Geodésicas en el espacio de Sitter y anti-de Sitter

Consideramos el espacio-tiempo

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{\Lambda}{3}r^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

con Λ positivo para el espacio de de Sitter y negativo para anti-de Sitter.

a/ Escriba el lagrangiano para las geodésicas $2\mathcal{L} = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$

b/ Identifique las dos coordenadas cíclicas y las cantidades conservadas correspondientes E (energía por unidad de masa) y L (momento angular por unidad de masa).

c/ Reduzca la ecuación radial a la forma $\dot{r}^2 + \mathrm{V}_{\mathrm{ef}}(r) = E^2$, definiendo un potencial efectivo $V_{\mathrm{ef}}(r)$ para de Sitter y anti-de Sitter.

d/ Comente sobre la existencia (o ausencia) de órbitas circulares estables tipo tiempo en cada caso.

e/ Tome $L = 0$ (caída radial) e integre $\dot{r}$ para obtener $t(r)$ para geodésicas nulas en de Sitter.

f/ Demuestre que los rayos radiales nulos alcanzan el horizonte cosmológico $r = \sqrt{3/\Lambda}$ en tiempo de coordenada t finito pero parámetro afín infinito.

g/ Para anti-de Sitter con $L = 0$, muestre que una geodésica tipo tiempo radial que parte de $r = 0$ oscila entre $r = 0$ y un máximo $r_{\text{máx}}$.

h/ Encuentre el período de oscilación medido en tiempo propio.

i/ Para anti-de Sitter con $L = 0$, muestre que una geodésica radial nula que parte de $r = 0$ alcanza el infinito.

j/ Compare brevemente las interpretaciones físicas de estos dos espacios-tiempo.