(rd\theta) = \frac{1}{2}r^2 d\theta \quad (10.22)$$



lo que implica

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \text{constante} \quad (10.23)$$

Es conocido como la segunda ley de Kepler (1609)

El radio vector que une un planeta y el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales

Encontramos que esta ley existe para cualquier potencial  $U(r)$  y no solamente para el potencial de interacción entre un planeta y el Sol,  $U \propto 1/r$  lo que generaliza la ley de Kepler.

La variación del lagrangiano (10.19) con respecto a las dos coordenadas  $(r, \theta)$  nos da

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial L}{\partial r} \quad (10.24)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad (10.25)$$

es decir

$$\mu \ddot{r} = \mu r \dot{\theta}^2 - U'(r) \quad (10.26)$$

$$\mu r^2 \dot{\theta} = \ell \quad (10.27)$$

lo que podemos reducir a una sola ecuación

$$\mu \ddot{r} = \frac{\ell^2}{\mu r^3} - U'(r) \quad (10.28)$$

Veamos que el problema de dos cuerpos, puede ser reducido de forma genérica a un problema en una sola dimensión. Podemos interpretar esta ecuación como el movimiento de una partícula de masa  $\mu$  en el potencial efectivo

$$U_{\text{ef}}(r) = U(r) + \frac{\ell^2}{2\mu r^2} \quad (10.29)$$

$$\mu \ddot{r} = -U'_{\text{ef}}(r) \quad (10.30)$$

#### 10.4. Problema de Kepler

Consideramos el problema anterior en el caso de una fuerza de gravitacional entre un planeta y el Sol, en este caso

$$U(r) = -\frac{k}{r} \quad (10.31)$$

con  $k$  una constante que depende de la masa del Sol y del planeta,  $k = GMm$

$$\mu \ddot{r} = \frac{\ell^2}{\mu r^3} - \frac{k}{r^2} \quad (10.32)$$

Para muchos problemas de este tipo es más interesante estudiar  $r(\theta)$  en vez de  $r(t)$ . Haciendo este cambio de variable, obtenemos

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} r'(\theta) = \frac{\ell}{\mu r^2} r'(\theta) \quad (10.33)$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{\ell^2}{\mu^2 r^2} \left( \frac{r''(\theta)}{r(\theta)^2} - 2 \frac{r'(\theta)^2}{r(\theta)^3} \right) \quad (10.34)$$

lo que transforma la ec.(10.32)

$$\frac{r''(\theta)}{r(\theta)^2} - 2 \frac{r'(\theta)^2}{r(\theta)^3} = \frac{1}{r} - \frac{k\mu}{\ell^2} \quad (10.35)$$

el problema es aún más interesante si usamos la variable  $u = 1/r$  y obtenemos

$$u''(\theta) + u(\theta) - \frac{k\mu}{\ell^2} = 0 \quad (10.36)$$

cuya solución es

$$u(\theta) = \frac{k\mu}{\ell^2} + A \cos(\theta - \theta_0) \equiv \frac{k\mu}{\ell^2} \left( 1 + e \cos(\theta - \theta_0) \right) \quad (10.37)$$

con  $e = A\ell^2/\mu k$  una constante, lo que implica

$$r(\theta) = \frac{\ell^2/k\mu}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)} \quad (10.38)$$

La constante  $\theta_0$  corresponde solamente al ángulo desde cuando empezamos a medir nuestro ángulo  $\theta$ , por lo tanto lo podemos fijar a  $\theta_0 = 0$ . También podemos ver que si tomamos  $\theta_0 = \pi$ , es similar al reemplazo  $e \rightarrow -e$ . Por lo tanto, podemos considerar  $e \geq 0$ . Aparecen 4 casos

- $e = 0$ , en este caso la trayectoria es circular  $r(\theta) = \frac{\ell^2}{k\mu}$
- $0 < e < 1$ , la trayectoria es un elipse, en este caso  $e$  se llama la excentricidad.
- $e = 1$ , la trayectoria no es acotada, tenemos una parábola.
- $e > 1$ , la trayectoria es una hipérbola.

En el caso de un elipse, sabemos que  $\dot{\theta} = \ell/\mu r^2$ , es decir

$$\dot{\theta} = \frac{k^2\mu}{\ell^3} (1 + e \cos \theta)^2 \quad (10.39)$$

lo que implica que

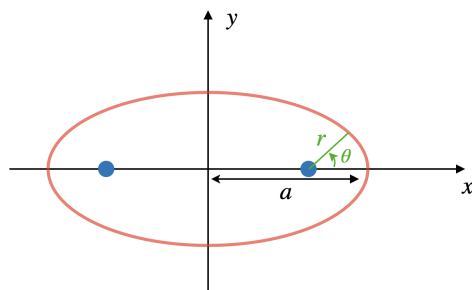
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2} = \frac{k^2 \mu}{\ell^3} \int dt = \frac{k^2 \mu}{\ell^3} T \quad (10.40)$$

con  $T$  el periodo de nuestro movimiento. Como

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2} = \frac{2\pi}{(1 - e^2)^{3/2}} \quad (10.41)$$

obtenemos

$$T = \frac{\ell^3}{k^2 \mu} \frac{2\pi}{(1 - e^2)^{3/2}} \quad (10.42)$$



Sabemos que el semieje mayor,  $a$ , es obtenido con la relación  $2a = r(\theta = 0) + r(\theta = \pi)$ , es decir

$$a = \frac{\ell^2 / k\mu}{1 - e^2} \quad (10.43)$$

lo que nos permite concluir que

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}} a^{3/2} \Leftrightarrow T^2 = 4\pi^2 \frac{\mu}{k} a^3 \quad (10.44)$$

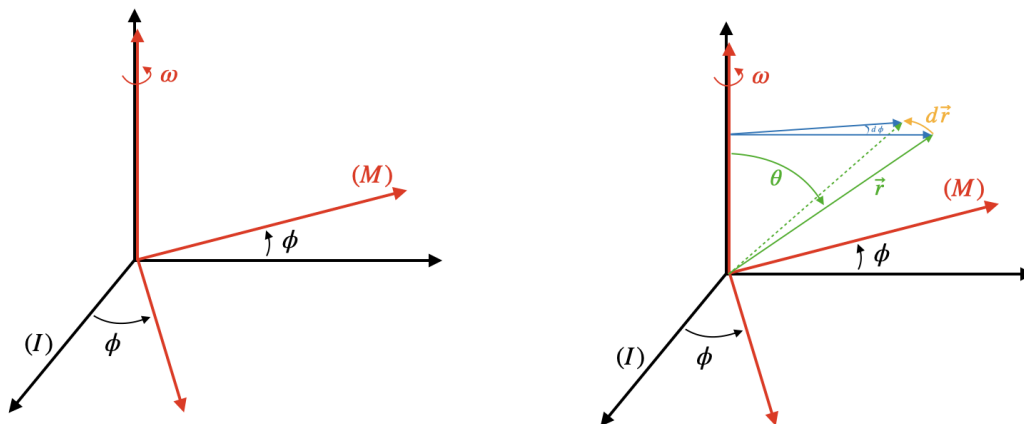
es decir la tercera ley de Kepler (1618)

Para cualquier planeta, el cuadrado de su periodo orbital es directamente proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de su órbita elíptica.

## 11. Sistema de referencia no inercial

### 11.1. Descripción del problema

Consideramos dos sistemas de referencia,  $(I)$  un sistema inercial y  $(M)$  un sistema en rotación alrededor de un eje común entre  $(I)$  y  $(M)$ , en este caso el eje  $\hat{z}$ .



Se define la *velocidad angular*  $\omega = \dot{\phi} \mathbf{e}_z$ . Este vector mide el cambio del ángulo  $\phi(t)$  con una dirección definida por la regla de la mano derecha.

Un vector  $\mathbf{r}$ , fijo en  $(M)$ , se desplaza en  $(I)$  por la rotación de  $(M)$ . Para un desplazamiento infinitesimal  $d\phi$ , el vector se transforma en  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$  con  $dr = r \sin \theta d\phi$  y una dirección indicada en el gráfico,  $d\mathbf{r}$  es ortogonal al plano  $(\omega, \mathbf{r})$

$$d\mathbf{r} = d\phi \times \mathbf{r}, \quad \text{con} \quad d\phi = d\phi \mathbf{e}_z \quad (11.1)$$

De hecho,

$$d\phi \times \mathbf{r} = d\phi \mathbf{e}_z \times \left( r \cos \theta \mathbf{e}_z + r \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + r \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y \right) \quad (11.2)$$

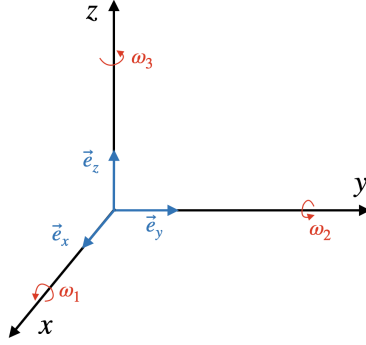
$$= r \sin \theta d\phi \underbrace{(\cos \phi \mathbf{e}_y - \sin \phi \mathbf{e}_x)}_{\text{ortogonal a } \omega \text{ y } \mathbf{r}} \quad (11.3)$$

De esta relación, concluimos que

$$\left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_{\text{fijo}} = \omega \times \mathbf{r}, \quad \text{con} \quad \omega \equiv \dot{\phi} \mathbf{e}_z \quad (11.4)$$

De manera mas genérica, consideramos el caso con

$$\omega = \omega_1 \mathbf{e}_x + \omega_2 \mathbf{e}_y + \omega_3 \mathbf{e}_z \quad (11.5)$$



Estudiamos primero el efecto de la rotación  $\omega_1$  sobre los vectores unitarios. Obviamente, en este caso,  $\mathbf{e}_x$  no cambia. El vector  $\mathbf{e}_y$  cambia de  $d\mathbf{e}_y$  lo que corresponde a una rotación de ángulo  $d\theta_1$ , ( $\omega_1 = \dot{\theta}_1\mathbf{e}_x$ ).

$$\mathbf{e}_y + d\mathbf{e}_y = \cos(d\theta_1)\mathbf{e}_y + \sin(d\theta_1)\mathbf{e}_z \simeq \mathbf{e}_y + d\theta_1\mathbf{e}_z \quad (11.6)$$

$$\Rightarrow d\mathbf{e}_y = d\theta_1\mathbf{e}_z \quad (11.7)$$

$$\mathbf{e}_z + d\mathbf{e}_z = -\sin(d\theta_1)\mathbf{e}_y + \cos(d\theta_1)\mathbf{e}_z \simeq -d\theta_1\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \quad (11.8)$$

$$\Rightarrow d\mathbf{e}_z = -d\theta_1\mathbf{e}_y \quad (11.9)$$

De manera similar, considerando una rotación por  $\omega_2 = \dot{\theta}_2\mathbf{e}_y$ . El vector  $\mathbf{e}_y$  no cambia mientras que el vector  $\mathbf{e}_x$  se transforma en

$$\mathbf{e}_x + d\mathbf{e}_x = -\sin(d\theta_2)\mathbf{e}_z + \cos(d\theta_2)\mathbf{e}_x \quad (11.10)$$

$$\Rightarrow d\mathbf{e}_x = -d\theta_2\mathbf{e}_z \quad (11.11)$$

$$\mathbf{e}_z + d\mathbf{e}_z = \cos(d\theta_2)\mathbf{e}_z + \sin(d\theta_2)\mathbf{e}_x \quad (11.12)$$

$$\Rightarrow d\mathbf{e}_z = d\theta_2\mathbf{e}_x \quad (11.13)$$

Finalmente considerando la rotación con respecto a  $\omega_3$ , tenemos

$$d\mathbf{e}_x = d\theta_3\mathbf{e}_y \quad (11.14)$$

$$d\mathbf{e}_y = -d\theta_3\mathbf{e}_x \quad (11.15)$$

Considerando el efecto infinitesimal, de las tres rotaciones, tenemos

$$\begin{cases} d\mathbf{e}_x = d\theta_3\mathbf{e}_y - d\theta_2\mathbf{e}_z \\ d\mathbf{e}_y = d\theta_1\mathbf{e}_z - d\theta_3\mathbf{e}_x \\ d\mathbf{e}_z = d\theta_2\mathbf{e}_x - d\theta_1\mathbf{e}_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{e}}_x = \omega_3\mathbf{e}_y - \omega_2\mathbf{e}_z \\ \dot{\mathbf{e}}_y = \omega_1\mathbf{e}_z - \omega_3\mathbf{e}_x \\ \dot{\mathbf{e}}_z = \omega_2\mathbf{e}_x - \omega_1\mathbf{e}_y \end{cases} \quad (11.16)$$

es decir

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i, \quad \text{con } i = \{x, y, z\} \quad (11.17)$$

Consideramos ahora un vector  $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ , en un sistema de referencia no inercial, es decir,  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  son los vectores unitarios de este sistema de referencia. Queremos conocer su variación en el sistema de referencia fijo (inercial)

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{fijo}} &= \underbrace{\frac{dx}{dt}\mathbf{e}_x + \frac{dy}{dt}\mathbf{e}_y + \frac{dz}{dt}\mathbf{e}_z}_{\text{velocidad en el sistema de referencia en rotación}} + \underbrace{x\frac{d\mathbf{e}_x}{dt} + y\frac{d\mathbf{e}_y}{dt} + z\frac{d\mathbf{e}_z}{dt}}_{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}} \quad (11.18) \\ &\equiv \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{rotación}} \end{aligned}$$

es decir

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{fijo}} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{rotación}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (11.19)$$

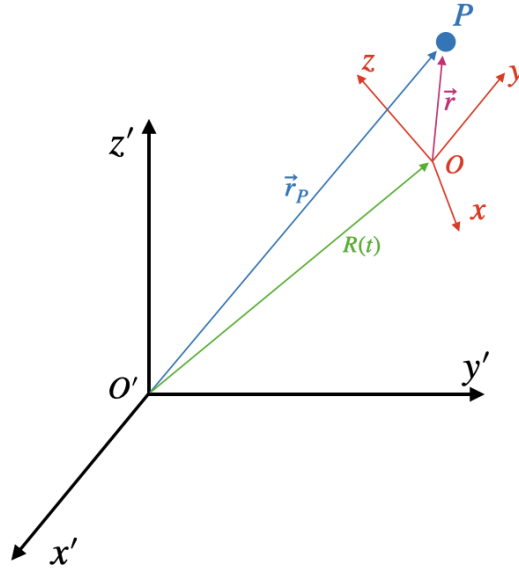
Aunque hemos obtenido esta relación para el vector posición  $\mathbf{r}$ , es válida para cualquier vector  $\mathbf{Q}$

$$\left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\right)_{\text{fijo}} = \left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\right)_{\text{rotación}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{Q} \quad (11.20)$$

En particular, si consideramos  $\mathbf{Q} = \boldsymbol{\omega}$ , tenemos

$$\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_{\text{fijo}} = \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_{\text{rotación}} \quad (11.21)$$

Es decir, la aceleración angular  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  es la misma en ambos sistemas de referencia.



Ahora consideramos dos sistemas de referencias sin centro  $O$  en común, con  $(\mathcal{R}') = (O'x'y'z')$  un sistema de referencia inercial aunque  $(\mathcal{R}) = (Oxyz)$  no es inercial. De  $\mathbf{r}_P = \mathbf{R}(t) + \mathbf{r}$ , obtenemos

$$\left(\frac{d\mathbf{r}_P}{dt}\right)_{\text{fijo}} = \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right)_{\text{fijo}} + \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{fijo}} \quad (11.22)$$

pero

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{fijo}} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{rotación}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (11.23)$$

lo que implica

$$\left(\frac{d\mathbf{r}_P}{dt}\right)_{\text{fijo}} = \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right)_{\text{fijo}} + \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{rotación}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (11.24)$$

Definimos

- $\mathbf{v}_P \equiv \left(\frac{d\mathbf{r}_P}{dt}\right)_{\text{fijo}}$ , la velocidad de  $P$  en  $(\mathcal{R}')$
- $\mathbf{v} \equiv \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{rotación}}$ , la velocidad de  $P$  en  $(\mathcal{R})$
- $\mathbf{V}(t) \equiv \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right)_{\text{fijo}}$ , la velocidad de  $O$  en  $(\mathcal{R})$

es decir

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{V}(t) + \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (11.25)$$

## 11.2. Dinámica

Con esta relación podemos ahora armar el lagrangiano. En el sistema inercial ( $\mathcal{R}'$ ), tenemos  $L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_P^2 - U$  para una partícula con masa  $m$ , velocidad  $\mathbf{v}_P$  y bajo un potencial  $U$ . Sabemos que  $\mathbf{v}_P = \mathbf{V}(t) + \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$  con  $\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \equiv \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{fijo}}$ , es decir

$$\mathbf{v}_P^2 = \mathbf{V}(t)^2 + \mathbf{v}^2 + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 + 2\mathbf{V}(t) \cdot \underbrace{(\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})}_{\equiv \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{fijo}}} + 2\mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (11.26)$$

lo que nos permite obtener

$$L = \underbrace{\frac{1}{2}m\mathbf{V}(t)^2}_{\equiv \frac{dF(t)}{dt}} + \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 + \underbrace{m\mathbf{V}(t) \cdot \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{fijo}}}_{\frac{d}{dt}(m\mathbf{V}(t) \cdot \mathbf{r}) - \underbrace{\frac{d\mathbf{V}(t)}{dt} \cdot \mathbf{r}}_{\equiv \mathbf{A}(t)}} + m\mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - U \quad (11.27)$$

El primero termino depende solamente del tiempo y es conocido, por lo tanto se puede escribir usando una cierta función, como  $F'(t)$ .

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 + m\mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - m\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}(t) - U + \underbrace{\frac{d}{dt}[F(t) + m\mathbf{V}(t) \cdot \mathbf{r}]}_{\text{puede ser eliminado}} \quad (11.28)$$

$$= \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 + m\mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - m\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}(t) - U \quad (11.29)$$

En conclusión, el lagrangiano en el sistema de referencia no inercial es

$$L(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 + m\mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - m\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}(t) - U \quad (11.30)$$

Sabemos que la ecuación de Euler-Lagrange es

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \quad (11.31)$$

Obtenemos

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v} + m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (11.32)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \right) = m\mathbf{a} + m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \quad (11.33)$$

Para calcular  $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}$ , tenemos que usar las formulas

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 = \omega^2 \mathbf{r}^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})^2 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 = 2\omega^2 \mathbf{r} - 2(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} \quad (11.34)$$

también tenemos  $\mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega})$  lo que implica

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})) = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} \quad (11.35)$$

es decir

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = m\omega^2 \mathbf{r} - m(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} + m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} - m\mathbf{A}(t) - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \quad (11.36)$$

lo que implica

$$\begin{aligned} m\mathbf{a} + \underbrace{m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}}_{-m\mathbf{r} \times \dot{\boldsymbol{\omega}}} + \underbrace{m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}}_{-m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}} &= m\omega^2 \mathbf{r} - m(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} + m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} - m\mathbf{A}(t) - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \\ m\mathbf{a} &= \underbrace{m\omega^2 \mathbf{r} - m(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\omega}}_{m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times \boldsymbol{\omega}} + 2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} + m\mathbf{r} \times \dot{\boldsymbol{\omega}} - m\mathbf{A}(t) - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \end{aligned}$$

y finalmente

$$m\mathbf{a} = m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times \boldsymbol{\omega} + 2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} + m\mathbf{r} \times \dot{\boldsymbol{\omega}} - m\mathbf{A}(t) - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \quad (11.37)$$

Los términos de la parte derecha pueden ser interpretado en el formalismo newtoniano como fuerzas (ficticias), con  $m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times \boldsymbol{\omega}$  la fuerza centrífuga,  $2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$  la fuerza de Coriolis y finalmente  $m\mathbf{r} \times \dot{\boldsymbol{\omega}}$  la fuerza de Euler.

Para finalizar esta sección, demostraremos las formulas ocupadas previamente

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})_i \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})_i = \varepsilon_{ijk} \omega_j r_k \varepsilon_{ilm} \omega_l r_m \quad (11.38)$$

$$= \underbrace{\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm}}_{\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}} \omega_j \omega_l r_k r_m \quad (11.39)$$

$$= \delta_{jl} \delta_{km} \omega_j \omega_l r_k r_m - \delta_{jm} \delta_{kl} \omega_j \omega_l r_k r_m \quad (11.40)$$

$$= \omega_j \omega_j r_k r_k - \omega_j r_j \omega_l r_l \quad (11.41)$$

$$= (\boldsymbol{\omega})^2 (\mathbf{r})^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})^2 \quad (11.42)$$

$$\mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = v_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})_i = v_i \varepsilon_{ijk} \omega_j r_k \quad (11.43)$$

$$= \varepsilon_{ijk} v_i \omega_j r_k \quad (11.44)$$

$$= \varepsilon_{jki} v_i \omega_j r_k = \omega_j (\mathbf{r} \times \mathbf{v})_j = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \quad (11.45)$$

$$= \varepsilon_{kij} v_i \omega_j r_k = r_k (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega})_k = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) \quad (11.46)$$

$$\boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{r} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) \boldsymbol{\omega} = \omega_i \omega_i \mathbf{r} - \omega_i r_i \boldsymbol{\omega} \quad (11.47)$$

$$= \omega_i \omega_i r_j \mathbf{e}_j - \omega_i r_i \omega_j \mathbf{e}_j \quad (11.48)$$

$$= (\omega_i \omega_i r_j - \omega_i \omega_j r_i) \mathbf{e}_j \quad (11.49)$$

$$= (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{kj}) \omega_i \omega_k r_l \mathbf{e}_j \quad (11.50)$$

$$= \varepsilon_{mij} \varepsilon_{mkl} \omega_i \omega_k r_l \mathbf{e}_j \quad (11.51)$$

$$= \varepsilon_{mij} \omega_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})_m \mathbf{e}_j \quad (11.52)$$

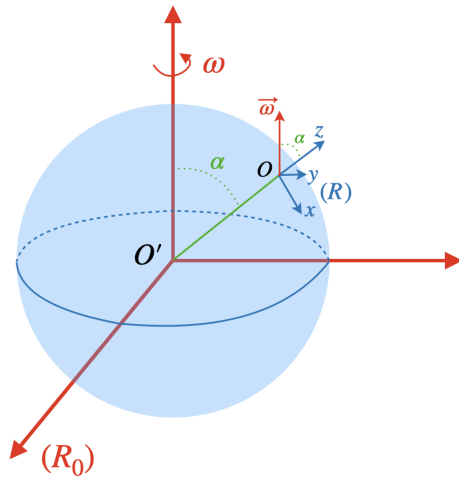
$$= \varepsilon_{jmi} \omega_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})_m \mathbf{e}_j \quad (11.53)$$

$$= ((\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times \boldsymbol{\omega})_j \cdot \mathbf{e}_j \quad (11.54)$$

$$= (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times \boldsymbol{\omega} \quad (11.55)$$

### 11.3. Péndulo de Foucault

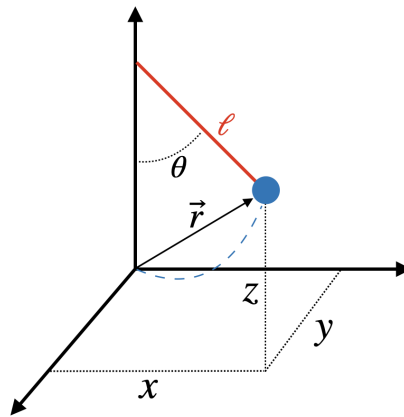
Como aplicación, estudiamos el péndulo de Foucault. El objetivo es analizar la dinámica de un péndulo simple descrito en el sistema de referencia del laboratorio, que es un sistema no inercial debido a la rotación de la Tierra.



$(\mathcal{R}_0)$  es un sistema fija (con direcciones hacia estrellas lejanas) y  $(\mathcal{R})$  es el sistema de referencia no inercial asociado al laboratorio. Tenemos

$$\boldsymbol{\omega} = \omega (-\sin \alpha \mathbf{e}_x + \cos \alpha \mathbf{e}_z) \quad (11.56)$$

Estudiaremos el movimiento de este péndulo con una masa que se encuentra en la posición  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , por lo tanto  $\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ .



Sabemos que

$$L = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2} m (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 + m \mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - m \mathbf{r} \cdot \mathbf{A}(t) - U \quad (11.57)$$

La energía potencial de gravitación es

$$U = -m \mathbf{g} \cdot \mathbf{r} = -m (-g \mathbf{e}_z) \cdot (x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z) = mgz \quad (11.58)$$

y también tenemos

$$\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (11.59)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} &= \omega(-\sin\alpha\mathbf{e}_x + \cos\alpha\mathbf{e}_z) \times (x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z) \\ &= \omega(-y\sin\alpha\mathbf{e}_z + z\sin\alpha\mathbf{e}_y + x\cos\alpha\mathbf{e}_y - y\cos\alpha\mathbf{e}_x) \end{aligned} \quad (11.60)$$

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 &= \omega^2(y^2\cos^2\alpha + (z\sin\alpha + x\cos\alpha)^2 + y^2\sin^2\alpha) \\ &= \omega^2(y^2 + (z\sin\alpha + x\cos\alpha)^2) \end{aligned} \quad (11.61)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) &= \omega(\dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y + \dot{z}\mathbf{e}_z) \cdot (-y\cos\alpha\mathbf{e}_x + (z\sin\alpha + x\cos\alpha)\mathbf{e}_y - y\sin\alpha\mathbf{e}_z) \\ &= \omega(-y\dot{x}\cos\alpha + \dot{y}z\sin\alpha + \dot{y}x\cos\alpha - \dot{z}y\sin\alpha) \end{aligned} \quad (11.62)$$

Nos queda calcular  $\mathbf{A}(t)$ , es decir la aceleración de  $O$  en  $(\mathcal{R}_0)$

$$\mathbf{O}'\mathbf{O} = R_{\oplus}\mathbf{e}_z \quad (11.63)$$

con  $R_{\oplus}$  el radio de la Tierra y

$$\mathbf{e}_z = \cos\alpha\mathbf{e}'_z + \sin\alpha\cos\phi\mathbf{e}'_x + \sin\alpha\sin\phi\mathbf{e}'_y \quad (11.64)$$

lo que implica

$$\mathbf{V}(t) = R_{\oplus}\dot{\phi}\left[-\sin\alpha\sin\phi\mathbf{e}'_x + \sin\alpha\cos\phi\mathbf{e}'_y\right], \quad \text{con } \dot{\phi} = \omega \quad (11.65)$$

lo que implica

$$\mathbf{A}(t) = R_{\oplus}\dot{\omega}\left[-\sin\alpha\sin\omega t\mathbf{e}'_x + \sin\alpha\cos\omega t\mathbf{e}'_y\right] - R_{\oplus}\omega^2\left[\sin\alpha\cos\omega t\mathbf{e}'_x + \sin\alpha\sin\omega t\mathbf{e}'_y\right] \quad (11.66)$$

La rotación de la Tierra es casi uniforme  $\dot{\omega} \simeq 0$  y  $\omega^2 \ll 1$  de hecho  $\omega = \frac{2\pi}{1 \text{ día}} = 0,000073 \text{ rad/s}$  por lo tanto podemos aproximar

$$\mathbf{A}(t) \simeq \mathbf{0} \quad y \quad (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 \simeq 0 \quad (11.67)$$

El lagrangiano de una partícula libre se reduce a

$$L \simeq \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + m\omega(-y\dot{x}\cos\alpha + \dot{y}z\sin\alpha + \dot{y}x\cos\alpha - \dot{z}y\sin\alpha) - mgz \quad (11.68)$$

pero estudiamos un péndulo, es decir,  $(x, y, z)$  no son independiente

$$(l - z)^2 + x^2 + y^2 = l^2 \quad (11.69)$$

$$\Leftrightarrow z = l \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{l^2}} \right) \quad (11.70)$$

Esta expresión de  $z$  es una ecuación de ligadura y la podemos reemplazar en el lagrangiano. Pero también queremos estudiar las pequeñas oscilaciones es decir  $x \ll l, y \ll l$ .

$$z = l \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{l^2}} \right) \simeq l \left( 1 - \left( 1 - \frac{x^2 + y^2}{2l^2} \right) \right) \simeq \frac{x^2 + y^2}{2l} \quad (11.71)$$

es decir,  $z$  es de orden dos. Para evaluar el orden de cada termino del lagrangiano, obtenemos

$$\begin{aligned} L &\simeq \frac{1}{2}m \left( \underbrace{\dot{x}^2}_{\text{orden 2}} + \underbrace{\dot{y}^2}_{\text{orden 2}} + \underbrace{\dot{z}^2}_{\text{orden 4}} \right) + m\omega \left( \underbrace{-\dot{y}x}_{\text{orden 2}} \cos \alpha + \underbrace{\dot{y}z}_{\text{orden 3}} \sin \alpha + \underbrace{\dot{y}x}_{\text{orden 2}} \cos \alpha - \underbrace{\dot{z}y}_{\text{orden 3}} \sin \alpha \right) \\ &\quad - mg \underbrace{z}_{\text{orden 2}} \\ &= \frac{1}{2}m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m \underbrace{\omega \cos \alpha}_{\equiv \beta} (x\dot{y} - y\dot{x}) - \frac{1}{2}m \underbrace{\frac{g}{l}}_{\equiv \omega_0^2} (x^2 + y^2) + \text{términos de orden superior} \end{aligned}$$

lo que nos da finalmente

$$L \equiv L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m\beta(x\dot{y} - y\dot{x}) - \frac{1}{2}m\omega_0^2 (x^2 + y^2) \quad (11.72)$$

Tenemos 2 ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial L}{\partial x} \Rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{x} - m\beta y) = m\beta \dot{y} - m\omega_0^2 x \quad (11.73)$$

$$\Rightarrow \ddot{x} - 2\beta \dot{y} + \omega_0^2 x = 0 \quad (11.74)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{\partial L}{\partial y} \Rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{y} + m\beta x) = -m\beta \dot{x} - m\omega_0^2 y \quad (11.75)$$

$$\Rightarrow \ddot{y} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 y = 0 \quad (11.76)$$

Son dos osciladores acoplados, con el acoplamiento  $\beta = \omega \cos \alpha$ . Se observa que no hay acoplamiento en el ecuador ( $\alpha = \pi/2$ ).

Para resolver estas ecuaciones, se define  $\xi = x + iy$

$$\ddot{\xi} + 2i\beta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = 0 \quad (11.77)$$

Podemos buscar soluciones de la forma  $e^{\gamma t}$

$$\xi(t) = e^{-i\beta t} \left( Ae^{i\sqrt{\beta^2 + \omega_0^2} t} + Be^{-i\sqrt{\beta^2 + \omega_0^2} t} \right) \quad (11.78)$$

con  $A$  y  $B$  las condiciones iniciales. Podemos considerar que el péndulo se encuentra en una posición sin velocidad inicial  $\dot{\xi}(0) = 0$

$$\dot{\xi}(t) = -i\beta e^{-i\beta t} \left( Ae^{i\sqrt{\beta^2 + \omega_0^2} t} + Be^{-i\sqrt{\beta^2 + \omega_0^2} t} \right) + i\sqrt{\beta^2 + \omega_0^2} e^{-i\beta t} \left( Ae^{i\sqrt{\beta^2 + \omega_0^2} t} - Be^{-i\sqrt{\beta^2 + \omega_0^2} t} \right) \quad (11.79)$$

$$\dot{\xi}(0) = -i\beta(A + B) + i\sqrt{\beta^2 + \omega_0^2}(A - B) = 0 \quad (11.80)$$

es decir

$$B = \frac{\sqrt{\beta^2 + \omega_0^2} - \beta}{\sqrt{\beta^2 + \omega_0^2} + \beta} A \quad (11.81)$$

lo que implica

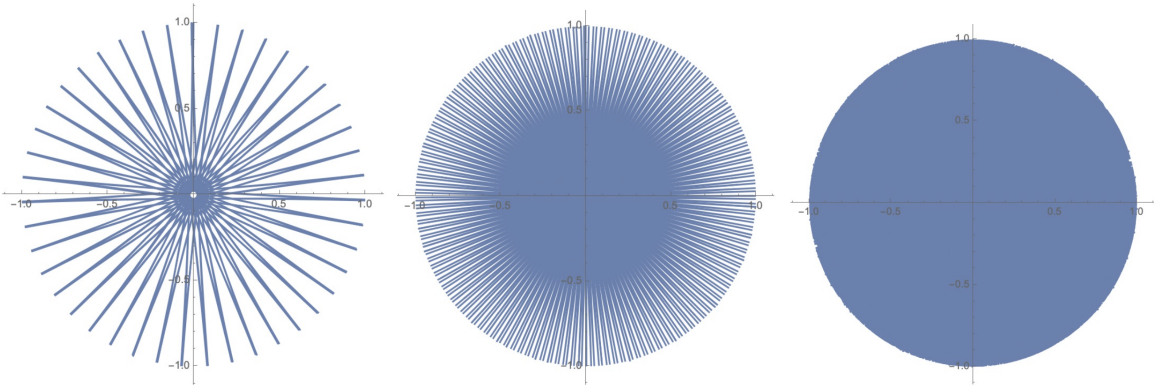
$$\xi(t) = \frac{2A}{\sqrt{\beta^2 + \omega_0^2} + \beta} e^{-i\beta t} \underbrace{\left[ \sqrt{\beta^2 + \omega_0^2} \cos \left( \sqrt{\beta^2 + \omega_0^2} t \right) + i\beta \sin \left( \sqrt{\beta^2 + \omega_0^2} t \right) \right]}_{\text{ecuación de un elipse en el espacio complejo}} \quad (11.82)$$

De hecho para un elipse  $x = a \cos \theta$ ,  $y = b \sin \theta$  es decir  $z = x + iy = a \cos \theta + ib \sin \theta$ , lo que nos permite concluir que  $\sqrt{\beta^2 + \omega_0^2}$  es el eje mayor y  $\beta$  el eje menor. El factor  $e^{-i\beta t}$  es un factor de rotación, hace que el elipse tiene rotación en el tiempo.

Durante un día,  $\omega t = 2\pi$  por lo tanto, el péndulo gira de

$$\beta t = \omega t \cos \alpha \equiv 2\pi \cos \alpha$$

El péndulo gira de  $2\pi \cos \alpha$  cada día.

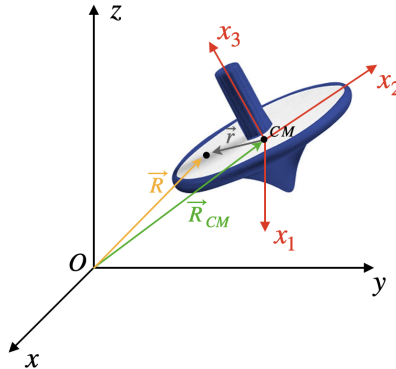


Movimiento del péndulo en el plano  $(x, y)$  para  $\alpha = 45^\circ$  y  $\ell = \{1000 \text{ km}, 100 \text{ km}, 100 \text{ m}\}$

## 12. Sólido rígido

### 12.1. Definición

Un cuerpo rígido es un sistema de partículas cuyas distancias mutuas son fijas, es decir, no varían en el tiempo. La descripción del movimiento se puede hacer en términos de la posición de su centro de masa y de la orientación relativa del cuerpo en el espacio. Esto requiere de dos sistemas de coordenadas:



- Un sistema inercial (laboratorio) denotado por  $(x, y, z)$ .
- Un sistema en movimiento, fijo en el cuerpo, con origen en el centro de masa, identificado por  $(x_1, x_2, x_3)$ .

La posición  $\mathbf{R}$  de cualquier punto  $P$  del cuerpo rígido en un instante dado con respecto al sistema de referencia del laboratorio  $(x, y, t)$  es

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{CM} + \mathbf{r} \quad (12.1)$$

con  $\mathbf{r}$  la posición de  $P$  con respecto al sistema fijo en el cuerpo. Considerando un desplazamiento infinitesimal de  $P$  en el laboratorio,

$$d\mathbf{R} = d\mathbf{R}_{CM} + d\mathbf{r} \quad (12.2)$$

Un cambio infinitesimal  $d\mathbf{r}$  en las coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$  sólo puede deberse a un cambio de dirección del vector  $\mathbf{r}$  no a un cambio de su magnitud (puesto que la distancia de  $P$  al centro de masa es fija). Es decir, un cambio  $d\mathbf{r}$  debe ser el resultado de una rotación infinitesimal alrededor de un eje dado instantáneo que pasa por el centro de masa. Como lo hemos obtenido en la ec.(11.19)

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{fijo}} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{rotación}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (12.3)$$

pero en un sólido rígido, los puntos no se mueven dentro del sólido, es decir

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{rotación}} = 0 \quad (12.4)$$

lo que implica

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{fijo}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (12.5)$$

es decir, a partir (12.2)

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{CM} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (12.6)$$

con  $\boldsymbol{\omega}$  la velocidad angular instantánea de rotación,  $\mathbf{v} = d\mathbf{R}/dt$  la velocidad de  $P$  en el laboratorio  $(x, y, z)$ ,  $\mathbf{v}_{CM} = d\mathbf{R}_{CM}/dt$  la velocidad del centro de masa en el laboratorio  $(x, y, z)$ .

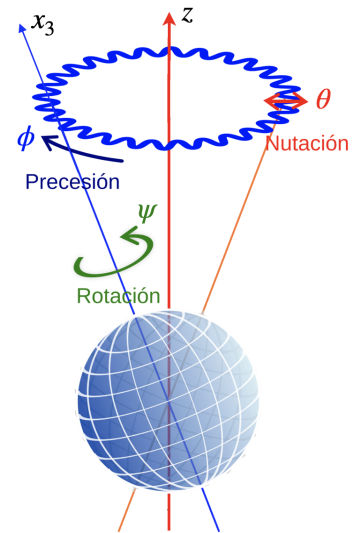
En un instante dado, todos los puntos del cuerpo están girando con la misma velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$ . Obviamente, la dirección y la magnitud de  $\boldsymbol{\omega}$  pueden cambiar durante el movimiento.

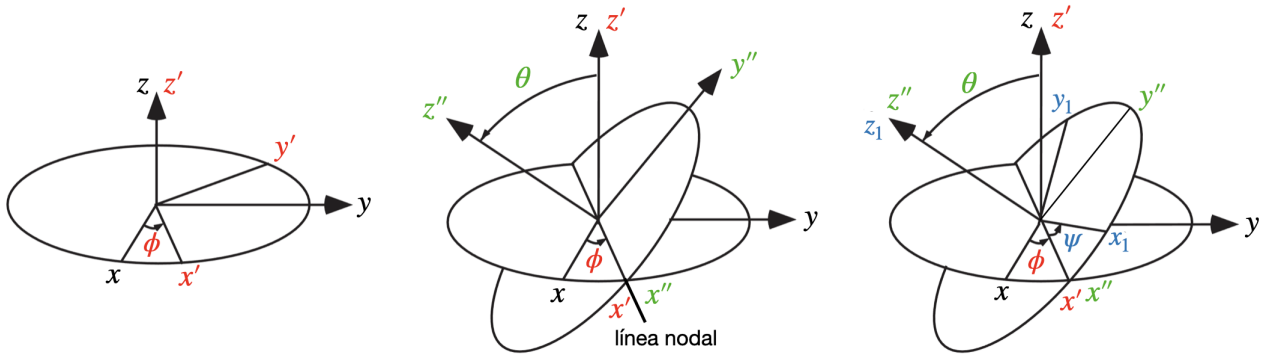
## 12.2. Ángulos de Euler

La dirección de  $\mathbf{r}$  está dada por la orientación relativa de los ejes  $(x_1, x_2, x_3)$  con respecto a los ejes  $(x, y, z)$ . La descripción de la orientación relativa entre dos sistemas de coordenadas cartesianas requiere de tres ángulos entre los respectivos ejes de cada sistema.

- Precesión: rotación alrededor de un eje fijo en el laboratorio
- Nutación: inclinación con respecto al eje fijo
- Rotación: rotación del cuerpo sobre sí mismo

Necesitamos por lo tanto tres rotaciones.





Tenemos 3 rotaciones, que descomponemos en 3 ángulos  $(\phi, \theta, \psi)$ . La primera rotación, nos permite pasar de  $(x, y, z)$  a  $(x', y', z')$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \Lambda_\phi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{con } \Lambda_\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (12.7)$$

en la segunda rotación, pasamos de  $(x', y', z')$  a  $(x'', y'', z'')$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \Lambda_\theta \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad \text{con } \Lambda_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (12.8)$$

y finalmente la rotación para pasar de  $(x'', y'', z'')$  a  $(x_1, y_1, z_1)$  es

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \Lambda_\psi \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}, \quad \text{con } \Lambda_\psi = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (12.9)$$

lo que implica la transformación

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \Lambda_\psi \Lambda_\theta \Lambda_\phi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv \Lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (12.10)$$

con

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & \cos \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \sin \psi & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \cos \psi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (12.11)$$

### 12.3. Velocidad angular mediante los ángulos de Euler

Podemos definir la velocidad angular en el sistema de coordenadas  $(\hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{z}_1)$ . Sabemos que

$$\omega = \dot{\phi}\hat{z} + \dot{\theta}\hat{x}' + \dot{\psi}\hat{z}'' \quad (12.12)$$

Por ejemplo, tenemos  $\hat{z}'' = \hat{z}_1$ , lo que implica que

$$\dot{\psi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (12.13)$$

De forma similar

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \Lambda_\psi \Lambda_\theta \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (12.14)$$

lo que implica  $\hat{x}' = \cos \psi \hat{x}_1 - \sin \psi \hat{y}_1$ , es decir

$$\dot{\theta} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos \psi \\ -\dot{\theta} \sin \psi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (12.15)$$

y finalmente

$$\dot{\phi} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \\ \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \\ \dot{\phi} \cos \theta \end{pmatrix} \quad (12.16)$$

La velocidad angular instantánea  $\omega$  de un cuerpo rígido es por lo tanto  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  con

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \end{cases} \quad (12.17)$$

### 12.4. Energía cinética

A partir de la velocidad angular, podemos deducir la energía cinética

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}_i^2 \quad (12.18)$$

con  $m_i$  la masa de cada partícula y  $\mathbf{v}_i$  la velocidad de cada partícula "i" del solido. Pero sabemos que

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{V}_{CM} + \omega \times \mathbf{r}_i \quad (12.19)$$

lo que implica

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{V}_{CM} + \omega \times \mathbf{r}_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left\{ \mathbf{V}_{CM}^2 + 2\mathbf{V}_{CM} \cdot (\omega \times \mathbf{r}_i) + (\omega \times \mathbf{r}_i)^2 \right\} \quad (12.20)$$

Descomponiendo el calculo, obtenemos

$$\frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{V}_{CM}^2 = \frac{1}{2} V_{CM}^2 \sum_i m_i = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 \equiv T_{CM}, \quad (12.21)$$

con  $M$  la masa del solido. Es la energía cinética del centro de masa con la masa total del cuerpo. Para el segundo termino, ocupamos la relación

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (12.22)$$

$$\sum_i m_i \mathbf{V}_{CM} (\omega \times \mathbf{r}_i) = (\mathbf{V}_{CM} \times \omega) \underbrace{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}_{=\mathbf{0}} = \mathbf{0} \quad (12.23)$$

porque el origen es el centro de masa. Finalmente, para el último calculo, usamos la relación

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \quad (12.24)$$

lo que implica

$$\frac{1}{2} m_i (\omega \times \mathbf{r}_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left[ \omega^2 \mathbf{r}_i^2 - (\omega \cdot \mathbf{r}_i)^2 \right] \equiv T_{rot} \quad (12.25)$$

Es la energía de rotación ya que depende de  $\omega$ . En conclusión, tenemos

$$T = T_{CM} + T_{rot} \quad (12.26)$$

Le energía cinética de rotación puede ser expresada de otra forma. Definimos las coordenadas de una partícula "i" en el punto  $P_i$  como

$$\mathbf{r}_i = \left( x_1(P_i), x_2(P_i), x_3(P_i) \right) \quad (12.27)$$

lo que implica

$$\omega \cdot \mathbf{r}_i = \sum_j \omega_j x_j(P_i) \quad (12.28)$$

y por lo tanto

$$(\omega \cdot \mathbf{r}_i)^2 = \left[ \sum_j \omega_j x_j(P_i) \right] \left[ \sum_k \omega_k x_k(P_i) \right] = \sum_{j,k} \omega_j \omega_k x_j(P_i) x_k(P_i) \quad (12.29)$$

y también

$$\omega^2 = \sum_j \omega_j \omega_j = \sum_{j,k} \omega_j \omega_k \delta_{jk} \quad (12.30)$$

lo que implica

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left[ \sum_{j,k} \left( \omega_j \omega_k \delta_{jk} \mathbf{r}_i^2 - \omega_j \omega_k x_j(P_i) x_k(P_i) \right) \right] \quad (12.31)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j,k} \omega_j \omega_k \sum_i m_i \left( \mathbf{r}_i^2 \delta_{jk} - x_j(P_i) x_k(P_i) \right) \quad (12.32)$$

$$\equiv \frac{1}{2} \sum_{j,k} I_{jk} \omega_j \omega_k \quad (12.33)$$

donde hemos definido el tensor de inercia del cuerpo rígido

$$I_{jk} = \sum_i m_i \left( \mathbf{r}_i^2 \delta_{jk} - x_j x_k \right) \quad (12.34)$$

Este objeto puede ser expresado como una matriz

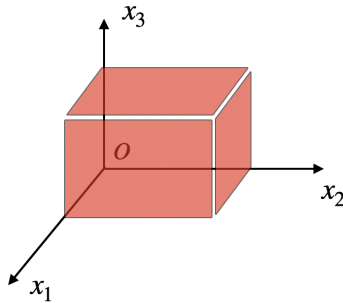
$$I = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i m_i (x_2^2 + x_3^2) & -\sum_i m_i x_1 x_2 & -\sum_i m_i x_1 x_3 \\ -\sum_i m_i x_2 x_1 & \sum_i m_i (x_1^2 + x_3^2) & -\sum_i m_i x_2 x_3 \\ -\sum_i m_i x_3 x_1 & -\sum_i m_i x_3 x_2 & \sum_i m_i (x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix} \quad (12.35)$$

$I$  es simétrico  $I_{jk} = I_{kj}$  lo que conduce a tenemos 6 componentes independientes. Cada componente del tensor expresa la resistencia o inercia de un cuerpo a ser rotado en torno a un eje dado. Por ejemplo,  $I_{33}$  mide la resistencia del cuerpo a ser rotado alrededor del eje  $x_3$ . Para una distribución continua de masa, pasamos al límite continuo es decir, reemplazamos la suma por una integral.

$$\sum_i m_i \rightarrow \int \rho d^3x \quad (12.36)$$

con  $\rho$  la densidad de masa del cuerpo.

$$I_{jk} = \int \rho(\mathbf{r}) (\mathbf{r}^2 \delta_{jk} - x_j x_k) d^3x \quad (12.37)$$



Por ejemplo, si queremos calcular el momento de inercia asociado a un cubo homogéneo. Es decir,  $\rho$  constante

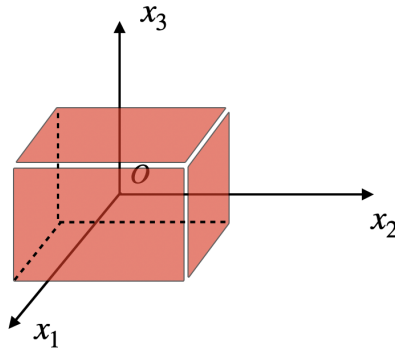
$$I_{11} = \int \rho (x_2^2 + x_3^2) d^3x = \rho \int_0^b dx_3 \int_0^b dx_2 (x_2^2 + x_3^2) \int_0^b dx_1 = \frac{2}{3} \rho b^5 = \frac{2}{3} M b^2 \quad (12.38)$$

$$I_{12} = -\rho \int_0^b x_1 dx_1 \int_0^b x_2 dx_2 \int_0^b dx_3 = -\frac{1}{4} \rho b^5 = -\frac{1}{4} M b^2 \quad (12.39)$$

las demás componentes se calculan de la misma forma

$$I = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\beta & -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{1}{4}\beta & \frac{2}{3}\beta & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta & \frac{2}{3}\beta \end{pmatrix} \text{ con } \beta = M b^2 \quad (12.40)$$

a partir de lo cual podemos calcular la energía cinética de rotación. Es importante entender que el tensor depende del centro con respecto a lo cual lo calculamos. De hecho, tomando como centro, el centro del cubo obtenemos



$$I_{12} = \int \rho (r^2 \delta_{12} - x_1 x_2) d^3 x = \rho \int_{-b/2}^{b/2} x_1 dx_1 \int_{-b/2}^{b/2} x_2 dx_2 \int_{-b/2}^{b/2} dx_3 = 0 \quad (12.41)$$

$$I_{11} = \rho \int_{-b/2}^{b/2} dx_3 \int_{-b/2}^{b/2} dx_2 (x_2^2 + x_3^2) \int_{-b/2}^{b/2} dx_1 = \frac{\beta}{6} \quad (12.42)$$

de lo cual obtenemos

$$I = \frac{\beta}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (12.43)$$

Notemos que existe una relación entre los 2 tensores, es el *teorema de los ejes paralelos*.

Sea  $I_{jk}$  el tensor de inercia de un cuerpo rígido expresado en el sistema de coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$  con origen en el centro de masa del sólido. En un sistema diferente de coordenadas fijas  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  cuyo origen  $O'$  se encuentra en una posición  $\mathbf{a}$  con respecto al centro de masa del cuerpo, el tensor de inercia es

$$I'_{jk} = I_{jk} + \sum_i m_i [a^2 \delta_{jk} - a_j a_k] \quad (12.44)$$

Se demuestra considerando  $\mathbf{r}_j = \mathbf{a} + \mathbf{r}'_j \dots$

Por ejemplo para el cubo

$$\mathbf{a} = \left( -\frac{b}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{b}{2} \right) \quad (12.45)$$

Vimos por ejemplo que  $I_{11} = \beta/6$ , lo que implica

$$I'_{11} = \frac{\beta}{6} + \rho \int \underbrace{(a^2 - a_1^2)}_{\frac{3}{4}b^2 - \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{2}} d^3x = \frac{\beta}{6} + M \frac{b^2}{2} = \frac{2}{3}\beta \quad (12.46)$$

En termino de clasificación, cuando tenemos  $I_{11} = I_{22} = I_{33}$  y  $I_{ij} = 0$  para  $i \neq j$  se llama el trompo esférico (como la esfera). Los cuerpos como la varilla tienen  $I_{11} = I_{22} \neq I_{33}$  se llaman trompo simétrico y aquellos como la caja de cerillas, que cumplen la condición  $I_{11} \neq I_{22} \neq I_{33}$  se denominan trompo asimétrico.

Obviamente esta clasificación depende del punto que se considere en el solido. Una esfera homogénea es un trompo esférico en el centro de masa y un trompo simétrico en otro punto.

## 12.5. Momento angular

Hemos visto que el tensor de inercia nos permite calcular la energía cinética de rotación. Nos permite también calcular el momento angular. Calculamos  $\mathbf{L}$  con origen en el centro de masa

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times (m_i \mathbf{v}_i) = \sum_i \mathbf{r}_i \times (m_i \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \quad (12.47)$$

usando  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$  tenemos

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i \left( \mathbf{r}_i^2 \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}_i \right) \quad (12.48)$$

La componente  $k$  es

$$L_k = \sum_i m_i \left( \mathbf{r}_i^2 \omega_k - (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) x_k(P_i) \right) \quad (12.49)$$

$$= \sum_i m_i \left[ \sum_j r_i^2 \omega_j \delta_{jk} - \sum_j x_j(P_i) \omega_j x_k(P_i) \right] \quad (12.50)$$

$$= \sum_j \omega_j \sum_i m_i \left( r_i^2 \delta_{jk} - x_j x_k \right) = \sum_j I_{kj} \omega_j \quad (12.51)$$

donde  $x_k(P_i)$  es la coordenada  $k$  de la posición de la partícula  $i$ . La relación previa se escribe de forma vectorial

$$\mathbf{L} = I \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (12.52)$$

Lo que nos permite reescribir la energía de rotación

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{jk} I_{jk} \omega_j \omega_k = \frac{1}{2} \sum_k L_k \omega_k = \frac{1}{2} \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (12.53)$$

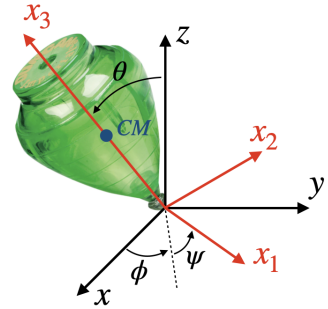
Las ecuaciones pueden plantearse en términos de los ángulos de Euler, que describen los grados de libertad

$$L = T - V = L(\theta, \phi, \psi, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}, t), \quad \text{con } T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} I_{ij} \omega_i \omega_j \quad (12.54)$$

## 12.6. Trompo de Lagrange

Consideramos un trompo de masa  $m$  en el campo gravitacional y cuyo punto inferior  $O$  está fijo. Es un trompo simétrico con respecto al centro de masa,  $I_{11} = I_{22} \neq I_{33}$  con  $(x, y, z)$  las coordenadas del laboratorio y  $(x_1, x_2, x_3)$  las coordenadas fijas con el cuerpo. Ambos sistemas de referencia tienen origen en el punto  $O$ , lo que implica que

$$T_{\text{traslación}} = 0$$



En el sistema de coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$ , el centro de masa es fijo, por lo tanto, no hay energía cinética asociada, excepto la energía cinética de rotación

$$T = T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} (I_{11} \omega_1^2 + I_{22} \omega_2^2 + I_{33} \omega_3^2) = \frac{1}{2} I_{11} (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} I_{33} \omega_3^2 \quad (12.55)$$

con

$$\omega_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \quad (12.56)$$

$$\omega_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \quad (12.57)$$

$$\omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \quad (12.58)$$

lo que implica

$$T = \frac{1}{2} I_{11} (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_{33} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 \quad (12.59)$$

aunque la energía potencial del trompo, con respecto a 0 es

$$V = mgz = mga \cos \theta \quad (12.60)$$

Lo que nos permite armar el lagrangiano del sistema

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}I_{11}(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - mga \cos \theta$$

No vamos a derivar todas las ecuaciones. Observamos en particular que las coordenadas  $(\psi, \phi)$  son cíclicas lo que nos permite obtener

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \text{constante} \Leftrightarrow I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = I_{33}\omega_3 = \text{constante} \equiv L_3 \quad (12.61)$$

lo que corresponde a la conservación del momento angular alrededor del eje  $\hat{x}_3$ .

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \text{constante} \Leftrightarrow I_{11}\dot{\phi} \sin^2 \theta + I_{33} \cos \theta (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \quad (12.62)$$

En las coordenadas  $(x, y, z)$ , corresponde a la conservación de  $L_z$ . Lo podemos fácilmente demostrar a partir de las relaciones

$$\omega_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \quad (12.63)$$

$$\omega_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \quad (12.64)$$

$$\omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \quad (12.65)$$

y de  $\mathbf{L} = I \cdot \boldsymbol{\omega}$ , tenemos

$$L_1 = I_{11}(\sin \theta \sin \psi \dot{\phi} + \cos \psi \dot{\theta}) \quad (12.66)$$

$$L_2 = I_{11}(\sin \theta \cos \psi \dot{\phi} - \sin \psi \dot{\theta}) \quad (12.67)$$

$$L_3 = I_{33}(\dot{\psi} + \cos \theta \dot{\phi}) \quad (12.68)$$

lo que nos permite obtener

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \quad (12.69)$$

de lo cual podemos obtener  $L_z$  con  $\Lambda$  la matriz de rotación. Finalmente, en vez de obtener la ecuación para  $\theta$ , usaremos la conservación de la energía como tercera ecuación

$$E = \frac{1}{2}I_{11}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 + mga \cos \theta \quad (12.70)$$

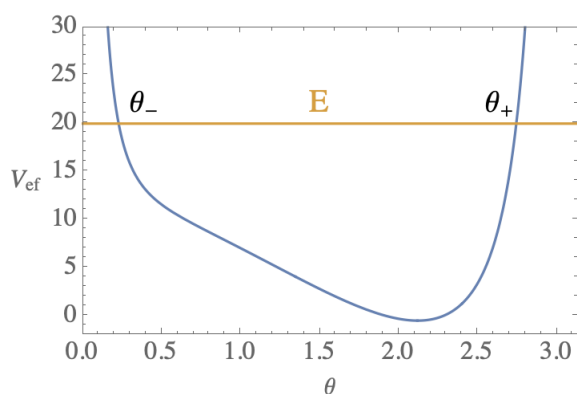
Pero tenemos

$$\dot{\phi} = \frac{L_z - L_3 \cos \theta}{I_{11} \sin^2 \theta}, \quad \dot{\psi} = \frac{L_3}{I_{33}} - \frac{(L_z - L_3 \cos \theta) \cos \theta}{I_{11} \sin^2 \theta} \quad (12.71)$$

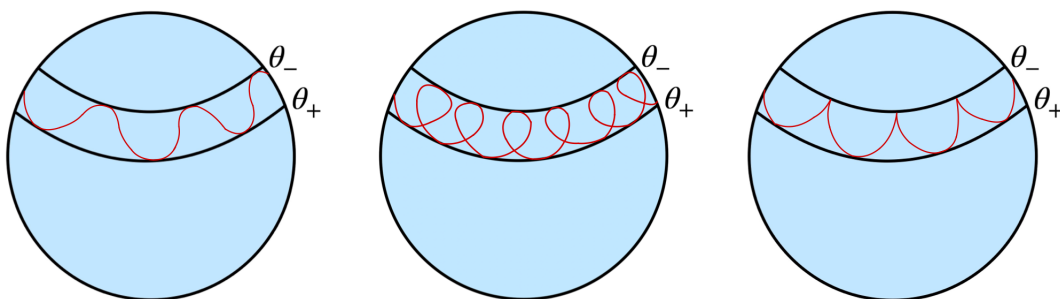
lo que nos permite escribir una expresión con solamente  $\theta$

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} I_{11} \dot{\theta}^2 + \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{2 I_{11} \sin^2 \theta} + \frac{L_3^2}{2 I_{33}} + m g a \cos \theta = \text{constante} \\ &\equiv \frac{1}{2} I_{11} \dot{\theta}^2 + V_{ef}(\theta) \end{aligned} \quad (12.72)$$

con  $V_{ef}$  el potencial efectivo. Observamos a partir del gráfico de  $V_{ef}$  que siempre  $\theta$  oscila entre dos valores excepto cuando la energía es mínima.



De la expresión de  $\theta(t)$  se pueden obtener las otras coordenadas, en particular podemos observar que el signo de  $\dot{\phi}$  depende de  $L_z - L_3 \cos \theta$ . Es obvio que tenemos  $L_z - L_3 \cos \theta_- < L_z - L_3 \cos \theta_+$ , lo que implica que si  $L_z - L_3 \cos \theta_- > 0$ ,  $\dot{\phi} > 0$ , aunque si  $L_z - L_3 \cos \theta_- < 0$ ,  $\dot{\phi}$  no tiene una evolución monótona y finalmente existe el caso extremo  $L_z - L_3 \cos \theta_- = 0$ . Estos 3 casos están ilustrado en los gráficos siguientes en los cuales observamos la punta del trompo proyectado sobre una esfera.



Observamos además de la nutación (variación de  $\theta$ ), una precesión es decir la variación

de  $\phi$ . El fenómeno de precesión ocurre por la Tierra que podemos representar como una esfera achatada por los polos es decir un trompo simétrico. El periodo de precesión es de aproximadamente 26000 años.

La nutación puede ser eliminada, es decir si  $\theta = \theta_0$  es decir si  $V'_{ef}(\theta_0) = 0$ .

$$\frac{L_3(L_z - L_3 \cos \theta_0)}{I_{11} \sin \theta_0} - \frac{(L_z - L_3 \cos \theta_0)^2 \cos \theta_0}{I_{11} \sin^3 \theta_0} - mga \sin \theta_0 = 0 \quad (12.73)$$

Definimos  $X = L_z - L_3 \cos \theta_0$

$$\cos \theta_0 X^2 - L_3 \sin^2 \theta_0 X + mga I_{11} \sin^4 \theta_0 = 0 \quad (12.74)$$

Esta ecuación tiene una solución si el discriminante es positivo es decir

$$L_3^2 \geq 4mga I_{11} \cos \theta_0 \quad (12.75)$$

pero como  $L_3 = I_{33}\omega_3$ , tenemos

$$\omega_3 \geq \frac{2}{I_{33}} \sqrt{mga I_{11} \cos \theta_0} \quad (12.76)$$

Puede ocurrir un movimiento con  $\theta$  fijo (sin nutación) si  $\omega_3$  es suficientemente grande. Usualmente no se cumple esta condición después de un cierto tiempo, por fricción, lo que empieza a producir nutación.

# Mecánica hamiltoniana

## 13. Formalismo

El formalismo hamiltoniano se usa menos que el formalismo lagrangiano para resolver problemas de forma analítica, pero permite entender con mucha más claridad la estructura de la mecánica clásica y constituye la base natural de la mecánica cuántica. En mecánica lagrangiana trabajamos con  $n$  coordenadas generalizadas  $\{q_i\}$  y sus velocidades  $\{\dot{q}_i\}$ . La dinámica está determinada por las ecuaciones de Euler–Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}. \quad (13.1)$$

Son  $n$  ecuaciones diferenciales de segundo orden, por lo que se requieren  $2n$  condiciones iniciales, por ejemplo  $\{q_i(0), \dot{q}_i(0)\}$ .

La idea de Hamilton es reorganizar el problema de modo que la evolución quede escrita como un sistema de ecuaciones de primer orden en un espacio donde las variables sean independientes. Para ello se introduce el momento generalizado

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad \text{y por Euler–Lagrange} \quad \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad (13.2)$$

de manera que las variables  $(q_i, \dot{q}_i)$  se reemplazan por  $(q_i, p_i)$ . En lugar de describir el sistema en el espacio de configuración (posiciones), pasamos a describirlo en el espacio de fase (posiciones y momentos).

Como ejemplo, consideremos un péndulo simple con coordenada  $\theta$ ,

$$L = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 + m g \ell \cos \theta. \quad (13.3)$$

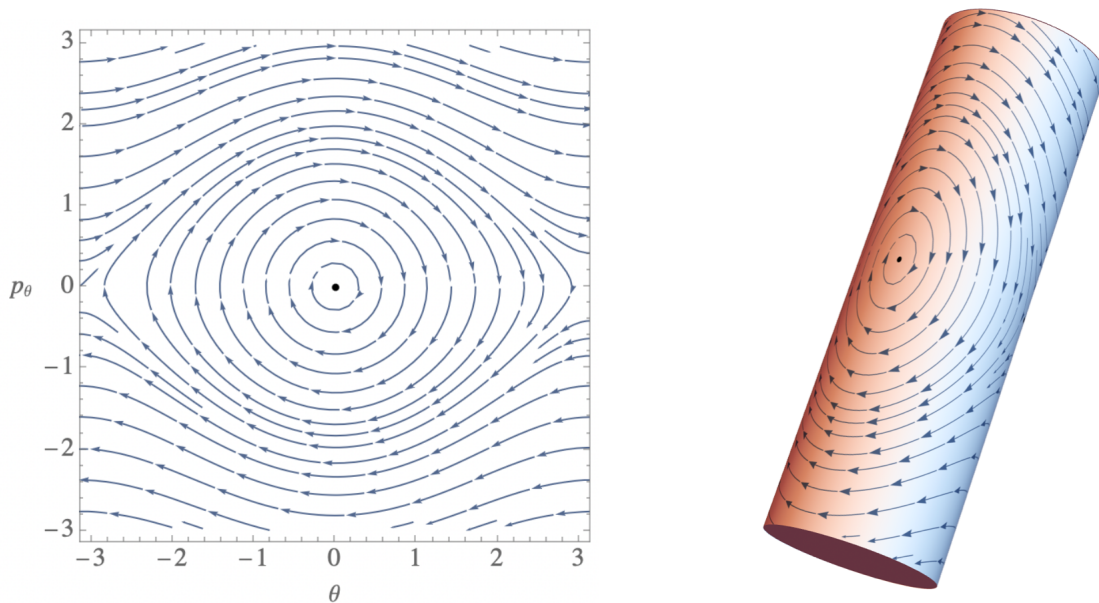
El momento conjugado es

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\ell^2 \dot{\theta}. \quad (13.4)$$

La ecuación de Euler–Lagrange se puede escribir como

$$\dot{p}_\theta = \frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta \quad (\equiv m\ell^2 \ddot{\theta}). \quad (13.5)$$

Con estas ecuaciones podemos representar el espacio de fase: las curvas en el plano  $(\theta, p_\theta)$  corresponden a soluciones con distintas condiciones iniciales. En el caso del péndulo, la variable  $\theta$  es periódica, lo que implica que el espacio de fase tiene la topología de un cilindro.



Cada punto del espacio de fase representa el estado del sistema en un instante  $t$ , es decir la posición  $\theta$  y el momento  $p_\theta = m\ell^2 \dot{\theta}$ . Por eso, las curvas del espacio de fase no se cruzan: dado un estado  $(\theta, p_\theta)$ , la evolución está determinada de manera única.

Queremos entonces una función definida en el espacio de fase, es decir una función de  $(q_i, p_i)$ , que determine de forma única la evolución del sistema. En otras palabras, buscamos una función que contenga la misma información dinámica que el lagrangiano  $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ , pero escrita en variables  $(q_i, p_i)$  en vez de  $(q_i, \dot{q}_i)$ . El procedimiento que realiza este cambio de variables se llama transformada de Legendre.

### 13.1. Transformada de Legendre

Consideramos una función  $f(x, y)$  tal que,  $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$  y definimos una nueva función  $g(x, y, u) \equiv ux - f(x, y)$  tal que

$$dg = udx + xdu - \frac{\partial f}{\partial x}dx - \frac{\partial f}{\partial y}dy \quad (13.6)$$

donde  $u$  es una variable independiente, pero vamos a considerar el caso particular  $u = \frac{\partial f}{\partial x}$ . En ese caso

$$dg = xdu - \frac{\partial f}{\partial y}dy \quad (13.7)$$

es decir que  $g$  es una función de  $(u, y)$ . En conclusión, hemos pasado de  $(x, y)$  a  $(u, y)$  definiendo una función

$$g(u, y) = ux - f(x, y) \quad \text{con} \quad u = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (13.8)$$

Por ejemplo, en termodinámica se considera el cambio de energía

$$dU = TdS - PdV \quad (13.9)$$

que esta relacionado con un cambio de entropía y de volumen, es decir  $U(S, V)$ . Podemos definir una función de  $(T, V)$  por ejemplo  $F = TS - U$  (por razones históricas, se define  $F = U - TS$ ) con  $T = \frac{\partial U}{\partial S}$ , llamada la energía libre

$$dF = TdS + SdT - dU = TdS + SdT - TdS + PdV = SdT + PdV \quad (13.10)$$

### 13.2. El hamiltoniano

A partir de la sección anterior, definimos el hamiltoniano como la transformada de Legendre del lagrangiano

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t) \quad \text{con} \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (13.11)$$

Por ejemplo si

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}) \quad (13.12)$$

tenemos

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = m\dot{\mathbf{r}} \quad (13.13)$$

lo que nos permite definir el hamiltoniano

$$H = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} - L = \mathbf{p} \left( \frac{\mathbf{p}}{m} \right) - \frac{1}{2} m \left( \frac{\mathbf{p}}{m} \right)^2 + V(\mathbf{r}) \quad (13.14)$$

$$= \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \quad (13.15)$$

Una vez conocido el hamiltoniano, necesitamos conocer la dinámica en el espacio de fase. Sabemos que  $H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t)$ , lo que implica

$$dH = \sum_i \left[ \dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right] - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (13.16)$$

$$= \sum_i \left[ \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i \right] - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad \left( p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \quad (13.17)$$

$$= \sum_i [\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i] - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad \left( \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) \quad (13.18)$$

pero sabemos también que  $H(q_i, p_i, t)$ , lo que implica

$$dH = \sum_i \left[ \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i \right] + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (13.19)$$

lo que nos permite obtener las ecuaciones de Hamilton

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned} \quad (13.20)$$

también tenemos

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (13.21)$$

En el ejemplo anterior,  $H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r})$ , obtenemos con las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{m} \quad (13.22)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = -\nabla V(\mathbf{r}) \quad (13.23)$$

lo que una vez combinado, nos da

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V(\mathbf{r}) \quad (13.24)$$

es decir la ecuación de Newton para este sistema. Con el formalismo hamiltoniano, reemplazamos  $n$  ecuaciones diferenciales de segundo orden por  $2n$  ecuaciones diferenciales de primer orden.

Nótese que las ecuaciones de Hamilton se pueden escribir de forma tal que  $(q, p)$  aparecen **similares**. Si definimos, el vector de dimensión  $2n$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \quad (13.25)$$

las ecuaciones de Hamilton se escriben

$$\dot{\mathbf{X}} = \Omega \frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}} \quad (13.26)$$

con

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_{n \times n} \\ -\mathbb{I}_{n \times n} & 0 \end{pmatrix} \quad (13.27)$$

Esta forma de escribir las ecuaciones de Hamilton es llamada la notación simpléctica (del griego *συμπλεκτικός* (symplektikos): entrelazado).

Con el hamiltoniano, las leyes de conservación son más fáciles. Por ejemplo si  $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$  el hamiltoniano  $H$  es conservado y es la energía. De hecho

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial H}{\partial p} \dot{p} = \frac{\partial H}{\partial t} - \dot{p}\dot{q} + \dot{q}\dot{p} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (13.28)$$

También, si una variable es cíclica es decir que  $q_i$  no aparece en el lagrangiano, obtenemos  $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0$  es decir que  $p_i$  es conservado.

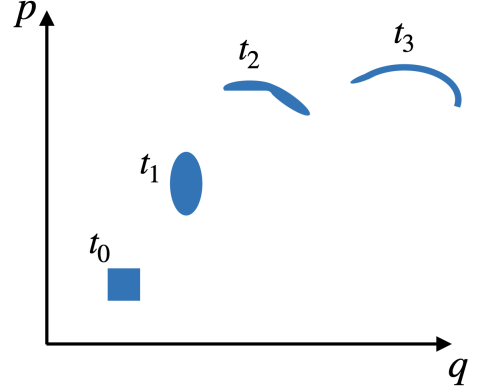
## 14. Aplicaciones

### 14.1. Teorema de Liouville

El formalismo hamiltoniano nos permite también descubrir el teorema de Liouville. Si consideramos una región del espacio de fase a un tiempo  $t$  y lo dejamos evolucionar, su forma puede cambiar pero su volumen nunca cambia. Consideramos el volumen infinitesimal  $V = dqdp$ , después de un tiempo  $\delta t$ , tenemos

$$q \mapsto q + \dot{q}\delta t \equiv \tilde{q} \quad (14.1)$$

$$p \mapsto p + \dot{p}\delta t \equiv \tilde{p} \quad (14.2)$$



Por lo tanto el nuevo volumen es

$$\tilde{V} = d\tilde{q}d\tilde{p} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q} & \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q} & \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} \end{pmatrix} dqdp \quad (\text{usando el jacobiano}) \quad (14.3)$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial \dot{q}}{\partial q}\delta t & \frac{\partial \dot{q}}{\partial p}\delta t \\ \frac{\partial \dot{p}}{\partial q}\delta t & 1 + \frac{\partial \dot{p}}{\partial p}\delta t \end{pmatrix} dqdp \quad (14.4)$$

$$\simeq \left( 1 + \left( \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} \right) \delta t + O(\delta t^2) \right) dqdp \quad (14.5)$$

$$\simeq \left( 1 + \left( \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} - \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} \right) \delta t + O(\delta t^2) \right) dqdp \simeq dqdp \quad (14.6)$$

De la misma forma para  $n$  variables  $(q_i, p_i)$ , si  $V = dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n$ , obtenemos  $\tilde{V} = \det \mathcal{J} \cdot V$ , con  $\mathcal{J}$  el jacobiano

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q_j} & \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial p_j} \\ \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial q_j} & \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial p_j} \end{pmatrix} \quad (14.7)$$

lo que corresponde a una matriz  $2n \times 2n$ . Como sabemos que

$$\tilde{q}_i = q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta t \quad (14.8)$$

$$\tilde{p}_i = p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta t \quad (14.9)$$

obtenemos

$$\det \mathcal{J} = \det \begin{pmatrix} \delta_{ij} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j} \delta t & \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} \delta t \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_j} \delta t & \delta_{ij} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_j} \delta t \end{pmatrix} \quad (14.10)$$

$$\equiv \det(\mathbb{I} + \delta t M) \simeq 1 + \delta t \underbrace{\text{tr}(M)}_{=0} + O(\delta t^2) = 1 + O(\delta t^2) \quad (14.11)$$

Repetiendo esta evolución en  $N$  pasos de tamaño  $\delta t = \frac{t}{N}$  y componiendo los jacobianos,

$$\det \mathcal{J}(t) = \prod_{k=1}^N \det \mathcal{J}_k = \prod_{k=1}^N (1 + O(\delta t^2)) = 1 + O(N\delta t^2) = 1 + O\left(\frac{t^2}{N}\right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1, \quad (14.12)$$

lo que implica el teorema de Liouville

$$V(t) = \det \mathcal{J}(t) V(0) = V(0) \quad (14.13)$$

## 14.2. Corchete de Poisson

La derivada temporal de cualquier cantidad  $f = f(q, p, t)$  tiene la forma

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) \quad (14.14)$$

pero usando las ecuaciones de Hamilton (13.20), obtenemos

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \quad (14.15)$$

lo que nos motiva a definir un objeto que nos indicara la evolución temporal de una función.

Sean,  $f(q, p)$  y  $g(q, p)$ , dos funciones en el espacio de fase. El corchete de Poisson se define como

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \quad (14.16)$$

Este corchete tiene varias propiedades:

- Anticonmutativa,  $\{f, g\} = -\{g, f\}$
- Linealidad,  $\{\alpha f + \beta g, h\} = \alpha\{f, h\} + \beta\{g, h\} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- Regla de Leibniz,  $\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g$
- Identidad de Jacobi,  $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$

Son relaciones fácil de demostrar aunque pueden ser un poco largas. Podemos deducir que

$$\{q_i, q_j\} = 0 \quad (14.17)$$

$$\{p_i, p_j\} = 0 \quad (14.18)$$

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \quad (14.19)$$

Es también fácil verificar que

$$\{q_i, f(p)\} = \frac{\partial f(p)}{\partial p_i} \quad (14.20)$$

y

$$\{p_i, f(q)\} = -\frac{\partial f(q)}{\partial q_i} \quad (14.21)$$

Con este nuevo formalismo, para cualquier función  $f(q_i, p_i, t)$ , tenemos

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (14.22)$$

es decir

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} \quad (14.23)$$

Por lo tanto si una función es independiente del tiempo, tenemos

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} \quad (14.24)$$

lo que implica que  $f$  es una constante del movimiento si **Poisson conmuta** con el hamiltoniano, es decir si  $\{f, H\} = 0$ . En particular si  $H$  es independiente del tiempo,  $H$  es constante ya que  $\{H, H\} = 0$ .

También, si  $q_i$  es una variable cíclica, tenemos

$$\{p_i, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \quad (14.25)$$

lo que significa que  $\frac{dp_i}{dt} = 0$  es decir que  $p_i$  es conservado.

Una vez identificadas cantidades conservadas (constantes del movimiento), se pueden generar otras mediante los corchetes de Poisson. En particular, si  $I$  y  $J$  son constantes del movimiento, entonces  $\{I, J\}$  también lo es. Para verlo, basta probar que  $\{\{I, J\}, H\} = 0$ , donde  $H$  es el hamiltoniano. Usando la identidad de Jacobi,

$$\{\{I, J\}, H\} = \{I, \underbrace{\{J, H\}}_{=0}\} + \{\underbrace{\{I, H\}}_{=0}, J\} = 0 \quad (14.26)$$

Por ejemplo, si dos momentos angulares son conservados, el tercero es una constante del movimiento también. De hecho, como  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ , tenemos

$$L_1 = r_2 p_3 - r_3 p_2 \quad (14.27)$$

$$L_2 = r_3 p_1 - r_1 p_3 \quad (14.28)$$

$$L_3 = r_1 p_2 - r_2 p_1 \quad (14.29)$$

lo que implica

$$\{L_1, L_2\} = \{r_2 p_3 - r_3 p_2, r_3 p_1 - r_1 p_3\} \quad (14.30)$$

$$= \{r_2 p_3, r_3 p_1\} - \{r_2 p_3, r_1 p_3\} - \{r_3 p_2, r_3 p_1\} + \{r_3 p_2, r_1 p_3\} \quad (14.31)$$

pero tenemos

$$\{r_2 p_3, r_1 p_3\} = r_2 \{p_3, r_1 p_3\} + \{r_2, r_1 p_3\} p_3 \quad (14.32)$$

$$= r_2 \left[ r_1 \underbrace{\{p_3, p_3\}}_{=0} + \underbrace{\{p_3, r_1\}}_{=0} p_3 \right] + \left[ r_1 \underbrace{\{r_2, p_3\}}_{=0} + \underbrace{\{r_2, r_1\}}_{=0} p_3 \right] p_3 \quad (14.33)$$

$$= 0 \quad (14.34)$$

lo que implica

$$\{L_1, L_2\} = r_2 \underbrace{\{p_3, r_3\}}_{-1} p_1 + p_2 \underbrace{\{r_3, p_3\}}_{+1} r_1 = -r_2 p_1 + r_1 p_2 \equiv L_3 \quad (14.35)$$

Es decir que si dos componentes de  $\mathbf{L}$  son conservadas  $\mathbf{L}$  es conservado. También, tenemos

$$\{\mathbf{L}^2, L_i\} = 0 \quad (14.36)$$

con  $\mathbf{L}^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$ . Por ejemplo

$$\{L^2, L_3\} = \{L_1^2, L_3\} + \{L_2^2, L_3\} + \underbrace{\{L_3^2, L_3\}}_{=0} \quad (14.37)$$

$$= L_1 \underbrace{\{L_1, L_3\}}_{-L_2} + \underbrace{\{L_1, L_3\}}_{-L_2} L_1 + L_2 \underbrace{\{L_2, L_3\}}_{L_1} + \underbrace{\{L_2, L_3\}}_{L_1} L_2 \quad (14.38)$$

$$= -L_1 L_2 - L_2 L_1 + L_2 L_1 + L_1 L_2 = 0 \quad (14.39)$$

Con este formalismo podemos ver fácilmente que el momento angular es conservado para un problema de fuerza central. Tenemos

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(r) \quad (14.40)$$

y debemos verificar que  $\{L_x, H\} = \{L_y, H\} = \{L_z, H\} = 0$

$$\{L_x, H\} = \left\{ L_x, \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + V(r) \right\} \quad (14.41)$$

$$= \frac{1}{m} \left[ p_x \{L_x, p_x\} + p_y \{L_x, p_y\} + p_z \{L_x, p_z\} \right] + \{L_x, V(r)\} \quad (14.42)$$

pero

$$\{L_x, p_x\} = \{yp_z - zp_y, p_x\} = 0 \quad (14.43)$$

$$\{L_x, p_y\} = \{yp_z - zp_y, p_y\} = p_z \quad (14.44)$$

$$\{L_x, p_z\} = \{yp_z - zp_y, p_z\} = -p_y \quad (14.45)$$

y

$$\{L_x, V(r)\} = \{yp_z - zp_y, V(r)\} = y \{p_z, V(r)\} - z \{p_y, V(r)\} \quad (14.46)$$

$$= y \left( -\frac{\partial V}{\partial z} \right) - z \left( -\frac{\partial V}{\partial y} \right) = -yV'(r) \frac{z}{r} + zV'(r) \frac{y}{r} = 0 \quad (14.47)$$

lo que implica

$$\{L_x, H\} = \frac{1}{m} (p_y p_z - p_z p_y) = 0 \quad (14.48)$$

De forma similar, tenemos  $\{L_y, H\} = \{L_z, H\} = 0$ , es decir

$$\{\mathbf{L}, H\} = 0 \quad (14.49)$$

lo que implica que el momento angular es conservado.

### 14.3. El vector de Laplace-Runge-Lenz-Hermann-Bernoulli-Hamilton-Gibbs

El formalismo permite buscar otras cantidades conservadas, es decir, observables cuyo corchete de Poisson con el hamiltoniano se anula. Un ejemplo clásico es un vector que fue redescubierto por numerosos autores sin saber que ya era conocido. Hoy se lo conoce principalmente como el vector de Laplace-Runge-Lenz, aunque Laplace, Runge y Lenz no fueron los primeros en descubrirlo

$$\mathbf{A} = \frac{1}{m} \mathbf{p} \times \mathbf{L} - k \hat{r}, \quad \text{con } \hat{r} = \frac{\mathbf{r}}{r} \text{ el vector unitario} \quad (14.50)$$

Podemos fácilmente demostrar que este vector es conservado  $\{A_i, H\} = 0$ . La conservación de  $\mathbf{A}$  esta relacionada a la conservación de la excentricidad de la trayectoria. Para demostrarlo, usaremos la notación con el tensor de Levi-Civita, el momento angular puede ser escrito  $L_i = \varepsilon_{imn} r_m p_n$ , lo que nos permite escribir

$$\mathbf{A} = \frac{1}{m} \mathbf{p} \times \mathbf{L} - k \hat{r} \Rightarrow A_j = \frac{1}{m} \varepsilon_{jmn} p_m L_n - k \frac{r_j}{r} \quad (14.51)$$

lo que implica

$$\{H, A_i\} = \frac{1}{m} \varepsilon_{ijk} \{H, p_j\} L_k - k \left\{ H, \frac{r_i}{r} \right\} \quad (14.52)$$

ya que el hamiltoniano conmuta con el momento angular

$$\{H, A_i\} = -\frac{k}{m} \varepsilon_{ijk} \left\{ \frac{1}{r}, p_j \right\} L_k - \frac{k}{2m} \left\{ \mathbf{p}^2, \frac{r_i}{r} \right\} \quad (14.53)$$

$$= -\frac{k}{m} \varepsilon_{ijk} \left\{ \frac{1}{r}, p_j \right\} L_k - \frac{k}{m} p_j \left\{ p_j, \frac{r_i}{r} \right\} \quad (14.54)$$

pero

$$\left\{ p_j, \frac{r_i}{r} \right\} = -\frac{\partial}{\partial r_j} \left( \frac{r_i}{r} \right) = -\frac{1}{r} \delta_{ij} + \frac{r_i}{r^2} \frac{\partial r}{\partial r_j} = -\frac{1}{r} \delta_{ij} + \frac{r_i r_j}{r^3} \quad (14.55)$$

y también

$$\left\{ p_j, \frac{1}{r} \right\} = -\frac{\partial}{\partial r_j} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial r_j} = \frac{r_j}{r^3} \quad (14.56)$$

lo que implica que

$$\{H, A_i\} = \frac{k}{m} \varepsilon_{ijk} \frac{r_j}{r^3} L_k - \frac{k}{m} p_j \left( -\frac{1}{r} \delta_{ij} + \frac{r_i r_j}{r^3} \right) \quad (14.57)$$

$$= \frac{k}{m} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} \frac{r_j}{r^3} r_m p_n - \frac{k}{m} \left( -\frac{p_i}{r} + \frac{r_i r_j p_j}{r^3} \right) \quad (14.58)$$

$$= \frac{k}{m} \left( \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm} \right) \frac{r_j}{r^3} r_m p_n - \frac{k}{m} \left( -\frac{p_i}{r} + \frac{r_i r_j p_j}{r^3} \right) \quad (14.59)$$

$$= 0 \quad (14.60)$$

es decir que  $\mathbf{A}$  es conservado. La norma de  $\mathbf{A}$  es fácil de calcular, usando (10.38)  $\ell = mr^2 \dot{\theta}$  y  $r = \frac{\ell^2/km}{1+e \cos \theta}$ , encontramos  $A = k|e|$ . Lo que implica la conservación de la excentricidad. El tipo de trayectoria permanece durante el movimiento.

Por ejemplo, no podemos pasar de una trayectoria elíptica a una trayectoria parabólica en un problema de fuerza central.

El sistema tiene varias propiedades interesantes, como por ejemplo las relaciones

$$\{L_i, A_j\} = \varepsilon_{ijk} A_k \quad (14.61)$$

$$\{A_i, A_j\} = -\frac{2}{m} \left( \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{k}{r} \right) \varepsilon_{ijk} L_k \quad (14.62)$$

Por lo tanto si tenemos un hamiltoniano en un problema de fuerza central con potencial  $V = -k/r$ , i.e.  $H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{k}{r}$ , obtenemos

$$\{A_i, A_j\} = -\frac{2}{m} H \varepsilon_{ijk} L_k \quad (14.63)$$

es decir que tenemos

$$\{A_x, A_y\} = -\frac{2}{m} H L_z \quad (14.64)$$

pero tenemos también que

$$\{H, L_z\} = 0 \quad (14.65)$$

lo que nos permite concluir que

$$\{H, \{A_x, A_y\}\} = 0 \quad (14.66)$$

es decir que  $\{A_x, A_y\}$  es una constante de movimiento. Estas relaciones que hemos

obtenido son

$$\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k, \quad \{L_i, A_j\} = \varepsilon_{ijk} A_k, \quad \{A_i, A_j\} = -\frac{2}{m} H \varepsilon_{ijk} L_k \quad (14.67)$$

Para una orbita dada,  $H$  es constante, es la energía  $E$ . Si es una orbita cerrada, sabemos que  $E < 0$ , lo que nos permite definir  $D_i = \frac{A_i}{\sqrt{-2E/m}}$ , lo que nos da

$$\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k, \quad \{L_i, D_j\} = \varepsilon_{ijk} D_k, \quad \{D_i, D_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k \quad (14.68)$$

Lo que corresponde a una representación de la álgebra  $\mathfrak{so}(4)$  (matrices  $4 \times 4$ , anti-simétricas, es decir que tienen 6 generadores). Es decir que tenemos dos tipos de momentos angulares. Ha sido por ejemplo usado en mecánica cuántica para encontrar los niveles de energía del átomo de hidrógeno. Si  $E > 0$  se transforma en la álgebra  $\mathfrak{so}(1, 3)$ .

Para terminar este capítulo, demostraremos las relaciones (14.61,14.62)

$$\{L_i, A_j\} = \frac{1}{m} \varepsilon_{jmn} \{L_i, p_m L_n\} - k \left\{ L_i, \frac{r_j}{r} \right\} \quad \text{usando } L_i = \varepsilon_{imn} r_m p_n \quad (14.69)$$

$$= \frac{1}{m} \varepsilon_{jmn} \left[ p_m \underbrace{\{L_i, L_n\}}_{\varepsilon_{ins} L_s} + \underbrace{\{L_i, p_m\}}_{\varepsilon_{ist} \{r_s p_t, p_m\}} L_n \right] - k \varepsilon_{imn} \underbrace{\left\{ r_m p_n, \frac{r_j}{r} \right\}}_{r_m \left\{ p_n, \frac{r_j}{r} \right\}} \quad (14.70)$$

pero para el último termino, podemos demostrar de nuevo que

$$\left\{ p_n, \frac{r_j}{r} \right\} = -\frac{\partial}{\partial r_n} \left( \frac{r_j}{r} \right) = -\frac{1}{r} \delta_{jn} + \frac{r_j}{r^2} \frac{\partial r}{\partial r_n} = -\frac{1}{r} \delta_{jn} + \frac{r_n r_j}{r^3} \quad (14.71)$$

lo que nos permite obtener que

$$\{L_i, A_j\} = \frac{1}{m} \underbrace{\varepsilon_{jmn} \varepsilon_{ins}}_{\delta_{im} \delta_{sj} - \delta_{ij} \delta_{sm}} p_m L_s + \frac{1}{m} \underbrace{\varepsilon_{jmn} \varepsilon_{imt}}_{\delta_{ij} \delta_{nt} - \delta_{jt} \delta_{in}} p_t L_n - \frac{k}{r^3} \varepsilon_{imn} r_m (r_j r_n - r^2 \delta_{jn}) \quad (14.72)$$

$$= \frac{1}{m} (p_i L_j - \delta_{ij} p_m L_m + \delta_{ij} p_m L_m - p_j L_i) - \frac{k}{r^3} \varepsilon_{imn} r_m r_n r_j + \frac{k}{r} \varepsilon_{imj} r_m \quad (14.73)$$

pero el penúltimo termino es nulo porque es el producto de un termino antisimétrico

por un termino simétrico

$$\{L_i, A_j\} = \frac{1}{m} (p_i L_j - p_j L_i) - \frac{k}{r} \varepsilon_{ijm} r_m = \varepsilon_{ijm} \underbrace{\left[ \frac{1}{m} \varepsilon_{mkl} p_k L_l - \frac{k}{r} r_m \right]}_{A_m} \quad (14.74)$$

Hemos bien demostrado la primera relación

$$\{L_i, A_j\} = \varepsilon_{ijm} A_m \quad (14.75)$$

Para la segunda relación, tenemos

$$\{A_i, A_j\} = \left\{ \frac{1}{m} \varepsilon_{irs} p_r L_s - k \frac{r_i}{r}, A_j \right\} = \left\{ \frac{1}{m} \varepsilon_{irs} p_r L_s, A_j \right\} + \left\{ -k \frac{r_i}{r}, A_j \right\} \quad (14.76)$$

$$= \frac{1}{m} \varepsilon_{irs} \left[ \underbrace{p_r \{L_s, A_j\}}_{\varepsilon_{sjk} A_k} + \{p_r, A_j\} L_s \right] - k \left\{ \frac{r_i}{r}, A_j \right\} \quad (14.77)$$

Descomponiendo un poco este calculo, tenemos

$$\{p_r, A_j\} = \left\{ p_r, \frac{1}{m} \varepsilon_{jkl} p_k L_l - k \frac{r_j}{r} \right\} = \frac{1}{m} \varepsilon_{jkl} p_k \underbrace{\{p_r, L_l\}}_{\varepsilon_{rlm} p_m} - k \left\{ p_r, \frac{r_j}{r} \right\} \quad (14.78)$$

$$= \frac{1}{m} \varepsilon_{lrm} \varepsilon_{lkj} p_m p_k - k \left( -\frac{1}{r} \delta_{jr} + \frac{r_j r_r}{r^3} \right) \quad (14.79)$$

$$= \frac{1}{m} (p_j p_r - \delta_{rj} p^2) + \frac{k}{r} \delta_{jr} - k \frac{r_j r_r}{r^3} \quad (14.80)$$

y

$$\left\{ \frac{r_i}{r}, A_j \right\} = \left\{ \frac{r_i}{r}, \frac{1}{m} \varepsilon_{jkl} p_k L_l - k \frac{r_j}{r} \right\} = \frac{1}{m} \varepsilon_{jkl} \left\{ \frac{r_i}{r}, p_k L_l \right\} \quad (14.81)$$

$$= \frac{1}{m} \varepsilon_{jkl} \left[ p_k \left\{ \frac{r_i}{r}, L_l \right\} + \underbrace{\left\{ \frac{r_i}{r}, p_k \right\}}_{\frac{\delta_{ik} - \frac{r_i r_k}{r^3}}{r}} L_l \right] \quad (14.82)$$

pero el primer corchete es

$$\left\{ \frac{r_i}{r}, L_l \right\} = \varepsilon_{lmn} \left\{ \frac{r_i}{r}, r_m p_n \right\} = \varepsilon_{lmn} r_m \underbrace{\left\{ \frac{r_i}{r}, p_n \right\}}_{\frac{\delta_{in} - \frac{r_i r_n}{r^3}}{r}} \quad (14.83)$$

lo que implica

$$\left\{ \frac{r_i}{r}, A_j \right\} = \frac{1}{m} \varepsilon_{jkl} \left[ \varepsilon_{lmi} \frac{r_m}{r} p_k - \underbrace{\varepsilon_{lmn} r_m r_n}_{=0} \frac{r_i}{r^3} p_k + \frac{\delta_{ik}}{r} L_l - \frac{r_i r_k}{r^3} L_l \right] \quad (14.84)$$

Juntando todo, obtenemos

$$\begin{aligned} \{A_i, A_j\} &= \frac{1}{m} \varepsilon_{irs} \left[ \varepsilon_{sjk} A_k p_r + \left( \frac{1}{m} (p_j p_r - \delta_{rj} \mathbf{p}^2) + \frac{k}{r} \delta_{jr} - k \frac{r_j r_r}{r^3} \right) L_s \right] \\ &\quad - \frac{k}{m} \varepsilon_{jkl} \left[ \varepsilon_{lmi} \frac{r_m}{r} p_k + \frac{\delta_{ik}}{r} L_l - \frac{r_i r_k}{r^3} L_l \right] \end{aligned} \quad (14.85)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{m} \left[ \delta_{ij} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} - A_i p_j + \frac{1}{m} \varepsilon_{irs} p_r p_j L_s - \frac{1}{m} \varepsilon_{ijs} \mathbf{p}^2 L_s + \frac{k}{r} \varepsilon_{ijs} L_s - \frac{k}{r^3} \varepsilon_{irs} r_j r_r L_s \right] \\ &\quad - \frac{k}{m} \left[ \frac{r_j}{r} p_i - \delta_{ij} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r} + \varepsilon_{jil} \frac{L_l}{r} - \frac{1}{r^3} \varepsilon_{jkl} r_i r_k L_l \right] \end{aligned} \quad (14.86)$$

Usando la definición de  $\mathbf{A}$ , obtenemos

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{p} = -\frac{k}{r} \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} \quad (14.87)$$

$$A_i p_j = \frac{1}{m} \varepsilon_{irs} p_r p_j L_s - \frac{k}{r} r_i p_j \quad (14.88)$$

que usamos en la expresión previa para obtener

$$\{A_i, A_j\} = \frac{k}{mr} (r_i p_j - r_j p_i) + 2 \frac{k}{mr} \varepsilon_{ijl} L_l - \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \varepsilon_{ijl} L_l + \frac{k}{mr^3} \varepsilon_{jkl} r_i r_k L_l - \frac{k}{mr^3} \varepsilon_{ikl} r_j r_k L_l \quad (14.89)$$

El penúltimo termino se simplifica en

$$\varepsilon_{jkl} r_i r_k L_l = \varepsilon_{jkl} r_i r_k \varepsilon_{lmn} r_m p_n = \varepsilon_{jkl} \varepsilon_{lmn} r_i r_k r_m p_n \quad (14.90)$$

$$= (\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}) r_i r_k r_m p_n = r_i r_j \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - r_i p_j \mathbf{r}^2 \quad (14.91)$$

y el último

$$\varepsilon_{ikl} r_j r_k L_l = r_i r_j \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - r_j p_i \mathbf{r}^2 \quad (14.92)$$

lo que nos permite obtener

$$\{A_i, A_j\} = \frac{k}{rm} (r_i p_j - r_j p_i - r_i p_j + r_j p_i) + \varepsilon_{ijl} \left[ 2 \frac{k}{mr} - \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \right] L_l \quad (14.93)$$

$$= -\frac{2}{m} \left( \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{k}{r} \right) \varepsilon_{ijl} L_l \quad (14.94)$$

## 15. Transformaciones canónicas

Hemos visto en el formalismo lagrangiano que para cualquier transformación  $q_i \mapsto Q_i(q_j)$  las ecuaciones de Lagrange guardan su forma. Queremos hacer lo mismo con las variables  $(q_i, p_i)$  es decir considerando las transformaciones de las variables

$$q_i \mapsto Q_i(q, p) \quad (15.1)$$

$$p_i \mapsto P_i(q, p) \quad (15.2)$$

Pero una transformación tan genérica de este tipo (mucho mas genérica que para el lagrangiano) no deja siempre las ecuaciones de Hamilton idénticas. Las transformaciones que dejan las ecuaciones de Hamilton similares se llaman transformaciones canónicas. Hemos visto que las ecuaciones de Hamilton se pueden escribir

$$\dot{\mathbf{x}} = \Omega \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \quad (15.3)$$

$$\text{con } \mathbf{x} = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)^\top \quad (15.4)$$

y  $\Omega$  la matriz simpléctica. Por lo tanto, la transformación de coordenadas, se escribe  $x_i \mapsto y_i(x)$

$$\dot{y}_i = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \dot{x}_j = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \Omega_{jk} \frac{\partial H}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial H}{\partial x_k} = \frac{\partial H}{\partial y_m} \frac{\partial y_m}{\partial x_k} \quad (15.5)$$

$$= \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \Omega_{jk} \frac{\partial y_m}{\partial x_k} \frac{\partial H}{\partial y_m} \quad (15.6)$$

Si

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \Omega_{jk} \frac{\partial y_m}{\partial x_k} = \Omega_{im} \quad (15.7)$$

la ecuación de Hamilton será

$$\dot{y}_i = \Omega_{im} \frac{\partial H}{\partial y_m} \quad (15.8)$$

es decir que guarda su forma. Por lo tanto,

una transformación es canónica si

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \Omega_{jk} \frac{\partial y_m}{\partial x_k} = \Omega_{im} \quad (15.9)$$

Sabiendo que  $\frac{\partial y_i}{\partial x_j}$  define una matriz, el jacobiano,  $\mathcal{J}$ . Concluimos que la transformación es canónica si el jacobiano de la transformación es simpléctico, i.e.

$$\mathcal{J}\Omega\mathcal{J}^\top = \Omega \quad (15.10)$$

Por ejemplo, la transformación siguiente es canónica

$$Q_1 = q_1, \quad Q_2 = p_2, \quad P_1 = p_1, \quad P_2 = -q_2 \quad (15.11)$$

de hecho, el jacobiano es

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_1}{\partial q_2} & \frac{\partial Q_1}{\partial p_1} & \frac{\partial Q_1}{\partial p_2} \\ \frac{\partial Q_2}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_2}{\partial q_2} & \frac{\partial Q_2}{\partial p_1} & \frac{\partial Q_2}{\partial p_2} \\ \frac{\partial P_1}{\partial q_1} & \frac{\partial P_1}{\partial q_2} & \frac{\partial P_1}{\partial p_1} & \frac{\partial P_1}{\partial p_2} \\ \frac{\partial P_2}{\partial q_1} & \frac{\partial P_2}{\partial q_2} & \frac{\partial P_2}{\partial p_1} & \frac{\partial P_2}{\partial p_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (15.12)$$

lo que implica

$$\begin{aligned} \mathcal{J}\Omega\mathcal{J}^\top &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Omega \end{aligned} \quad (15.13)$$

El corchete de Poisson es invariante bajo transformaciones canónicas, es decir que tenemos con las nuevas variables

$$\{Q_i, Q_j\} = 0, \quad \{P_i, P_j\} = 0, \quad \{Q_i, P_j\} = \delta_{ij} \quad (15.14)$$

Además de que cualquier transformación que tiene estas relaciones, es canónica.

Las transformaciones que conservan las relaciones de conmutación son canónicas.

Lo que nos permite demostrar si una transformación es canónica. Por ejemplo, con la

transformación previa,  $Q_1 = q_1, Q_2 = p_2, P_1 = p_1, P_2 = -q_2$ , obtenemos

$$\{Q_1, Q_2\} = \{q_1, p_2\} = 0 \quad (15.15)$$

$$\{P_1, P_2\} = \{p_1, -q_2\} = 0 \quad (15.16)$$

$$\{Q_1, P_1\} = \{q_1, p_1\} = 1 \quad (15.17)$$

$$\{Q_1, P_2\} = \{q_1, -q_2\} = 0 \quad (15.18)$$

$$\{Q_2, P_1\} = \{p_2, p_1\} = 0 \quad (15.19)$$

$$\{Q_2, P_2\} = \{p_2, -q_2\} = -\{p_2, q_2\} = -(-1) = 1 \quad (15.20)$$

Por lo tanto, es una transformación canónica.

Para demostrar este teorema, consideramos dos funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  con

$$x = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)^\top, \quad (15.21)$$

y queremos demostrar que el corchete de Poisson es invariante bajo transformaciones canónicas.

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \Omega_{ij} \frac{\partial g}{\partial x_j} \quad (15.22)$$

Consideramos una transformación  $x_i \mapsto y_i(x)$  es decir  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial y_k} \mathcal{J}_{ki}$

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \Omega_{ij} \frac{\partial g}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial y_k} \mathcal{J}_{ki} \Omega_{ij} \mathcal{J}_{lj} \frac{\partial g}{\partial y_l} = \frac{\partial f}{\partial y_k} \Omega_{kl} \frac{\partial g}{\partial y_l} \quad (15.23)$$

ya que  $\mathcal{J}_{ki} \Omega_{ij} \mathcal{J}_{lj} = \mathcal{J}_{ki} \Omega_{ij} \mathcal{J}_{jl}^\top = \Omega_{kl}$ . Por lo tanto, es una transformación canónica.

Queremos ahora demostrar la relación inversa, es decir que si los corchetes de Poisson no cambian, la transformación es canónica. Considerando de nuevo la transformación  $q_i \mapsto Q_i(q, p)$  y  $p_i \mapsto P_i(q, p)$ . El jacobiano de esta transformación es

$$\mathcal{J}_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} & \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \\ \frac{\partial P_i}{\partial q_j} & \frac{\partial P_i}{\partial p_j} \end{pmatrix} \quad (15.24)$$

obtenemos

$$\mathcal{J} \Omega \mathcal{J}^\top = \begin{pmatrix} \{Q_i, Q_j\} & \{Q_i, P_j\} \\ \{P_i, Q_j\} & \{P_i, P_j\} \end{pmatrix} \quad (15.25)$$

Por lo tanto, si las variables conservan la estructura de corchete de Poisson, obtenemos

$$\mathcal{J}\Omega\mathcal{J}^\top = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_{n \times n} \\ -\mathbb{I}_{n \times n} & 0 \end{pmatrix} = \Omega \quad (15.26)$$

es decir que la transformación es canónica, asumiendo que la transformación es invertible,  $\det(\mathcal{J}) \neq 0$ .

Por ejemplo la transformación  $Q = e^q$  y  $P = e^{-q}p$  es canónica. Lo podemos demostrar de dos maneras, con los corchetes de Poisson o con el jacobiano. Usando los corchetes, tenemos

$$\{Q, Q\} = \{P, P\} = 0 \quad (15.27)$$

$$\{Q, P\} = \frac{\partial e^q}{\partial q} \frac{\partial e^{-q}p}{\partial p} = e^q e^{-q} = 1 \quad (15.28)$$

lo que implica que es una transformación canónica. Por otro lado, usando el segundo método, obtenemos

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^q & 0 \\ -e^{-q}p & e^{-q} \end{pmatrix} \quad (15.29)$$

lo que implica

$$\mathcal{J}\Omega\mathcal{J}^\top = \begin{pmatrix} e^q & 0 \\ -pe^{-q} & e^{-q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^q & -pe^{-q} \\ 0 & e^{-q} \end{pmatrix} \quad (15.30)$$

$$= \begin{pmatrix} e^q & 0 \\ -pe^{-q} & e^{-q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e^{-q} \\ -e^q & pe^{-q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \Omega \quad (15.31)$$

Las transformaciones canónicas significan que tenemos la misma física con 2 sistemas de variables diferentes. Por lo tanto, podemos usar estas transformaciones, para escribir el hamiltoniano de forma más simple. Por ejemplo si

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 \quad (15.32)$$

Las ecuaciones de Hamilton son

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad (15.33)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -kq \quad (15.34)$$

Con el nuevo sistema, tenemos  $Q = e^q$  y  $P = pe^{-q}$ , es decir  $q = \ln Q$  y  $p = QP$ , lo que transforma el hamiltoniano en

$$\tilde{H} = \frac{Q^2 P^2}{2m} + \frac{1}{2}k(\ln Q)^2 \quad (15.35)$$

con exactamente las mismas formas de las ecuaciones, es decir

$$\dot{Q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = \frac{Q^2 P}{m} \quad (15.36)$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = -\frac{QP^2}{m} - k\frac{\ln Q}{Q} \quad (15.37)$$

Parecen muy diferentes pero son las mismas ecuaciones del oscilador armónico, lo que se puede verificar muy simplemente. Algunas transformaciones canónicas pueden simplificar mucho el problema aunque en este ejemplo las ecuaciones se han vuelto más complejas.

Para cerrar esta sección, podemos ver como resolver un problema con un cambio de coordenadas. Consideramos el oscilador armónico con el hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2, \quad \text{con } \omega^2 = \frac{k}{m} \quad (15.38)$$

podemos proponer el cambio de coordenadas  $(q, p)$  a  $(Q, P)$  tal que

$$Q = \arctan\left(m\omega\frac{q}{p}\right) \quad (15.39)$$

$$P = \frac{1}{2m\omega}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right) \quad (15.40)$$

Primero tenemos que verificar que es una transformación canónica. Es fácil verificar que  $\{Q, P\} = 1$ . Por lo tanto, sabemos que las ecuaciones de Hamilton guardan su forma con el nuevo hamiltoniano escrito con estas coordenadas  $\tilde{H} = \omega P$ . Obtenemos

$$\dot{Q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = \omega \quad (15.41)$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = 0 \quad (15.42)$$

lo que implica la solución trivial

$$Q = \omega t + \phi \quad (15.43)$$

$$P = P_0 \equiv \frac{E}{\omega} \quad (15.44)$$

con  $E$  la energía del sistema y  $\phi$  una constante de integración. Sabiendo que la transformación inversa se escribe

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q \quad (15.45)$$

$$p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q \quad (15.46)$$

obtenemos la solución en las coordenadas originales

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \phi) \quad (15.47)$$

$$p = \sqrt{2mE} \cos(\omega t + \phi) \quad (15.48)$$

### 15.1. Transformaciones infinitesimales

Dentro de todas las transformaciones canónicas posible, podemos estudiar las transformaciones infinitesimales, es decir

$$q_i \longmapsto q_i + \alpha Q_i(q, p) \equiv \tilde{q}_i \quad (15.49)$$

$$p_i \longmapsto p_i + \alpha P_i(q, p) \equiv \tilde{p}_i \quad (15.50)$$

con  $\alpha \ll 1$ . Buscamos las funciones  $Q_i, P_i$  tal que la transformación sea canónica. El jacobiano de la transformación es

$$\mathcal{J}_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q_j} & \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial p_j} \\ \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial q_j} & \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial p_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{ij} + \alpha \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} & \alpha \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \\ \alpha \frac{\partial P_i}{\partial q_j} & \delta_{ij} + \alpha \frac{\partial P_i}{\partial p_j} \end{pmatrix} \quad (15.51)$$

para que la transformación sea canónica, necesitamos  $\mathcal{J}\Omega\mathcal{J}^\top = \Omega$  es decir

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} + \frac{\partial P_j}{\partial p_i} = 0, \quad \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} = 0, \quad \frac{\partial P_i}{\partial q_j} - \frac{\partial P_j}{\partial q_i} = 0, \quad (15.52)$$

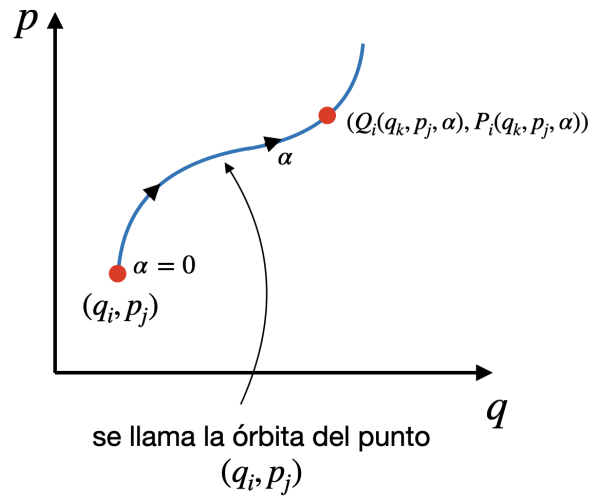
lo que significa que existe una función  $G(q, p)$  tal que

$$P_i = -\frac{\partial G}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial G}{\partial p_i} \quad (15.53)$$

Se dice que  $G$  genera la transformación. Estas visiones nos permite ver las transformaciones canónicas de otra manera. Por el momento, hemos visto un espacio de fase con coordenadas  $(q, p)$  y el cambio a  $(Q, P)$  era similar a un cambio de coordenadas en el mismo punto. Es una forma pasiva. Existe una visión activa en la cual consideramos una familia de transformaciones

$$q_i \mapsto Q_i(q, p, \alpha) \quad (15.54)$$

$$p_i \mapsto P_i(q, p, \alpha) \quad (15.55)$$



tal que sea una transformación canónica para cualquier  $\alpha$  y  $Q_i(q, p, 0) = q_i$ ,  $P_i(q, p, 0) = p_i$ . En ese caso, veamos un desplazamiento en el espacio de fase del punto  $(q_i, p_i)$  a  $(Q_i(q, p, \alpha), P_i(q, p, \alpha))$ . El vector tangente a estas líneas tiene coordenadas  $(\frac{dq_i}{d\alpha}, \frac{dp_i}{d\alpha})$ . Pero, sabemos que alrededor de  $\alpha = 0$ , tenemos

$$Q_i = q_i + \alpha \frac{\partial G}{\partial p_i} \quad (15.56)$$

$$P_i = p_i - \alpha \frac{\partial G}{\partial q_i} \quad (15.57)$$

es decir

$$\frac{dq_i}{d\alpha} = \frac{\partial G}{\partial p_i} \quad (15.58)$$

$$\frac{dp_i}{d\alpha} = -\frac{\partial G}{\partial q_i} \quad (15.59)$$

Por ejemplo, dado una función  $G(q, p)$  podemos obtener la órbita de un punto. Si

consideramos  $G = \frac{1}{2} (q^2 + p^2)$ , obtenemos

$$\frac{dq}{d\alpha} = p \quad (15.60)$$

$$\frac{dp}{d\alpha} = -q \quad (15.61)$$

es decir

$$\frac{d^2q}{d\alpha^2} = -q \quad (15.62)$$

lo que implica

$$q(\alpha) = A \cos \alpha + B \sin \alpha \quad (15.63)$$

$$p(\alpha) = -A \sin \alpha + B \cos \alpha \quad (15.64)$$

pero cuando  $\alpha = 0$ , tenemos  $q(0) = q$  y  $p(0) = p$

$$q(\alpha) = q \cos \alpha + p \sin \alpha \quad (15.65)$$

$$p(\alpha) = -q \sin \alpha + p \cos \alpha \quad (15.66)$$

lo que podemos escribir

$$q(x)^2 + p(x)^2 = q^2 + p^2 \quad (15.67)$$

es decir que las orbitas son círculos.

Estas ecuaciones (15.58, 15.59) son muy parecidas a las ecuaciones de Hamilton. Por lo tanto, cada familia de transformaciones canónicas, con parámetro  $\alpha$ , puede ser visto como un movimiento en el espacio de fase (un flujo) donde  $G$  juega el rol del hamiltoniano y  $\alpha$  el parámetro de tiempo. De forma inversa, la evolución en el tiempo puede ser visto como una transformación canónica de  $(q_i(t_0), p_i(t_0))$  a  $(q_i(t), p_i(t))$  con  $H$  el generador de la evolución temporal.

Por ejemplo, si  $G = p_j$

$$q_i \longmapsto q_i + \alpha \frac{\partial G}{\partial p_i} = q_i + \alpha \delta_{ij} \quad (15.68)$$

$$p_i \longmapsto p_i - \alpha \frac{\partial G}{\partial q_i} = p_i \quad (15.69)$$

lo que corresponde a una traslación en el espacio de fase, es decir que la traslación  $q_i$  esta generada por el momento  $p_i$  (lo que parece al teorema de Noether).

También el generador de las rotaciones es el momento angular. De hecho, considerando la familia de transformaciones en el espacio de fase  $(q_1, q_2, p_1, p_2)$  correspondiendo a una rotación de ángulo  $\alpha$ .

$$q_1(\alpha) = q_1 \cos \alpha + q_2 \sin \alpha \quad (15.70)$$

$$q_2(\alpha) = q_2 \cos \alpha - q_1 \sin \alpha \quad (15.71)$$

$$p_1(\alpha) = p_1 \cos \alpha + p_2 \sin \alpha \quad (15.72)$$

$$p_2(\alpha) = p_2 \cos \alpha - p_1 \sin \alpha \quad (15.73)$$

De forma infinitesimal, tenemos

$$q_1(\alpha) = q_1 + \alpha q_2 \quad (15.74)$$

$$q_2(\alpha) = q_2 - \alpha q_1 \quad (15.75)$$

$$p_1(\alpha) = p_1 + \alpha p_2 \quad (15.76)$$

$$p_2(\alpha) = p_2 - \alpha p_1 \quad (15.77)$$

lo que implica que el generador es  $G$  tal que

$$q_2 = \frac{\partial G}{\partial p_1} \quad (15.78)$$

$$-q_1 = \frac{\partial G}{\partial p_2} \quad (15.79)$$

$$p_2 = -\frac{\partial G}{\partial q_1} \quad (15.80)$$

$$-p_1 = -\frac{\partial G}{\partial q_2} \quad (15.81)$$

es decir que  $G = q_2 p_1 - q_1 p_2$ , lo que corresponde al momento angular  $-L_z$  ( $L_z = x p_y - y p_x$ ). Eso nos motiva a ver el teorema de Noether de otra manera. Consideramos una transformación canónica infinitesimal generada por  $G$ . Bajo esta transformación, el hamiltoniano cambia de

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \quad (15.82)$$

$$= \alpha \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \alpha \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} = \alpha \{H, G\} \quad (15.83)$$

Este generador  $G$  es una simetría si el hamiltoniano no cambia, es decir si  $\delta H = 0$  o si  $\{H, G\} = 0$ . Pero hemos visto que  $\dot{G} = \{G, H\}$  es decir  $\dot{G} = 0$  lo que implica que  $G$  es

conservado. En resumen,

- Si  $G$  es una simetría,  $G$  es conservado
- Si  $G$  es conservado, podemos siempre encontrar una transformación canónica que es una simetría.

## 15.2. Funciones generatrices

Una de las principales razones por las que el formalismo hamiltoniano es interesante es que el conjunto de transformaciones de coordenadas que dejan invariante la forma de las ecuaciones de Hamilton es mucho más amplio que el conjunto de transformaciones de coordenadas que dejan invariante la forma de las ecuaciones de Lagrange. En el caso de transformaciones canónicas infinitesimales, hemos encontrado una manera de obtenerlas con una función generatriz,  $G(q, p)$  tal que

$$q_i \mapsto q_i + \alpha \frac{\partial G}{\partial p_i} \quad (15.84)$$

$$p_i \mapsto p_i - \alpha \frac{\partial G}{\partial q_i} \quad (15.85)$$

Lo que sería bueno es tener una manera de obtener transformaciones canónicas (no infinitesimales) a partir de funciones generatrices. Para eso, vamos a hacer un análisis general es decir que el hamiltoniano o el cambio de coordenadas puede depender del tiempo. Para simplificar las notaciones, usaremos un sistema de un grado de libertad es decir que tenemos  $H = H(q, p, t)$ . Queremos encontrar transformaciones  $Q = Q(q, p, t)$ ,  $P = P(q, p, t)$  que mantengan la forma de las ecuaciones de Hamilton. Es decir de las ecuaciones

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \quad (15.86)$$

llegaremos a las ecuaciones

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P}, \quad \frac{dP}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q}, \quad (15.87)$$

con  $\tilde{H}$  el nuevo hamiltoniano que podría ser el hamiltoniano anterior con las nuevas coordenadas o una nueva función. Suponiendo que la transformación  $Q = Q(q, p, t)$ ,  $P = P(q, p, t)$  es diferenciable y se puede invertir, es decir, es posible encontrar  $q$  y  $p$  en términos de  $Q, P$ , y  $t$  y, por lo tanto,  $H$  se puede ver también como una función de

$Q, P,$  y  $t$ . Haciendo uso repetidamente de la regla de la cadena, encontramos que

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = \frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (15.88)$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial q} \left( \frac{\partial H}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial p} \right) - \frac{\partial Q}{\partial p} \left( \frac{\partial H}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial H}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial q} \right) + \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (15.89)$$

$$= \frac{\partial H}{\partial P} \left( \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} \right) + \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (15.90)$$

$$= \frac{\partial H}{\partial P} \{Q, P\} + \frac{\partial Q}{\partial t}, \quad (15.91)$$

De forma similar, tenemos

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = \frac{\partial H}{\partial Q} \{Q, P\} - \frac{\partial P}{\partial t} \quad (15.92)$$

Considerando que la transformación es canónica, tenemos  $\{Q, P\} = 1$  lo que implica

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = \frac{\partial H}{\partial P} + \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (15.93)$$

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = \frac{\partial H}{\partial Q} - \frac{\partial P}{\partial t} \quad (15.94)$$

Recubrimos el resultado anterior, es decir que en el caso de transformaciones que no dependen del tiempo, tenemos  $\tilde{H} = H$ . El nuevo hamiltoniano está obtenido a partir del hamiltoniano original usando las nuevas coordenadas.

Es fácil demostrar que la expresión  $pdq - PdQ + (\tilde{H} - H)dt$  es una forma diferencial exacta, es decir que (al menos localmente) existe una función  $F$  tal que

$$dF = pdq - PdQ + (\tilde{H} - H)dt \quad (15.95)$$

De forma genérica, una forma diferencial exacta  $dF = \sum_i A_i dx^i$  se puede demostrar usando que

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^j} = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} \quad (15.96)$$

ya que las derivadas conmutan  $\frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^j \partial x^i}$

Por lo tanto, para demostrar que nuestra expresión es una diferencial exacta, reescribimos

$$\begin{aligned}
 pdq - PdQ + (\tilde{H} - H)dt &= pdq - P\left(\frac{\partial Q}{\partial q}dq + \frac{\partial Q}{\partial p}dp + \frac{\partial Q}{\partial t}dt\right) + (\tilde{H} - H)dt \quad (15.97) \\
 &= \left(p - P\frac{\partial Q}{\partial q}\right)dq - P\frac{\partial Q}{\partial p}dp + \left(-P\frac{\partial Q}{\partial t} + \tilde{H} - H\right)dt \quad (15.98)
 \end{aligned}$$

Podemos fácilmente verificar que

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(P\frac{\partial Q}{\partial t} + H - \tilde{H}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(P\frac{\partial Q}{\partial q} - p\right) \quad (15.99)$$

De hecho,

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(P\frac{\partial Q}{\partial t} + H - \tilde{H}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(P\frac{\partial Q}{\partial q} - p\right) = \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial t}\frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial(H - \tilde{H})}{\partial q} \quad (15.100)$$

$$= -\frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial(H - \tilde{H})}{\partial P} - \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial(H - \tilde{H})}{\partial Q} + \frac{\partial(H - \tilde{H})}{\partial q} = 0. \quad (15.101)$$

donde hemos usado las relaciones (15.93, 15.94) y la relación  $\partial p/\partial t = 0$  ya que  $(q, p, t)$  son 3 variables independientes.

De forma similar tenemos las otras relaciones como por ejemplo

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(P\frac{\partial Q}{\partial q} - p\right) = \frac{\partial}{\partial q}\left(P\frac{\partial Q}{\partial p}\right) \quad (15.102)$$

que corresponde a la condición de una transformación canónica  $\{Q, P\} = 1$ . Por lo tanto, existe localmente una función de  $(q, Q, t)$  tal que

$$dF = pdq - PdQ + (\tilde{H} - H)dt \quad (15.103)$$

lo que implica las ecuaciones

$$P = -\frac{\partial F}{\partial Q}, \quad p = \frac{\partial F}{\partial q}, \quad \tilde{H} - H = \frac{\partial F}{\partial t} \quad (15.104)$$

Esta función es llamada una función generatriz de primera categoría, y se denota  $F_1(q, Q, t)$ . En conclusión:

Podemos definir una función  $F_1(q, Q, t)$  tal que el nuevo hamiltonian es

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad (15.105)$$

y las otras coordenadas son

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q}, \quad p = \frac{\partial F_1}{\partial q} \quad (15.106)$$

de tal forma que las ecuaciones de Hamilton sean similares

$$\dot{Q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P}, \quad \dot{P} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} \quad (15.107)$$

Por ejemplo, por la función  $F_1(q, Q) = qQ$ , tenemos

$$P = -q, \quad p = Q \quad (15.108)$$

es decir que esta función generatriz intercambia esencialmente las coordenadas y los momentos.

Podemos definir tres otras funciones generatrices (con una variable antigua y una variable nueva) tal que

$F_2(q, P)$	$F_3(p, Q)$	$F_4(p, P)$
$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$	$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}$	$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}$
$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$	$P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}$	$Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}$

Estas funciones pueden ser construidas como transformadas de Legendre de  $F_1$ . Es decir,

$$F_2(q, P) = F_1(q, Q) + QP, \quad (15.109)$$

$$F_3(p, Q) = F_1(q, Q) - qp, \quad (15.110)$$

$$F_4(p, P) = F_3(p, Q) + QP = F_1(q, Q) - qp + QP. \quad (15.111)$$

Por ejemplo

$$dF_2 = dF_1 + QdP + PdQ = pdq + QdP + (\tilde{H} - H)dt \quad (15.112)$$

lo que implica bien las relaciones

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} \quad (15.113)$$

Un ejemplo trivial, es la función  $F_2 = qP$ , por la cual tenemos

$$p = P, \quad Q = q \quad (15.114)$$

lo que corresponde a la transformación identidad.

De forma menos trivial, si tenemos el hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2q^2} + \frac{p^2q^4}{2} \quad (15.115)$$

podemos usar una función generatriz de tercer tipo  $F_3(p, Q) = p/Q$  tal que

$$q = -\frac{\partial F_3}{\partial p} = -\frac{1}{Q}, \quad P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q} = \frac{p}{Q^2} \quad (15.116)$$

lo que implica que

$$q = -\frac{1}{Q}, \quad p = PQ^2 \quad (15.117)$$

el nuevo hamiltoniano es

$$\tilde{H} = \frac{P^2}{2} + \frac{Q^2}{2} \quad (15.118)$$

es decir el hamiltoniano del oscilador armónico que obviamente sabemos resolver.

### 15.3. Ecuación de Hamilton-Jacobi

Dentro de todas las transformaciones posibles, existe una transformación que transforma el hamiltoniano  $H(q, p, t)$  en el nuevo hamiltoniano  $\tilde{H}(Q, P, t) = 0$ . En este caso, tendríamos las ecuaciones de Hamilton siguientes

$$\dot{Q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = 0, \quad \dot{P} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = 0 \quad (15.119)$$

es decir que  $Q = Q_0$  y  $P = P_0$ , dos constantes. El hamiltoniano es inicialmente una función de  $(q, p, t)$ , pero si consideramos que  $S$  es una función generatriz de segundo tipo, tenemos  $p = \partial S / \partial q$ , lo que implica que la ecuación  $\tilde{H} = 0$  nos da

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0 \quad (15.120)$$

Es la ecuación de Hamilton-Jacobi; transforma un problema de varias ecuaciones

ordinarias, las ecuaciones de Hamilton, en una ecuación diferencial parcial para la función generatriz  $S$ .

Por ejemplo, si consideramos el caso de una partícula libre descrito por el hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2} \quad (15.121)$$

obtenemos la ecuación

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 = 0 \quad (15.122)$$

Podemos buscar una solución usando un ansatz tal que  $S = f(t) + g(q)$ , lo que implica

$$f'(t) = -\frac{g'(q)^2}{2} = \text{constante} \equiv -E \quad (15.123)$$

es decir  $f(t) = -Et$  y  $g(q) = \pm\sqrt{2E}q + A$  con  $A$  una constante de integración. En resumen, nuestra función generatriz es (la constante  $A$  es irrelevante)

$$S(t, q, P) = -Et \pm \sqrt{2E}q \quad (15.124)$$

Podemos identificar la constante  $E$  con la constante  $P = P_0$ , ya que como el hamiltoniano es nulo, tenemos  $Q = Q_0$  y  $P = P_0$ . Por ejemplo, podemos definir  $E = P_0$  lo que implica

$$S = -P_0 t \pm \sqrt{2P_0}q \quad (15.125)$$

Por ser una función generatriz de segundo tipo, tenemos

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \pm\sqrt{2P_0}, \quad Q_0 = \frac{\partial S}{\partial P_0} = -t \pm \frac{q}{\sqrt{2P_0}} \quad (15.126)$$

es decir

$$q = \pm\sqrt{2P_0}(t + Q_0), \quad p = \pm\sqrt{2P_0} \quad (15.127)$$

lo que corresponde bien a la solución de una partícula libre.