1. Espacio simétricamente esférico en 2D

Consideremos una métrica Riemanniana general en dos dimensiones (no Lorentziana) en coordenadas $\left(x^1, x^2\right)$, que denotaremos por (x, y). La métrica simétrica más general tiene la forma:

$$ds^2 = g_{11}(x,y)\,dx^2 + 2g_{12}(x,y)\,dx\,dy + g_{22}(x,y)\,dy^2.$$

Impondremos ahora simetría esférica. En dos dimensiones, el grupo de rotaciones es SO(2), lo que implica que debe existir un vector de Killing que genere las rotaciones. Sea ξ^μ un vector de Killing

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0.$$

Podemos entonces pasar a coordenadas adaptadas a esta simetría. Introducimos coordenadas (r, ϕ), donde $\phi \in [0, 2\pi[$ parametriza las órbitas del vector de Killing $\xi = \partial_\phi$, y r es la coordenada transversal. Los componentes del campo de Killing son

$$\xi^r = 0\,, \quad \xi^\phi = 1,$$

lo que implica a partir de la ecuación de Killing que

$$\partial_\phi g_{\mu\nu} = 0.$$

Por lo tanto, la métrica bidimensional más general que admite un vector de Killing rotacional es

$$ds^2 = A(r)\,dr^2 + 2B(r)\,dr\,d\phi + C(r)\,d\phi^2.$$

Ahora usamos la libertad de coordenadas para eliminar el término cruzado $dr\,d\phi$. Esto siempre puede hacerse mediante una redefinición de ϕ, por ejemplo

$$\phi' = \phi + F(r), \quad F'(r) = \frac{B(r)}{C(r)}.$$

Dado que $\phi \to \phi + 2\pi$ implica $\phi' \to \phi' + 2\pi$, el nuevo ángulo sigue siendo periódico. En las coordenadas (r, ϕ') la métrica toma la forma

$$ds^2 = \left[A(r) - \frac{B(r)^2}{C(r)}\right] dr^2 + C(r)\,d\phi'^2.$$

Definimos una nueva coordenada radial

$$\rho = \int^r \sqrt{A(r) - \frac{B(r)^2}{C(r)}}\,dr,$$

renombramos $C(r(\rho)) = R^2(\rho)$, y obtenemos finalmente

$$ds^2 = d\rho^2 + R^2(\rho)\,d\phi'^2$$

2. Simetrías del espacio FLRW

Sabemos que el vector de Killing ξ^μ es solución de la ecuación de Killing

$$\xi^\sigma \partial_\sigma g_{\mu\nu} + (\partial_\mu \xi^\alpha) g_{\alpha\nu} + (\partial_\nu \xi^\beta) g_{\mu\beta} = 0$$

Para los diferentes valores de (μ, ν) tenemos

$$
\begin{aligned}
&\mu = 0\,, \nu = 0 \qquad && \partial_0 \xi^0 = 0 \\
&\mu = 0\,, \nu = i \qquad && (\partial_0 \xi^j) g_{ji} - \partial_i \xi^0 = 0 \\
&\mu = i\,, \nu = i \qquad && \xi^\sigma \partial_\sigma g_{ii} + 2(\partial_i \xi^k) g_{ki} = 0 \\
&\mu = i\,, \nu = j \qquad && (\partial_i \xi^k) g_{kj} + (\partial_j \xi^k) g_{ik} = 0
\end{aligned}
$$

Si escribimos la métrica $g_{ij} = a^2(t)\gamma_{ij}$, tenemos

$$
\begin{aligned}
&\mu = 0\,, \nu = 0 \qquad && \partial_0 \xi^0 = 0 \\
&\mu = 0\,, \nu = i \qquad && a^2(\partial_0 \xi^j) \gamma_{ji} - \partial_i \xi^0 = 0 \\
&\mu = i\,, \nu = i \qquad && 2a\dot{a}\gamma_{ii}\xi^0 + a^2 \xi^j \partial_j \gamma_{ii} + 2a^2(\partial_i \xi^k)\gamma_{ki} = 0 \\
&\mu = i\,, \nu = j \qquad && (\partial_i \xi^k) \gamma_{kj} + (\partial_j \xi^k) \gamma_{ik} = 0
\end{aligned}
$$

La tercera ecuación nos da

$$
2\frac{\dot{a}}{a}\gamma_{ii}\xi^0 = -\xi^j \partial_j \gamma_{ii} - 2(\partial_i \xi^k)\gamma_{ki}
$$

Dado que por la primera ecuación sabemos que ξ^0 depende solo de las coordenadas espaciales, el lado derecho de esta ecuación necesita tener una dependencia temporal proporcional a $\dot{a}/a$, lo cual implica

$$
\xi^i = \frac{\dot{a}}{a} F^i(x^j) \equiv H(t) F^i(x^j)
$$

Pero eso implica, a partir de la segunda ecuación, que

$$
a^2 \dot{H} F^j \gamma_{ji} - \partial_i \xi^0 = 0
$$

Por supuesto, podríamos considerar $\dot{H} = 0$, lo que corresponde al espacio plano o al espacio de de Sitter, pero como estamos interesados en FLRW, la única solución es

$$
\partial_i \xi^0 = 0\,, \qquad (\partial_0 \xi^j) = 0
$$

lo cual, a partir de la tercera ecuación, implica que $\xi^0 = 0$. En conclusión, no tenemos un vector de Killing en la dirección temporal y las componentes espaciales son independientes del tiempo. En conclusión, el vector de Killing general es

$$
\xi = (0, \xi^i(x^j))
$$

y las ecuaciones de Killing son

$$
\begin{aligned}
\xi^j \partial_j \gamma_{ii} + 2(\partial_i \xi^k)\gamma_{ki} &= 0 \\
(\partial_i \xi^k)\gamma_{kj} + (\partial_j \xi^k)\gamma_{ik} &= 0 \qquad (\text{para} \quad i \neq j)
\end{aligned}
$$

La primera ecuación da para $i = (r, \theta, \phi)$

$$
\alpha \partial_r \xi^r - \alpha' \xi^r = 0 \tag{1}
$$
$$
r\partial_\theta \xi^\theta + \xi^r = 0 \tag{2}
$$
$$
\partial_\phi \xi^\phi + \frac{\xi^r}{r} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\xi^\theta = 0 \tag{3}
$$

donde definimos $\alpha = \sqrt{1 - kr^2}$. La otra ecuación da para $(i, j) = (r, \theta), (r, \phi), (\theta, \phi)$ respectivamente

$$
\alpha^2 r^2 \partial_r \xi^\theta + \partial_\theta \xi^r = 0 \tag{4}
$$
$$
r^2 \alpha^2 \sin^2\theta \partial_r \xi^\phi + \partial_\phi \xi^r = 0 \tag{5}
$$

$$\sin^2\theta\partial_\theta\xi^\phi + \partial_\phi\xi^\theta = 0 \tag{6}$$

Usando las ecuaciones (1,2) tenemos

$$\begin{aligned}
\xi^r &= \alpha F(\theta,\phi) \\
\xi^\theta &= -\frac{\alpha}{r}G(\theta,\phi) + H(r,\phi)\,, \quad G_{,\theta} = F
\end{aligned}$$

lo que al sustituirse en la ecuación (4) da

$$G_{,\theta\theta}(\theta,\phi) + G(\theta,\phi) = -\alpha(r)r^2 H_{,r}(r,\phi)$$

Como el lado izquierdo depende de (θ,ϕ) y el derecho de (r,ϕ), deben depender solo de ϕ

$$\begin{aligned}
G_{,\theta\theta}(\theta,\phi) + G(\theta,\phi) &= A(\phi) \\
-\alpha(r)r^2 H_{,r}(r,\phi) &= A(\phi)
\end{aligned}$$

lo que implica

$$\begin{aligned}
G &= a(\phi)\cos\theta + b(\phi)\sin\theta + A(\phi) \\
H &= A(\phi)\frac{\alpha}{r} + B(\phi) \\
F &= -a(\phi)\sin\theta + b(\phi)\cos\theta
\end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
\xi^r &= \alpha(r)\Big(-a(\phi)\sin\theta + b(\phi)\cos\theta\Big) \\
\xi^\theta &= B(\phi) - \frac{\alpha(r)}{r}\Big(a(\phi)\cos\theta + b(\phi)\sin\theta\Big)
\end{aligned}$$

sustituyendo en las ecuaciones (3,5,6) obtenemos

$$\partial_\phi\xi^\phi = \frac{\alpha(r)}{r}\frac{a(\phi)}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}B(\phi) \tag{7}$$

$$\partial_r\xi^\phi = \frac{a'(\phi)\sin\theta - b'(\phi)\cos\theta}{r^2\alpha(r)\sin^2\theta} \tag{8}$$

$$\partial_\theta\xi^\phi = -\frac{B'(\phi)}{\sin^2\theta} + \frac{\alpha(r)}{r\sin^2\theta}\Big(a'(\phi)\cos\theta + b'(\phi)\sin\theta\Big) \tag{9}$$

Tomando la derivada respecto de r de (7) menos la derivada respecto de ϕ de (8) obtenemos $a'' + a = 0$ y $b'' = 0$, lo que implica

$$\begin{aligned}
a(\phi) &= c\cos\phi + d\sin\phi \\
b(\phi) &= e\phi + f
\end{aligned}$$

Tomando la derivada respecto de θ de (7) menos la derivada respecto de ϕ de (9) obtenemos $B'' + B = 0$, lo que implica

$$B(\phi) = g\cos\phi + h\sin\phi$$

Tomando la derivada respecto de θ de (8) menos la derivada respecto de r de (9) obtenemos $b' = 0$, lo que implica. En resumen, encontramos

$$a(\phi) = c\cos\phi + d\sin\phi \tag{10}$$

$$b(\phi) = f \tag{11}$$

$$B(\phi) = g\cos\phi + h\sin\phi \tag{12}$$

y las ecuaciones (7,8,9) se reducen a

$$\partial_\phi \xi^\phi = \frac{\alpha(r)}{r}\frac{a(\phi)}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}B(\phi) \tag{13}$$

$$\partial_r \xi^\phi = \frac{a'(\phi)}{r^2\alpha(r)\sin\theta} \tag{14}$$

$$\partial_\theta \xi^\phi = -\frac{B'(\phi)}{\sin^2\theta} + \frac{\alpha(r)}{r}a'(\phi)\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} \tag{15}$$

Integrando (14) y (15) obtenemos

$$\xi^\phi = -\frac{\alpha(r)}{r}\frac{a'(\phi)}{\sin\theta} + B'(\phi)\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + G(\phi)$$

que, al sustituirse en (13), da $G'(\phi) = 0$ y por tanto $G(\phi) = m$. En conclusión, nuestros vectores de Killing son

$$\begin{aligned}
\xi^r &= \alpha(r)\Big(-(c\cos\phi + d\sin\phi)\sin\theta + f\cos\theta\Big)\\
\xi^\theta &= g\cos\phi + h\sin\phi - \frac{\alpha(r)}{r}\Big((c\cos\phi + d\sin\phi)\cos\theta + f\sin\theta\Big)\\
\xi^\phi &= -\frac{\alpha(r)}{r}\frac{-c\sin\phi + d\cos\phi}{\sin\theta} + (-g\sin\phi + h\cos\phi)\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + m
\end{aligned}$$

En conclusión, nuestro vector de Killing puede escribirse como

$$\xi = \xi^\mu\partial_\mu = \xi^r\partial_r + \xi^\theta\partial_\theta + \xi^\phi\partial_\phi = hL_1 - gL_2 + mL_3 - cP_1 - dP_2 + fP_3$$

con

$$\begin{aligned}
L_1 &= \sin\phi\partial_\theta + \cot\theta\cos\phi\partial_\phi\\
L_2 &= -\cos\phi\partial_\theta + \cot\theta\sin\phi\partial_\phi\\
L_3 &= \partial_\phi\\
P_1 &= \sqrt{1-kr^2}\Big(\sin\theta\cos\phi\partial_r + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi\partial_\theta - \frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\partial_\phi\Big)\\
P_2 &= \sqrt{1-kr^2}\Big(\sin\theta\sin\phi\partial_r + \frac{1}{r}\cos\theta\sin\phi\partial_\theta + \frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\partial_\phi\Big)\\
P_3 &= \sqrt{1-kr^2}\Big(\cos\theta\partial_r - \frac{\sin\theta}{r}\partial_\theta\Big)
\end{aligned}$$

(L_1, L_2, L_3) son los generadores estándar de las rotaciones, los generadores usuales de $SO(3)$. Podemos verificar fácilmente que forman la álgebra

$$[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk}L_k$$

mientras que las "traslaciones" (P_1, P_2, P_3) dependen de k. Tenemos las conmutaciones

$$\begin{aligned}
[L_i, P_j] &= \epsilon_{ijk}P_k\\
[P_i, P_j] &= -k\epsilon_{ijk}L_k
\end{aligned}$$

lo que da las álgebras de Lie

$$\begin{aligned}
k = +1 &: \mathfrak{so}(4)\\
k = 0 &: \mathfrak{iso}(3)\\
k = -1 &: \mathfrak{so}(1,3)
\end{aligned}$$