

Geodésicas en el espacio de Sitter y anti-de Sitter

a/ Podemos estudiar las geodésicas en el plano $\theta = \pi/2$ debido a las simetrías. El lagrangiano de partícula puntual se reduce entonces a

$$2\mathcal{L} = -ft^2 + \frac{\dot{r}^2}{f} + r^2\dot{\phi}^2$$

donde $f = 1 - \Lambda r^2/3$.

b/ Como t y ϕ son cíclicas, obtenemos

$$E = ft, \quad L = r^2\dot{\phi}$$

donde E es la energía conservada por unidad de masa y L el momento angular conservado por unidad de masa.

c/ La velocidad está normalizada como

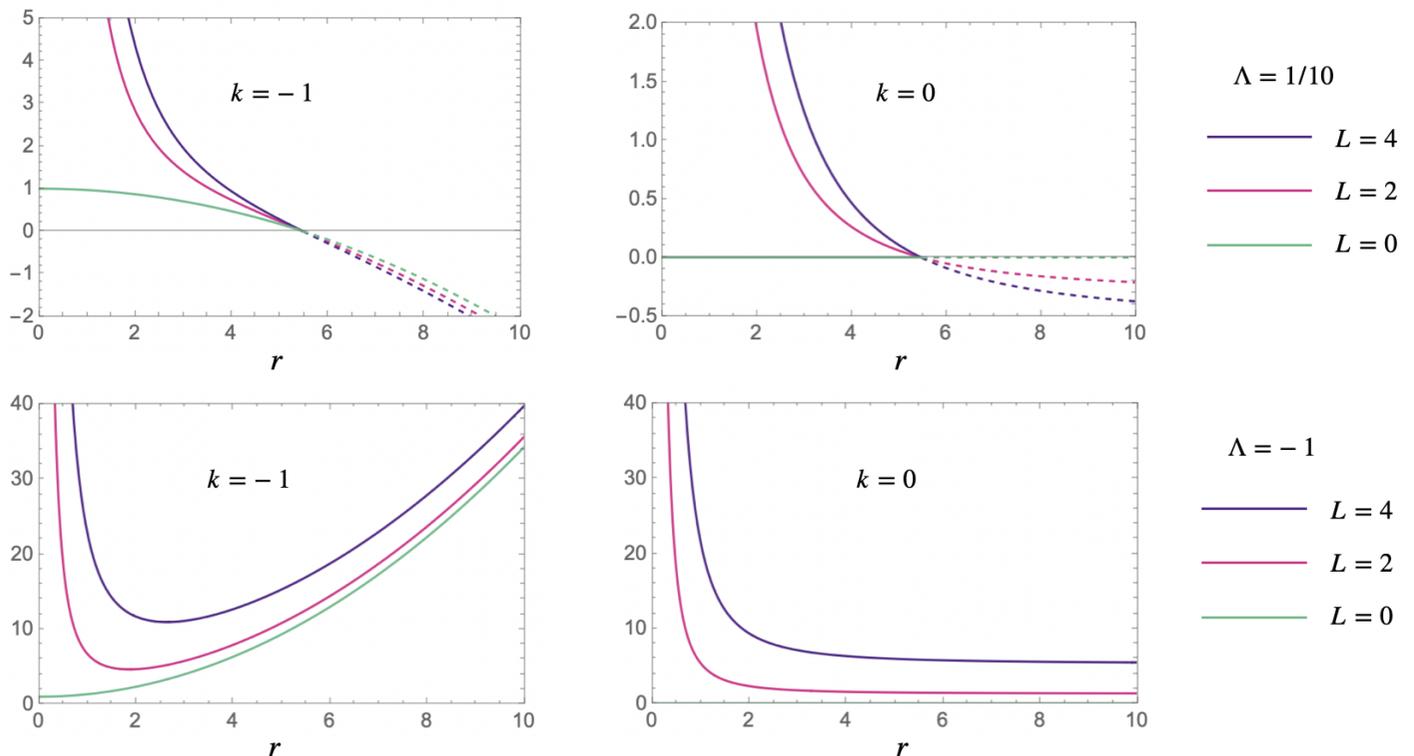
$$-ft^2 + \frac{\dot{r}^2}{f} + r^2\dot{\phi}^2 = k$$

donde $k = 0$ para geodésicas nulas y $k = -1$ para geodésicas tipo tiempo. Usando las coordenadas cíclicas, obtenemos

$$\dot{r}^2 = E^2 + \left(k - \frac{L^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)$$

De donde podemos identificar el potencial efectivo

$$V_{\text{ef}}(r) = \left(-k + \frac{L^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)$$



d/ Podemos ver en los gráficos que existe una órbita circular estable para partículas masivas en el espacio AdS.

e/ Para trayectorias nulas radiales en de Sitter, tenemos

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \pm E \\ \dot{t} &= \frac{E}{1 - \frac{\Lambda}{3}r^2}\end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\frac{dt}{dr} = \pm \frac{1}{1 - \frac{\Lambda}{3}r^2}$$

obtenemos

$$t(r) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\Lambda}} \ln\left(\frac{1 + \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}r}{1 - \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}r}\right) + \text{constante}$$

f/ Por lo tanto, cuando r se acerca a $\sqrt{3/\Lambda}$, el tiempo t diverge, mientras que $r = \pm E\tau$ y por lo tanto τ es finito cuando r alcanza el horizonte.

g/ En el caso AdS con $k = -1$, es más simple definir $\Lambda = -3/\ell^2$

$$\dot{r}^2 = E^2 - \left(1 + \frac{r^2}{\ell^2}\right) \equiv A^2 - \frac{r^2}{\ell^2}$$

con solución

$$r(\tau) = A\ell \sin\left(\frac{\tau}{\ell} + \delta\right)$$

El radio máximo es $r_{\text{máx}} = A\ell \equiv \ell\sqrt{E^2 - 1}$ y por lo tanto es imposible alcanzar el infinito.

h/ El período de oscilación es $2\pi\ell = 2\pi\sqrt{-3/\Lambda}$

i/ En este caso, tenemos

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \pm E \\ \dot{t} &= \frac{E}{1 + \frac{r^2}{\ell^2}}\end{aligned}$$

Podemos integrarlo para obtener

$$t(r) = \pm\ell \arctan\left(\frac{r}{\ell}\right) + \text{constante}$$

Entonces, el rayo de luz que parte del origen (signo +) alcanza el infinito ($r \rightarrow \infty$) en un tiempo de coordenada finito

$$t_\infty = +\frac{\pi}{2}\ell,$$

mientras que su parámetro afín $\lambda = r/E$ diverge.

j/ Para de Sitter: $f_{\text{dS}} \rightarrow 0$ en el horizonte. La superficie nula resultante es un verdadero horizonte cosmológico. El potencial efectivo no tiene mínimo, por lo que las partículas masivas no pueden permanecer en órbitas estables. Toda trayectoria o permanece cerca del origen o alcanza el horizonte en tiempo propio finito. Mientras que para anti-de Sitter: $f_{\text{AdS}} \rightarrow \infty$ cuando $r \rightarrow \infty$, produciendo una "pared" confinante. V_{ef} crece tanto para r pequeños como grandes, dando lugar a un verdadero mínimo y permitiendo órbitas ligadas estables; incluso las geodésicas radiales tipo tiempo se ven forzadas a oscilar, retornando repetidamente al centro tras un intervalo de tiempo propio $\pi\ell$ (medio período).