

Relatividad General

Radouane Gannouji

*Instituto de Física,
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso,
Avenida Universidad 330,
Curauma, Valparaíso, Chile*

<https://www.fis.ucv.cl/rgannouji>
radouane.gannouji@pucv.cl

Este curso corresponde a una asignatura de posgrado, dirigida, principalmente, a estudiantes que toman la relatividad general por primera vez. Los apuntes están basados en varios libros:

- Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity, "*Sean Carroll*"

Un buen libro, con una estructura estándar, que comienza con geometría diferencial y continúa con capítulos más orientados a la física.

- Introducing Einstein's Relativity, "*Ray A. d'Inverno*"

Una alternativa al libro anterior. Presenta una selección de temas bien equilibrada.

- Gravitation and Spacetime, "*Hans C. Ohanian and Remo Ruffini*"

La mayoría de los libros siguen, en esencia, los pasos de Einstein para motivar la ecuación de campo. Este libro adopta un enfoque distinto: introduce la ecuación de campo linealizada a través de una cuidadosa analogía formal con la teoría del electromagnetismo de Maxwell y, a partir de ahí, desarrolla la argumentación hacia la ecuación de campo completa. Aunque es algo más débil en la sección de geometría, ofrece un excelente tratamiento de las consecuencias experimentales y observacionales de la teoría.

- A First Course in General Relativity, "*Bernard F. Schutz*"

Un libro simple pero bueno para los que quieren iniciar. De un nivel más bajo al nivel del curso.

- Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity, "*James Hartle*"

Igual al anterior, más recomendable para el pregrado.

Contenido

I	Del espacio plano al espacio curvo	4
1.	Relatividad especial	4
1.1	Sistema de referencia inercial	4
1.2	Invariante del espacio-tiempo	5
1.3	Diagrama de espacio-tiempo	7
1.4	Tensores covariante	10
1.5	Dinámica relativista	13
1.6	Fluido relativista	14
2.	De la gravitación a la geometría	18
2.1	Modificación de la ecuación de Poisson	18
2.2	Principio de equivalencia	19
2.3	Gravedad y efectos de marea	21
2.4	Corrimiento al rojo gravitacional	23
2.5	Desviación de la luz	27
II	Matemática del espacio curvo	29
3.	Geometría diferencial	29
3.1	Variedad	29
3.2	Espacio tangente	32
3.3	Espacio cotangente	35
3.4	Tensores	36
4.	Geometría riemanniana y lorentziana	37
4.1	Métrica	37
4.2	Elemento de volumen	38
4.3	Conexión	39
4.4	Torsión	42
4.5	Derivada covariante	43
4.6	Transporte paralelo	46
4.7	Curvatura	47

4.8	Geodésicas	54
III	Las ecuaciones de la relatividad general	57
5.	Les ecuaciones de movimiento	57
5.1	Constante cosmológica	60
6.	Acción de Einstein-Hilbert	62
6.1	Termino de borde	64
7.	Algunos espacios triviales	66
7.1	Espacio de Sitter (dS)	66
7.2	Espacio Anti-de Sitter (AdS)	70
IV	Espacio-tiempo esféricamente simétrico	72
8.	Isometrias y simetría esférica	72
8.1	Isometrías del espacio de Minkowski	75
8.2	Isometrías de la 2-esfera	76
8.3	Simetría esférica	78
9.	El espacio de Schwarzschild	82
9.1	Campo gravitacional para un objeto aislado con simetría esférica	82
9.2	Geodésicas en el espacio de Schwarzschild	84
9.2.1	Caída libre de una partícula masiva	87
9.2.2	Observador estacionario	89
9.2.3	Caída libre de una partícula sin masa	90
9.2.4	Órbita de una partícula masiva	91
9.2.5	Órbita de una partícula sin masa	93
9.2.6	Precesión de las órbitas	97
9.2.7	Corrimiento al rojo gravitacional	98
9.2.8	Efecto Shapiro	101
9.3	Estructura geométrica del espacio de Schwarzschild	103
9.3.1	Singularidad	105
9.3.2	Coordenadas de caída libre (Gullstrand–Painlevé)	106
9.3.3	Coordenadas de Lemaître	108
9.3.4	Coordenadas de Eddington-Finkelstein	109
9.3.5	Coordenadas de Kruskal–Szekeres	111

9.3.6	Diagrama de Penrose	115
V	Cosmología	117
10.	Espacio homogéneo e isótropo	117
10.1	Espacio plano: $\mathbb{R}^3$	118
10.2	Espacio con curvatura positiva: 3-esfera	118
10.3	Espacio con curvatura negativa: hiperboloide	119
10.4	Métrica FLRW en coordenadas esféricas	120
10.5	Corrimiento al rojo en el espacio FLRW	121
10.6	Distancia luminosidad	122
10.7	Ecuación de Friedmann	125
VI	Ondas gravitacionales	131
11.	Teoría linealizada	131
11.1	Gauge	133
11.2	Onda progresiva	136
11.3	Efecto sobre la distancia	140
11.4	Polarizaciones	142
11.5	Fórmula del cuadrupolo	146
11.6	Sistema binario	150
12.	Radiación gravitacional	155
12.1	Energía	155
12.2	Flujo de energía	157
12.3	Hulse y Taylor	159
12.4	Amplitud de onda	162

Del espacio plano al espacio curvo

1. Relatividad especial

La relatividad general aparece como una aplicación de la relatividad especial a la teoría de la gravitación. Por eso, tenemos que hacer un repaso de la teoría encontrada por Einstein en el año 1905.

1.1 Sistema de referencia inercial

Tratando de defender un sistema copernicano, es decir con el Sol al centro y una Tierra en rotación, Galileo tuvo que responder al argumento de que, en un sistema con rotación, deberíamos sentir este movimiento. Galileo imaginó un experimento de caída libre en un barco que se mueve a velocidad constante: el objeto cae en línea recta verticalmente y no hacia la popa. Este es el **principio de relatividad de Galileo**: en un movimiento a velocidad constante, las leyes de la física son las mismas. De manera similar, como la Tierra se mueve con velocidad constante, según Galileo, no deberíamos sentir su rotación. En realidad, el efecto es pequeño porque se trata de un movimiento de rotación, que implica aceleración, y no de traslación. Este principio define una clase de sistemas de referencia privilegiados, llamados **inerciales**. Solo con Newton y su segunda ley, que depende de la aceleración y no de la velocidad, este principio toma una forma matemática rigurosa.

La segunda ley de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, es invariante bajo la transformación $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{v}t$. En este contexto, los sistemas de referencia inerciales se definen como aquellos que tienen un movimiento con velocidad constante $\mathbf{v}$ y no presentan movimiento relativo respecto a una referencia fundamental. Esta referencia es lo que Newton definió como

el **espacio absoluto** (para disgusto de Leibniz). Esta idea de **espacio absoluto**, junto con las leyes de Newton, colapsaran con la llegada de Einstein.

Sabemos, gracias a Rømer, Bradley y Fizeau, que la luz se desplaza a una velocidad finita y, gracias a Fizeau, Michelson y Morley, que la luz tiene la misma velocidad en todas las direcciones. Si bien las ecuaciones de Maxwell son compatibles con una propagación a velocidad finita (propagación de una onda), la ley de Newton considera interacciones instantáneas. Además, la teoría consistente con una velocidad finita de propagación de la información, el electromagnetismo, no era invariante bajo las transformaciones de Galileo. Es decir, era posible diseñar un experimento electromagnético que mostrara en qué sistema inercial nos encontramos. En este contexto, Einstein plantea dos hipótesis fundamentales.

Principio de relatividad: Todas las leyes de la física tienen la misma forma en todos los marcos inerciales. Todos los observadores inerciales son equivalentes.

Velocidad de la luz: La velocidad de la luz en el vacío tiene el mismo valor en todos los sistemas inerciales.

El segundo postulado asegura la consistencia con el primero. Una velocidad diferente indicaría un experimento que podría distinguir entre marcos inerciales. Estos postulados invalidan las **transformaciones de Galileo**, ya que según estas, si c es la velocidad en un sistema de referencia inercial, la velocidad es $c \pm v$ en un marco inercial con velocidad $\pm v$ respecto al primero.

1.2 Invariante del espacio-tiempo

Como c es constante, podemos definir una nueva distancia: ct . Por lo tanto, se necesitan 4 coordenadas (ct, x, y, z) para definir un evento. Entre dos eventos (ct_1, x_1, y_1, z_1) y (ct_2, x_2, y_2, z_2) , la distancia espacial es

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (1.1)$$

Para un rayo de luz que se desplaza entre estos dos puntos, la distancia es también

$$c(t_2 - t_1) \quad (1.2)$$

Entonces, tenemos

$$c(t_2 - t_1) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (1.3)$$

o de forma equivalente

$$-c^2(t_2 - t_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = 0 \quad (1.4)$$

Como c tiene el mismo valor en todos los marcos inerciales, la relación (1.4) se cumple en todos los marcos inerciales, es decir que es un invariante. Eso nos hace pensar que la buena manera de definir distancias infinitesimales es

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (\text{con } ds^2 = 0 \text{ para la luz}) \quad (1.5)$$

Sabemos que las transformaciones de Galileo son transformaciones que no cambian las distancias. Por lo tanto, no cambian el elemento de línea (1.5). Pero no son las transformaciones más generales. Por lo tanto, podemos buscar las transformaciones que no cambian el elemento de línea previo (llamado métrica de Minkowski). Estas transformaciones son las traslaciones, rotaciones y las transformaciones de Lorentz entre dos sistemas de referencia inerciales $(\mathcal{R})$ y $(\mathcal{R}')$ a velocidad $\mathbf{v}$. En el caso, del sistema $\mathcal{R}'$ a velocidad $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$ con respecto $\mathcal{R}$, tenemos

$$ct' = \gamma \left(ct - \frac{v}{c}x \right) \quad (1.6)$$

$$x' = \gamma(x - vt) \quad (1.7)$$

$$y' = y \quad (1.8)$$

$$z' = z \quad (1.9)$$

con

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}} \quad (1.10)$$

Para un objeto que se desplaza a velocidad v , tenemos

$$v^2 dt^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (1.11)$$

es decir

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + d\mathbf{x}^2 = -c^2 dt^2 + v^2 dt^2 = (v^2 - c^2) dt^2 \quad (1.12)$$

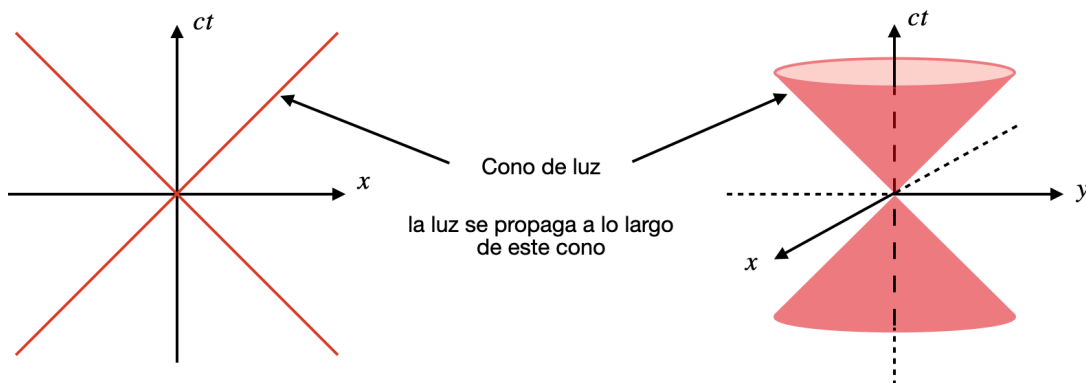
lo que implica que

- Si $v < c$, tenemos $ds^2 < 0$. Es una trayectoria de tipo tiempo.
- Si $v > c$, tenemos $ds^2 > 0$. Es una trayectoria de tipo espacio.

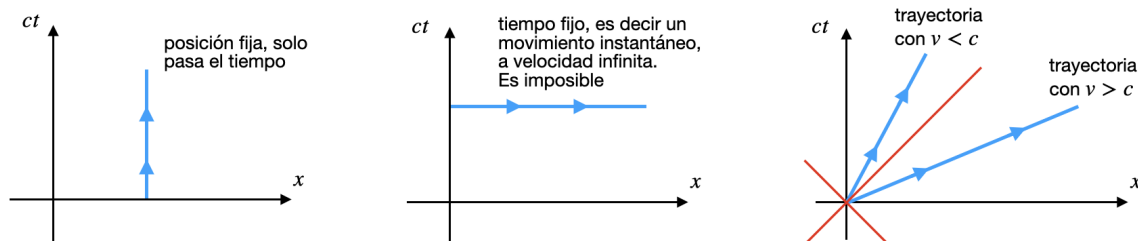
Pero como $v \leq c$ (siempre), $ds^2 \leq 0$. El caso contrario, $ds^2 > 0$, significa un movimiento superluminal, lo que es imposible.

1.3 Diagrama de espacio-tiempo

Un objeto muy útil es un diagrama de espacio-tiempo. Como no podemos representar 4 dimensiones, se representan 3 y a veces 2 dimensiones.



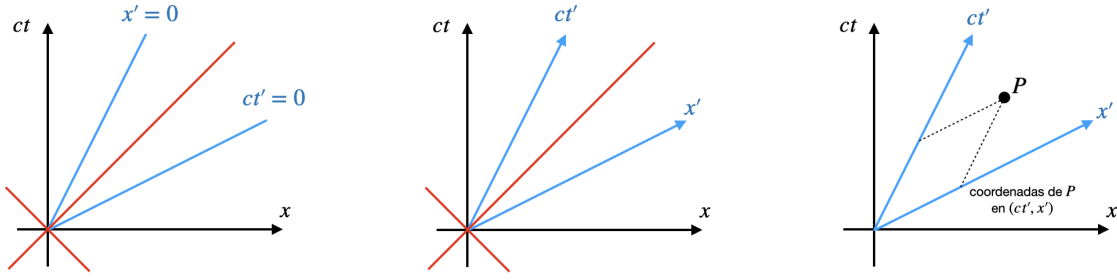
Podemos imaginar varias trayectorias, pero solo algunas son posible.



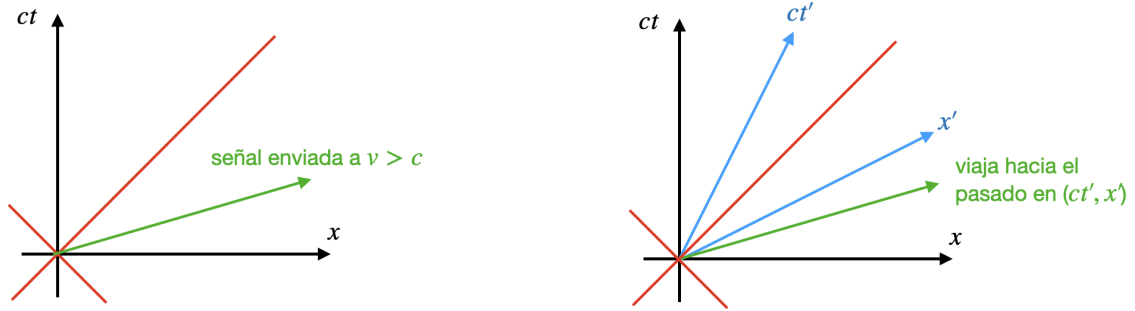
En resumen, en un diagrama de espacio-tiempo, el cono de luz nos define un límite entre lo que es posible y lo que es imposible.



Estas coordenadas (ct, x) corresponden a un observador. Queremos dibujar en el mismo diagrama las coordenadas de otro observador inercial. La línea "vertical" $x' = 0$ corresponde según (1.6) a $ct = \frac{c}{v}x$ aunque la línea "horizontal" $t' = 0$ corresponde a $ct = \frac{v}{c}x$



De estos diagramas podemos deducir ¿Por qué no podemos viajar a $v > c$?



Podemos siempre desplazarnos a una cierta velocidad y encontrarnos en un marco inercial en el cual la señal se desplaza hacia el pasado. Para el sistema $(\mathcal{R}')$, la señal va del futuro al pasado. Por eso, para no tener problemas de causalidad (causa y efecto), necesitamos que los desplazamientos sean subluminal.

Hay que tener cuidado al leer estos diagramas, ya que las escalas cambian de un sistema de referencia a otro. En las coordenadas (ct', x') , las escalas van a cambiar gracias a hipérbolas. Para demostrarlo, ocupamos que la distancia de espacio-tiempo es invariante, es decir

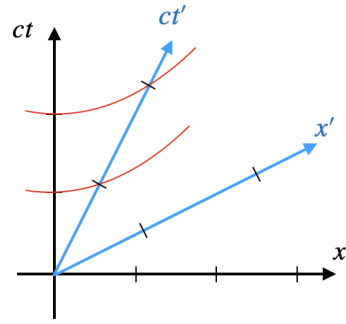
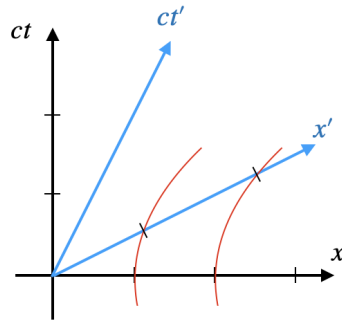
$$-c^2t^2 + x^2 = -c^2t'^2 + x'^2 \quad (1.13)$$

El punto $(ct, x) = (0, 1)$, se transforma en

$$-c^2t'^2 + x'^2 = 1$$

El punto $(ct, x) = (0, 2)$ se transforma en

$$-c^2t'^2 + x'^2 = 4$$



Aunque el punto $(ct, x) = (1, 0)$ se transforma en

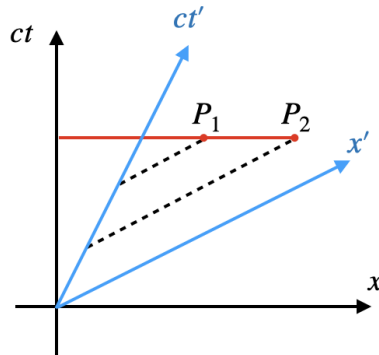
$$-c^2 t'^2 + x'^2 = -1$$

El punto $(ct, x) = (2, 0)$ se transforma en

$$-c^2 t'^2 + x'^2 = -4$$

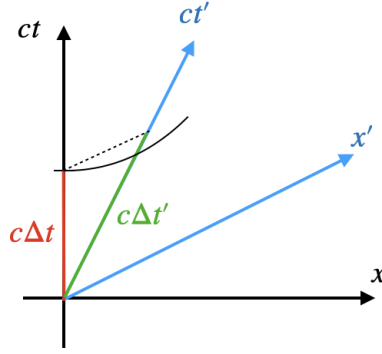
Estos diagramas nos permiten deducir tres resultados:

- La simultaneidad es un concepto relativo.



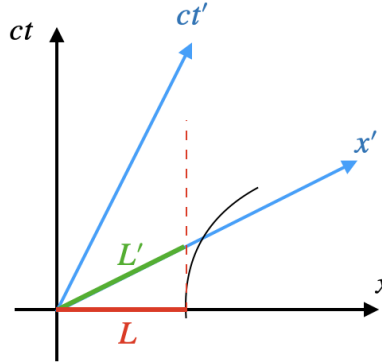
P_1 y P_2 son simultáneos en (ct, x) , pero P_2 ocurre antes que P_1 en (ct', x') .

- Dilatación del tiempo.



Para el observador estático (ct, x) , su tiempo propio ha sido más corto que el tiempo medido por el viajero (ct', x') , es decir, $\Delta t < \Delta t'$.

- Contracción de la longitud.



La medida L es la distancia entre dos puntos al mismo tiempo en (ct, x) . Veamos que $L' < L$.

1.4 Tensores covariante

Bajo una rotación $x'^i = R^i_j x^j$ (notación de Einstein), un escalar (o tensor cartesiano de rango 0) no cambia, mientras que un vector (o tensor cartesiano de rango 1) cambia de la siguiente forma

$$V'^i = R^i_j V^j \quad (1.14)$$

Como $R^i_j = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}$, tenemos

$$V'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} V^j \quad (1.15)$$

lo que define un vector contravariante. Para un vector covariante

$$V'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} V_j \quad (1.16)$$

Por ejemplo, el diferencial dx^i es un vector contravariante (índice arriba)

$$dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j \quad (1.17)$$

aunque el gradiente es un vector covariante (índice abajo)

$$\frac{\partial}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad \nabla'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \nabla_j \quad (1.18)$$

Pasamos de un vector contravariante V^i a un vector covariante V_i utilizando la métrica. En el caso euclidiano, se tiene

$$\delta_{ij}, \quad ds^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (1.19)$$

Para el caso relativista, usamos 4-vectores definidos por el grupo de Lorentz en vez de 4-vectores definidos por rotaciones. En este contexto, empleamos índices griegos ($\mu, \nu, \dots$) para indicar que estamos trabajando en 4D. Las coordenadas son

$$x^\mu, \quad \text{con } x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z.$$

La transformación de Lorentz se expresa como:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (1.20)$$

donde Λ representa una de las seis matrices que definen las transformaciones del grupo de Lorentz.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{ch } \phi & -\text{sh } \phi & 0 & 0 \\ -\text{sh } \phi & \text{ch } \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \text{ch } \phi & 0 & -\text{sh } \phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\text{sh } \phi & 0 & \text{ch } \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \text{ch } \phi & 0 & 0 & -\text{sh } \phi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\text{sh } \phi & 0 & 0 & \text{ch } \phi \end{pmatrix}$$

Como $\text{ch } \phi \geq 1$ y $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \geq 1$, podemos definir ϕ de tal manera que $\text{ch } \phi = \gamma$. Por lo tanto, dado que $\text{ch}^2 \phi - \text{sh}^2 \phi = 1$, se obtiene:

$$\text{sh } \phi = \sqrt{\text{ch}^2 \phi - 1} = \sqrt{\gamma^2 - 1} \quad (1.21)$$

Desarrollando, se llega a

$$\text{sh } \phi = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - 1} = \gamma \frac{v}{c} \quad (1.22)$$

Por lo tanto, la primera matriz se reescribe como

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma \frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

lo que corresponde a la transformación de Lorentz (1.6) para un desplazamiento en la dirección x . Las tres rotaciones y las tres transformaciones de Lorentz (o boosts) forman un grupo: el grupo de Lorentz. Con las cuatro traslaciones, constituyen el grupo de Poincaré.

De esta forma, se definen los tensores de Lorentz. Por ejemplo, el tensor electromagnético:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (1.23)$$

es un tensor de Lorentz de rango 2 y tipo $\binom{0}{2}$.

De hecho, A_μ es un 4-vector, por lo que:

$$A'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu A_\nu \quad (1.24)$$

lo que implica

$$F'_{\mu\nu} = \partial'_\mu A'_\nu - \partial'_\nu A'_\mu \quad (1.25)$$

$$= \Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda_\nu{}^\beta (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) = \Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda_\nu{}^\beta F_{\alpha\beta} \quad (1.26)$$

De forma similar, al caso cartesiano, la métrica $\eta_{\mu\nu}$ permite subir y bajar los índices.

1.5 Dinámica relativista

Considerando este formalismo, podemos reescribir la segunda ley de Newton. La idea es tener una ley que no cambie para las transformaciones que uno estudia. La ley de Newton es invariante bajo rotaciones (R_j^i) porque está escrita con cantidades que son tensores cartesianos

$$\frac{d}{dt}(mv^i) = F^i \quad (1.27)$$

donde tanto la fuerza F^i como la velocidad v^i transforman de forma contravariante, y la masa m y el tiempo t permanecen invariantes. Su generalización relativista es

$$\frac{d}{d\tau}(p^\mu) = f^\mu \quad (1.28)$$

con f^μ un 4-vector fuerza. Un ejemplo particular corresponde al caso electromagnético por lo cual

$$f^\mu = qF^{\mu\nu}u_\nu \quad (1.29)$$

con $u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}$ la 4-velocidad de la partícula y τ el tiempo propio definido por $c^2d\tau^2 = -ds^2$ ya que se define por un observador sin movimiento. Lo que nos permite obtener

$$c^2d\tau^2 = c^2dt^2 - d\mathbf{x}^2 \Leftrightarrow \frac{dt}{d\tau} = \gamma \quad (1.30)$$

Por lo tanto

$$u^\mu = (\gamma c, \gamma \mathbf{v}) \quad (1.31)$$

Lo que nos permite obtener la norma que es un invariante

$$\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -\gamma^2c^2 + \gamma^2\mathbf{v}^2 = -c^2, \quad \text{si } v \neq c \quad (1.32)$$

$$\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -\gamma^2c^2 + \gamma^2\mathbf{v}^2 = 0, \quad \text{si } v = c \quad (1.33)$$

Como está norma es un invariante, veamos que no podemos pasar de $v \neq c$ a $v = c$. También se define el 4-momentum como $p^\mu = mu^\mu$, de modo que $p^\mu p_\mu = m^2u^\mu u_\mu = -m^2c^2$ para el caso $v \neq c$ y $p^\mu p_\mu = 0$ para el caso $v = c$, lo que se generaliza por $p^\mu p_\mu = -m^2c^2$ con $m = 0$ para $v = c$. Tenemos también

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) \quad (1.34)$$

donde m es la masa (masa en reposo) y u^μ es la 4-velocidad, lo que nos da para una partícula masiva

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2} = \gamma m c^2 \quad (1.35)$$

y para una partícula sin masa

$$E = pc \quad (1.36)$$

Si consideramos un observador con 4-velocidad u^μ , podemos medir la energía de la partícula de 4-vector momentum p^μ . Dado que $p^\mu u_\mu$ es un invariante, toma el mismo valor en todos los marcos de referencia inerciales. En el marco donde el observador está en reposo, tenemos $u^\mu = (c, \mathbf{0})$. Por lo tanto

$$-p^\mu u_\mu = p^0 c = E \quad (1.37)$$

Por lo tanto, en otro sistema de referencia la energía de la partícula es

$$E = -p^\mu u_\mu. \quad (1.38)$$

1.6 Fluido relativista

Finalmente, en lugar de una partícula, queremos estudiar un fluido (gas de partículas). Consideremos el caso más simple, llamado polvo, es decir, partículas sin interacción entre ellas. Cada partícula tiene una masa en reposo m . Podemos caracterizar el fluido por su velocidad $\mathbf{v}$ y su densidad de masa ρ . Supongamos un volumen que se desliza con el fluido. En este sistema de referencia, el fluido está en reposo y su densidad de masa es ρ , mientras que su densidad de energía es ρc^2 , con $\rho = m/L^3$, donde L^3 es el volumen propio del fluido. Desde el laboratorio, consideremos un volumen infinitesimalmente pequeño. Hay una contracción en una dirección dada, por lo que:

$$\text{volumen observado} = \frac{\text{volumen propio}}{\gamma}$$

Su masa sigue siendo m , pero su energía no es simplemente mc^2 , sino γmc^2 debido al momento lineal $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$. Por lo tanto, la densidad de energía es:

$$\frac{\gamma mc^2}{\text{volumen observado}} = \gamma^2 \rho c^2$$

Esto implica que ρ se transforma como un tensor de rango 2 (sin índices explícitos), actuando como una componente de dicho tensor. Podemos definir un tensor de rango 2 que incluye ρ como:

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu \quad (1.39)$$

donde ρ es la densidad de masa comóvil con el fluido (lo que es un escalar). Siempre consideramos ρ como la densidad propia del fluido. En la aproximación newtoniana, $u^\mu = (c, \mathbf{v})$, y tenemos:

$$\begin{aligned} T^{00} &= \rho c^2 \quad (\text{densidad de energía}) \\ T^{0i} &= \rho c^2 v^i \quad (\text{densidad de momento lineal en la dirección } i) \\ T^{ij} &= \rho v^i v^j \end{aligned}$$

Vamos a demostrar que T^{ii} es la presión.

Consideramos una pared y queremos calcular cuántas partículas golpean la pared de area A . La distancia a la que viaja una partícula durante el tiempo Δt es

$$D = v_x \Delta t$$

Todas las partículas en el volumen $Av_x \Delta t$ que se mueven hacia la pared golpearán la pared. Si n es la densidad de partículas, $\frac{n}{2}$ van en la dirección de la pared (fluido unidimensional con movimiento aleatorio). Por lo tanto, durante Δt , hay

$$\frac{n}{2} Av_x \Delta t$$

partículas que golpean la pared. La fuerza sobre la pared es

$$F = \frac{d}{dt}(mv) \quad \Rightarrow \quad F \Delta t = \Delta(mv)$$

Si la partícula rebota sin pérdida de energía (choque elástico), el cambio de momento es

$$\Delta(mv) = 2mv_x$$

Considerando todas las partículas, tenemos

$$F \Delta t = 2mv_x \frac{n}{2} Av_x \Delta t$$

De lo que se deduce

$$F = mnAv_x^2$$

Lo que implica una presión

$$P = \frac{F}{A} = mnv_x^2$$

Esto muestra que T^{ii} es la presión. Para T^{ij} con $i \neq j$, se interpreta como una tensión cortante (ver curso de mecánica de fluidos). En conclusión

$$T^{00} \text{ es la densidad de energía, } T^{ii} \text{ es la presión.}$$

Un fluido perfecto se define como un fluido sin tensión de corte. Esto implica:

$$T^{00} = \rho c^2, \quad T^{11} = T^{22} = T^{33} = P$$

En un sistema de referencia en reposo con $u^\mu = (c, \mathbf{0})$, tenemos:

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u^\mu u^\nu + P \eta^{\mu\nu}$$

Claramente $T^{00} = \rho c^2$ y $T^{11} = T^{22} = T^{33} = P$. Por lo tanto, en otro sistema referencial, guardamos la misma forma

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u^\mu u^\nu + P \eta^{\mu\nu}, \quad u^\mu = (\gamma c, \gamma \mathbf{v}) \quad (1.40)$$

y en forma covariante

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u_\mu u_\nu + P \eta_{\mu\nu} \quad (1.41)$$

Se puede generalizar al fluido más general (imperfecto):

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u_\mu u_\nu + P \eta_{\mu\nu} + Q_\mu u_\nu + Q_\nu u_\mu + \pi_{\mu\nu},$$

donde $Q_\mu u^\mu = 0$, $\pi_{\mu\nu} u^\mu = 0$, y $\pi^\mu_\mu = 0$. El tensor $T_{\mu\nu}$ se llama el **tensor energía-momento** y es conservado, es decir

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

Verificamos si esto es verdadero:

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^{\mu\nu} &= \partial_\mu \left[\left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u^\mu u^\nu + P \eta^{\mu\nu} \right] \\ &= u^\nu u^\mu \partial_\mu \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) + \eta^{\mu\nu} \partial_\mu P + \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) [u^\nu \partial_\mu u^\mu + u^\mu \partial_\mu u^\nu] \end{aligned}$$

Sabemos que $u^\mu u_\mu = -c^2$ para partículas masivas (no consideramos en lo que viene el caso de partículas sin masa), lo que implica $u^\mu \partial_\nu u_\mu = 0$. Entonces si proyectamos esta ecuación en la dirección u_ν

$$u_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} = -c^2 u^\mu \partial_\mu \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) + u^\mu \partial_\mu P - c^2 \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) \partial_\mu u^\mu = -c^2 \partial_\mu (\rho u^\mu) - P \partial_\mu u^\mu = 0$$

De aquí se deduce la ecuación de continuidad

$$\partial_\mu (\rho u^\mu) + \frac{P}{c^2} \partial_\mu u^\mu = 0 \quad (1.42)$$

Regresando a $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, tenemos

$$u^\nu u^\mu \partial_\mu \rho + \frac{u^\nu u^\mu}{c^2} \partial_\mu P + \eta^{\mu\nu} \partial_\mu P + \rho \left(u^\nu \partial_\mu u^\mu + u^\mu \partial_\mu u^\nu \right) + \frac{P}{c^2} \left(u^\nu \partial_\mu u^\mu + u^\mu \partial_\mu u^\nu \right) = 0$$

usando (1.42) lo podemos reducir a

$$\left(\eta^{\mu\nu} + \frac{u^\mu u^\nu}{c^2} \right) \partial_\mu P + \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u^\mu \partial_\mu u^\nu = 0$$

En conclusión la ecuación $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ para un fluido perfecto es equivalente a las 2 ecuaciones

$$\partial_\mu (\rho u^\mu) + \frac{P}{c^2} \partial_\mu u^\mu = 0 \quad (1.43)$$

$$\left(\eta^{\mu\nu} + \frac{u^\mu u^\nu}{c^2} \right) \partial_\mu P + \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u^\mu \partial_\mu u^\nu = 0 \quad (1.44)$$

En el límite newtoniano ($v \ll c$, $P/c^2 \ll \rho$), obtenemos para la primera ecuación

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0,$$

que corresponde a la ecuación de continuidad, aunque la segunda ecuación se reduce para $\nu = i$ a

$$\partial_i P + v^i \frac{u^\mu}{c^2} \partial_\mu P + \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) (c \partial_0 v^i + v^j \partial_j v^i) = 0$$

pero el segundo termino es $\frac{v^i v^j}{c^2} \partial_j P + \frac{v^i}{c} \dot{P}$, lo que es despreciable y $\rho + P/c^2 \ll \rho$, lo que nos permite reducir la ecuación a la ecuación de Euler

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} = -\nabla P.$$

En el caso $\nu = 0$, se obtiene una ecuación de consistencia ya que es un fluido perfecto es decir sin viscosiad

$$\mathbf{v} \cdot \nabla P = 0$$

En conclusión, $T_{\mu\nu}$ es un tensor de rango 2 que describe un fluido, y $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ es una generalización relativista de las ecuaciones de la mecánica de fluidos.

2. De la gravitación a la geometría

Con la teoría de la relatividad especial, la teoría de Newton de la gravitación debe cambiar: la información se propaga de forma instantánea, es decir, no es invariante de Lorentz. Necesitamos una teoría relativista de la gravitación.

2.1 Modificación de la ecuación de Poisson

Una forma de describir la gravedad de Newton es considerar la ecuación de Poisson:

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho \quad (2.1)$$

donde ρ es la densidad de masa y Φ es el potencial gravitacional. Esta ecuación no es relativista porque no incluye el tiempo. Una solución simple sería cambiar $\Delta \rightarrow \square \equiv -\frac{1}{c^2}\partial_t^2 + \Delta$, es decir:

$$\square\Phi = 4\pi G\rho \quad (2.2)$$

Sin embargo, esta teoría es incompleta, ya que ρ no es un escalar, sino la componente T_{00} del tensor $T_{\mu\nu}$. Existen dos soluciones posibles:

$$\square\Phi_{\mu\nu} = 4\pi GT_{\mu\nu}$$

es una solución que se verá más tarde o bien podemos considerar la traza del tensor energía-momentum

$$\square\Phi = -4\pi GT, \quad \text{con } T = -\rho + 3\frac{P}{c^2}$$

lo que corresponde en el límite newtoniano a $T \simeq -\rho$ y por lo tanto a la ecuación de Poisson. Este tipo de teoría fue propuesto en 1912 por Gunnar Nordström.

Pero todavía persiste un problema. Según la relatividad, la energía equivale a la masa, pero la masa produce gravedad, lo que implica que la energía también produce gravedad. Existe una forma particular de energía, la gravitacional, que por lo tanto genera gravedad, lo que convierte esta teoría en no lineal. Podríamos pensar a una teoría como

$$\Phi\square\Phi = -4\pi GT \quad (2.3)$$

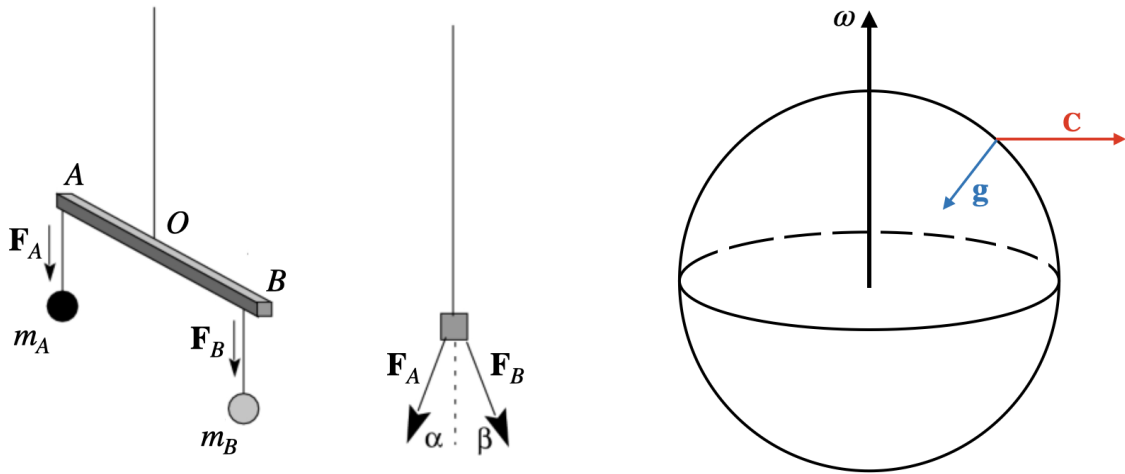
Sin embargo, Einstein demostró que una teoría con T no pueden ser correctas. Para la radiación, tratada como un gas de fotones, la ecuación de estado es $P = \rho c^2/3$, lo que implica $T = 0$ y, por tanto, $\square\Phi = 0$. Esto significa que la luz no interactúa con el campo gravitacional, contradiciendo las predicciones de Einstein basadas en un principio adicional, el principio de equivalencia.

2.2 Principio de equivalencia

Según la segunda ley de Newton, $\mathbf{F} = m_i \mathbf{a}$. Bajo una fuerza externa, la aceleración de un objeto es proporcional a la fuerza, con un factor de proporcionalidad m_i , la masa inercial. La ley de gravitación establece que $\mathbf{F}_g = m_g \mathbf{g}$, donde m_g es la masa gravitacional. Es un coeficiente, como q es el coeficiente para el electromagnetismo $\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$. No hay ninguna razón para que $m_g = q$ o $m_i = q$ o $m_g = m_i$. Aunque no hay una razón a priori los experimentos de tipo Eötvös demuestran que $m_g = m_i$ con una alta precisión. Mas exactamente, tenemos para 2 masas A y B

$$\begin{aligned} \eta &\equiv \left| \left(\frac{m_g}{m_i} \right)_A - \left(\frac{m_g}{m_i} \right)_B \right| < 10^{-9} \quad (\text{en el año 1889}) \\ &< 10^{-11} \quad (\text{Dicke, 1964}) \\ &< 10^{-13} \quad (\text{grupo Eöt-Wash, 1987}) \\ &< 10^{-15} \quad (\text{MICROSCOPE, 2017}) \end{aligned}$$

El dispositivo de Eötvös, o balanza de torsión, mide las fuerzas ejercidas sobre una barra debido a diferencias en la aceleración gravitacional e inercial.



Balanza de torsión

Las fuerzas que actúan sobre la barra de torsión generan un torque

$$\tau = \mathbf{OA} \times \mathbf{F}_A + \mathbf{OB} \times \mathbf{F}_B$$

$$\tau \cdot (\mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B) = (\mathbf{OA} - \mathbf{OB}) \cdot (\mathbf{F}_A \times \mathbf{F}_B)$$

Los cuerpos A y B están sometidos tanto a la fuerza gravitatoria de la Tierra como a la aceleración inercial debido a su rotación:

$$\mathbf{F}_A = m_{gA} \mathbf{g} + m_{iA} \mathbf{C},$$

$$\mathbf{F}_B = m_{gB} \mathbf{g} + m_{iB} \mathbf{C},$$

donde $\mathbf{C}$ representa la fuerza centrífuga, cuyo módulo está dado por:

$$|\mathbf{C}| = R_{\oplus} \omega^2 \sin \lambda,$$

siendo λ la latitud.

Se obtiene:

$$\begin{aligned} \tau \cdot (\mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B) &= m_{iA} m_{iB} \left[\left(\frac{m_g}{m_i} \right)_A - \left(\frac{m_g}{m_i} \right)_B \right] (\mathbf{OA} - \mathbf{OB}) \cdot (\mathbf{g} \times \mathbf{C}) \\ &= \eta m_{iA} m_{iB} (\mathbf{OA} - \mathbf{OB}) \cdot (\mathbf{g} \times \mathbf{C}) \end{aligned}$$

El torque produce una rotación de la barra $\theta = \tau/I$ con I el momento de inercia del sistema. La medición de este torque nos da acceso al parámetro η .

Si para todos los cuerpos, $m_i = m_g$, podemos eliminar los efectos de un campo gravitacional $\mathbf{g}$ estático y uniforme, utilizando un sistema de referencia uniformemente acelerado. Es decir, que si $\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{g}$, podemos definir $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2$ tal que $\frac{d^2 \mathbf{x}'}{dt^2} = \mathbf{0}$, es decir que forma un sistema de referencia inercial. Esto permite definir el principio de equivalencia débil.

Principio de equivalencia débil

Para cualquier evento en el espacio-tiempo con un campo gravitacional, podemos elegir un sistema de referencia inercial tal que, en las cercanías del evento, el movimiento de todos los cuerpos sea rectilíneo y uniforme.

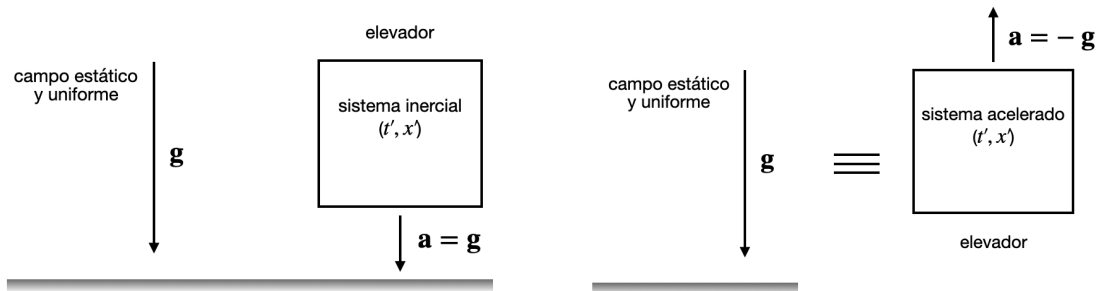
Pero sabemos que los cuerpos no son puntuales; tienen volumen, están constituidos

por varias partículas y fuerzas (electromagnética, fuerte) que contribuyen a la masa total (energía de masa, energía cinética, energía de enlace, etc.). Sin embargo, si $m_i = m_g$, eso significa que cada fuerza ha contribuido con el mismo valor tanto para m_i como para m_g . Por ejemplo, la energía de ligadura entre el protón y el neutrón contribuye de forma similar a m_i y a m_g . Pero todas las teorías (excepto la gravedad) son descritas por la relatividad especial. Por lo tanto, podemos imaginar que en este marco inercial, en el cual se elimina la gravedad, la relatividad especial funciona, y por eso $m_i = m_g$.

Principio de equivalencia de Einstein

En el marco inercial definido por el principio de equivalencia débil, todas las leyes (excepto la gravedad) son descritas por la relatividad especial.

Finalmente, el **principio de equivalencia fuerte** nos dice que también la energía gravitacional debería contribuir de manera similar a m_i y a m_g . Según Einstein, el principio de equivalencia ha sido la mejor idea de su vida: localmente, gravedad y aceleración son equivalentes.



No hay gravedad en el sistema de referencia en caída libre.

El campo gravitacional es equivalente a un sistema de referencia acelerado.

2.3 Gravedad y efectos de marea

Imaginamos 2 observadores, A y B en caída libre hacia la Tierra, por lo que no sienten fuerzas gravitatorias localmente. Según el principio de equivalencia de Einstein, un observador en caída libre no detecta gravedad dentro de su vecindad cercana porque él y todo a su alrededor aceleran de manera uniforme. Ambos observadores concluyen que no hay una manifestación local de la gravedad en sus respectivas naves espaciales, definiendo así los marcos inerciales locales. Aunque A y B no perciben gravedad localmente, sus naves espaciales convergen lentamente mientras caen, debido a la inhomogeneidad del campo gravitatorio. Esta aceleración relativa refleja los efectos de marea de la gravedad, que no son observables localmente pero sí al comparar dos marcos

distintos. La posición de A , $\mathbf{r}_A(t)$, sigue:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_A}{dt^2} = \mathbf{g}(\mathbf{r}_A)$$

donde $\mathbf{g} = \nabla U$ es la aceleración gravitatoria derivada del potencial newtoniano U . Un objeto dentro de la nave de A , en una posición relativa $\boldsymbol{\xi}_A$, tiene:

$$\frac{d^2 \boldsymbol{\xi}_A}{dt^2} \simeq 0$$

Esto muestra que el campo gravitatorio es localmente uniforme. Por otro lado, la posición de B , $\mathbf{r}_B(t)$, sigue:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_B}{dt^2} = \mathbf{g}(\mathbf{r}_B)$$

Los objetos dentro de la nave de B tampoco experimentan efectos locales de gravedad. La posición relativa de A respecto a B es $\boldsymbol{\xi}_{AB} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$, cuya aceleración es:

$$\frac{d^2 \boldsymbol{\xi}_{AB}}{dt^2} = \mathbf{g}(\mathbf{r}_A) - \mathbf{g}(\mathbf{r}_B)$$

Usando una expansión de Taylor para $\mathbf{g}(\mathbf{r}_A)$ alrededor de $\mathbf{r}_B$:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}_A) \approx \mathbf{g}(\mathbf{r}_B) + \boldsymbol{\xi}_{AB}^k \partial_k \mathbf{g}$$

Esto lleva a:

$$\frac{d^2 \xi_{AB}^j}{dt^2} = (\partial_{jk} U) \xi_{AB}^k$$

donde $\partial_{jk} U$ son las derivadas segundas del potencial gravitatorio, una medida de la inhomogeneidad del campo. La inhomogeneidad del campo gravitatorio, representada por $\partial_{jk} U$, causa aceleraciones relativas entre objetos cercanos, visibles como fuerzas de marea. Aunque A y B no perciben gravedad localmente, el movimiento relativo entre ellos revela el efecto absoluto de la gravedad: su naturaleza de marea. En conclusión, el principio de equivalencia se aplica estrictamente a marcos locales, donde las inhomogeneidades gravitatorias son despreciables. En regiones más grandes, estas inhomogeneidades se vuelven notables, mostrando que la gravedad localmente parece ausente, pero globalmente es inhomogénea. La aceleración relativa entre A y B demuestra que, aunque la gravedad es localmente ausente en sus marcos inerciales, su inhomogeneidad, es decir, la gravedad de marea, es una manifestación global de la interacción gravitatoria.

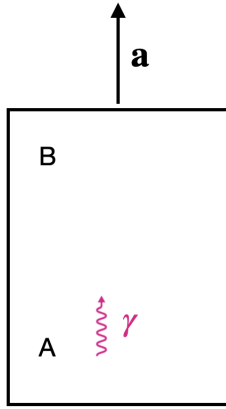
En este sistema local, como para A y B , en el cual se aplica la relatividad especial, la métrica es $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. Si utilizamos un cambio de coordenadas para regresar

al laboratorio, es decir, $x'^\mu \equiv x'^\mu(x)$, tendremos

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \underbrace{\eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}}_{\equiv g_{\alpha\beta}} dx'^\alpha dx'^\beta = g_{\alpha\beta} dx'^\alpha dx'^\beta$$

Obviamente, esta fórmula describe todavía el espacio de Minkowski en un sistema de coordenadas complicado. Sin embargo, en el caso de que el campo gravitacional no sea uniforme, tendríamos un $g_{\alpha\beta}$ diferente de una región a otra, lo que podría generar un espacio curvo. En conclusión, es posible que la métrica $g_{\mu\nu}$ describa un campo gravitacional no uniforme y no estático.

2.4 Corrimiento al rojo gravitacional



Basado en el principio de equivalencia, podemos demostrar que en un campo gravitacional, los fotones ganan o pierden energía. Para eso, consideramos un elevador acelerado. En el punto A, una transición emite un fotón de frecuencia

$$\nu_A = \frac{E_2 - E_1}{h}$$

Consideramos d como la distancia entre A y B, lo que implica que el tiempo del fotón emitido para llegar a B es $\Delta t = \frac{d}{c}$. Durante este tiempo, la velocidad del sistema de referencia aumenta:

$$\Delta v = a \Delta t = \frac{ad}{c}$$

El observador en B verá el fotón a una frecuencia diferente ν_B debido al efecto Doppler. Según este efecto,

$$\begin{aligned} \frac{\nu_B}{\nu_A} &= 1 - \frac{\Delta v}{c} \quad \left(\text{al primer orden de } \sqrt{\frac{1 - \Delta v/c}{1 + \Delta v/c}} \right) \\ &= 1 - \frac{ad}{c^2} \end{aligned}$$

Según el principio de equivalencia, deberíamos tener el mismo efecto con gravedad:

$$\frac{\nu_B}{\nu_A} = 1 - \frac{gd}{c^2}$$

Podemos interpretar este fenómeno como un fotón que pierde energía para salir del campo gravitacional de la Tierra, o simplemente decir que los relojes en A y B, que definen el tiempo y por lo tanto la frecuencia, son diferentes. Este es el corrimiento al rojo gravitacional. Para relacionarlo con la métrica, consideremos el siguiente experimento.

Consideremos una partícula en reposo en x_0 de energía mc^2 . La partícula comienza a caer hasta x . Su energía cinética es

$$\frac{1}{2}mv^2 = mU(x) - mU(x_0), \quad (2.4)$$

donde $U(x)$ es el potencial gravitacional. Por lo tanto en el límite newtoniano, $v \ll c$, tenemos $U \ll c^2$. Su energía total en x es γmc^2 lo que en la aproximación newtoniana nos da

$$E_{\text{tot}} = \gamma mc^2 \simeq mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) \quad (2.5)$$

$$= mc^2 \left(1 + \frac{U(x)}{c^2} - \frac{U(x_0)}{c^2} \right) \quad (2.6)$$

Imaginemos que la partícula se convierte en un fotón de frecuencia

$$h\nu(x) = mc^2 \left(1 + \frac{U(x)}{c^2} - \frac{U(x_0)}{c^2} \right) \quad (2.7)$$

Toda la energía de la partícula se ha convertido en el fotón. Suponemos que el fotón se mueve en dirección opuesta. Cuando llega a x_0 , tiene una energía $h\nu(x_0)$. Este fotón es convertido en una partícula en reposo de energía mc^2 . Debe ser la misma masa que inicialmente para no haber pérdida ni ganancia de energía, con respecto a la partícula inicial, en el caso contrario, tendremos un proceso que fabrica energía. Por lo tanto, tenemos

$$h\nu(x_0) = mc^2 = \frac{h\nu(x)}{1 + \frac{U(x)}{c^2} - \frac{U(x_0)}{c^2}} \quad (2.8)$$

Es decir que

$$\frac{\nu(x)}{\nu(x_0)} = 1 + \frac{U(x)}{c^2} - \frac{U(x_0)}{c^2} \quad (2.9)$$

Si consideramos $x_0 = +\infty$, entonces $U(x_0) = 0$ y

$$\frac{\nu(x)}{\nu_\infty} = 1 + \frac{U(x)}{c^2} \quad (2.10)$$

lo que es la fórmula del corrimiento al rojo gravitacional. Como hemos dicho, se puede interpretar esto como relojes diferentes en x y en el infinito. Es decir,

$$\frac{dt(x)}{dt_\infty} = \frac{1}{1 + U(x)/c^2} \simeq 1 - \frac{U(x)}{c^2} \quad (2.11)$$

La métrica al infinito es Minkowskiana porque no hay gravedad. Sin embargo, la métrica en x no puede ser Minkowskiana. Si fuera Minkowskiana, tendríamos

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.12)$$

y un observador estático (con $dx = dy = dz = 0$) mediría un tiempo propio

$$\frac{\sqrt{-ds^2}}{c} = dt_\infty, \quad (2.13)$$

aunque debería medir $dt(x)$. Por lo tanto, necesitamos una métrica de la forma

$$ds^2 = g_{00}c^2 dt_\infty^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (2.14)$$

Para un observador estático en x , el tiempo propio medido es $\sqrt{-g_{00}}dt_\infty$. Es decir que

$$\sqrt{-g_{00}} = 1 - \frac{U(x)}{c^2} \quad \Rightarrow \quad g_{00} \simeq -1 + 2\frac{U(x)}{c^2}. \quad (2.15)$$

Así que la métrica es

$$ds^2 = - \left[1 - 2\frac{U(x)}{c^2} \right] c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (2.16)$$

Es importante notar que esta métrica no representa un espacio plano. Por lo tanto, la inclusión de la gravedad curva el espacio-tiempo si queremos considerar efectos relativistas.

Es interesante ver que esta métrica nos reproduce la ley de Newton. Para eso, debemos definir el lagrangiano de una partícula libre.

Repaso

En la física de Newton, tenemos que minimizar

$$S = \int L dt \quad \text{con} \quad L = \frac{1}{2}mv^2,$$

pero esta acción no es invariante bajo transformaciones de Lorentz. En relatividad especial, se considera

$$S = -mc^2 \int d\tau,$$

con el factor mc^2 por razones dimensionales. Pero, como

$$cd\tau = \sqrt{-\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu} = \sqrt{c^2 dt^2 - d\mathbf{x}^2} = \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} cdt,$$

tenemos

$$S = -mc^2 \int \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} dt \quad \Rightarrow \quad L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}$$

Para $v \ll c$, podemos aproximar

$$L \simeq -mc^2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\mathbf{v}^2}{c^2} \right) \simeq -mc^2 + \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2$$

Es decir que recuperamos el lagrangiano de una partícula libre en la teoría de Newton.

Por lo tanto, en nuestro caso

$$S = -mc^2 \int d\tau = -mc \int \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} dt \quad (2.17)$$

De esto se deduce que

$$L = -mc \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} \quad (2.18)$$

Es decir,

$$L = -mc \sqrt{c^2 \left(1 - \frac{2U(x)}{c^2} \right) - \mathbf{v}^2} \quad (2.19)$$

Esto se puede escribir como

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{2U(x)}{c^2} - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} \Rightarrow L \simeq -mc^2 + mU(x) + \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2. \quad (2.20)$$

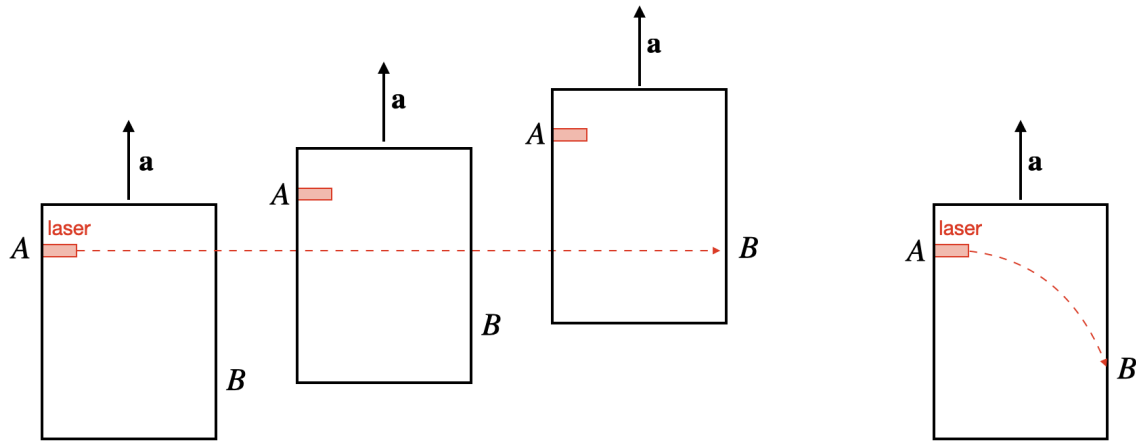
De esto podemos deducir la ley de Newton con potencial **gravitacional**

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \nabla U \quad (2.21)$$

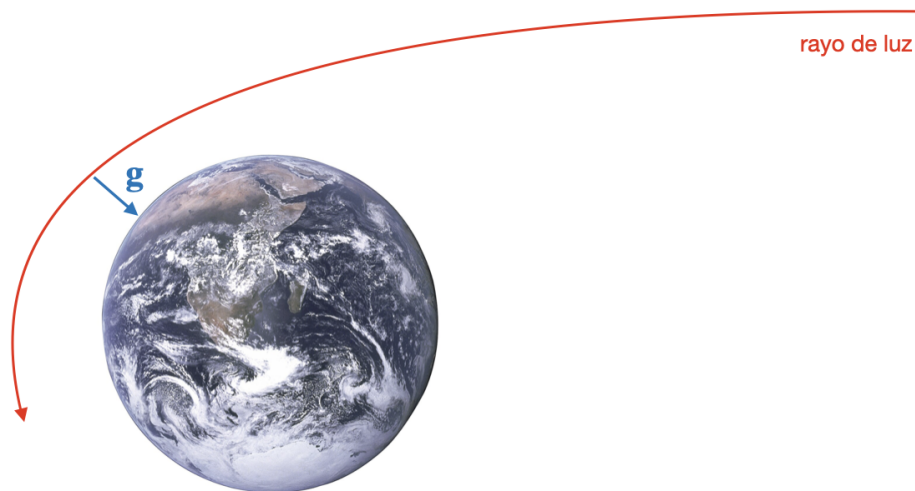
Claramente, el coeficiente de la métrica g_{00} representa el potencial gravitacional. La gravedad de Newton es una consecuencia de que el tiempo corre de forma diferente en un campo gravitacional.

2.5 Desviación de la luz

La tercera y última consecuencia del principio de equivalencia es que la luz tiene una desviación bajo un campo gravitacional.



En los 3 primeros gráficos, somos un observador externo, en un espacio sin gravedad y sin aceleración, la luz tiene una trayectoria rectilínea. Aunque para el último gráfico representando el punto de vista del observador interno, bajo aceleración, la luz se curva. Según el principio de equivalencia, los fenómenos físicos en el sistema de referencia acelerado y bajo gravedad son equivalentes. Por lo tanto, deberíamos tener la situación siguiente bajo un campo gravitacional



En conclusión de este capítulo, en la relatividad especial aún quedaba algo absoluto, el espacio-tiempo de Minkowski. Pero sabemos ahora que la métrica debería representar la gravedad y, por lo tanto, la métrica es dinámica, es decir el espacio y el tiempo son dinámicos. Nada es absoluto. Finalmente, regresamos a las ideas de Leibniz y otros, que sostenían que todo es interacción. En este contexto, bajo cualquier transformación de coordenadas, la física no debería cambiar. Por ejemplo, si realizamos una traslación de todo el universo, no solo la materia, sino también los campos como el espacio-tiempo, el universo debería ser el mismo. Eso significa que la teoría debe ser descrita por objetos que son tensores, pero tensores generalizados, no cartesianos o de Lorentz, que se transforman como tensores bajo cualquier cambio de coordenadas. Es el principio de covarianza general.

En resumen, necesitamos entender espacios curvos y cómo definir tensores en estos espacios para definir una teoría relativista de la gravedad. Ese es el tema del próximo capítulo.

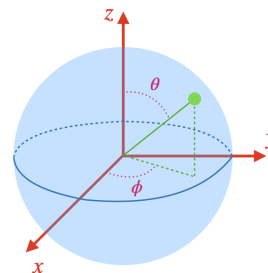
CAPÍTULO 2

Matemática del espacio curvo

3. Geometría diferencial

En un espacio plano, generalmente utilizamos coordenadas cartesianas u otras que se ajusten a las simetrías del problema. Sin embargo, en un espacio genérico, donde no existen simetrías, no hay un sistema de coordenadas preferido. Aún más complicado, puede suceder que no sea posible emplear un único sistema de coordenadas.

Si consideramos una 2-esfera, con coordenadas esféricas (θ, ϕ) , podemos ver que no son bien definidas en $\theta = 0, \pi$ ya que ϕ no está definido. Además, la coordenada ϕ es discontinua en $\phi = 0$ o $\phi = 2\pi$. Por lo tanto, vamos a necesitar varias coordenadas que cubran todo el espacio. Esta idea es la base de la noción de variedad.

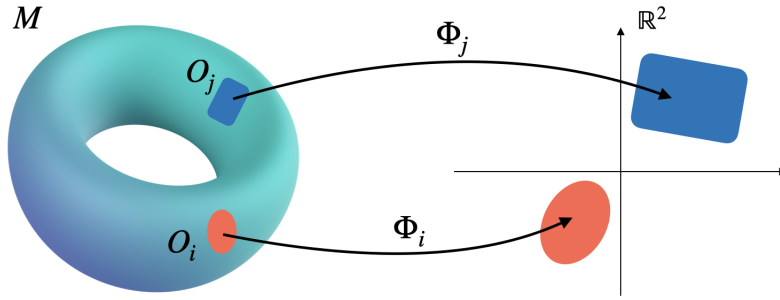


3.1 Variedad

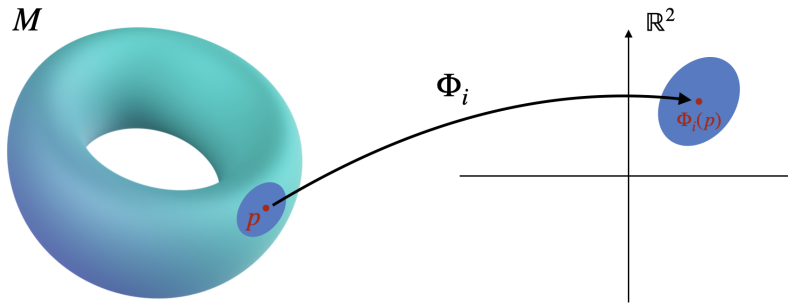
Una variedad diferenciable de dimensión n es un espacio M con una colección de subconjuntos abiertos O_i tal que

1. $\bigcup_{i=1}^n O_i = M$ (los O_i cubren M)
2. $\forall i$, existe una aplicación biyectiva $\Phi_i : O_i \mapsto U_i$ con U_i un abierto de $\mathbb{R}^n$ (es decir que M es localmente como $\mathbb{R}^n$)
3. Si $O_i \cap O_j \neq \{\emptyset\}$, $\Phi_j \circ \Phi_i^{-1} : \Phi_i(O_i \cap O_j) \longrightarrow \Phi_j(O_i \cap O_j)$ debe ser diferenciable (infinitamente)

Φ_i se llama una carta o sistema de coordenadas y el conjunto $\{\Phi_i\}$ se llama un atlas.



Estas funciones Φ_i nos permiten asociar M o sus partes a un espacio conocido. De esa manera, podemos asignar coordenadas a los puntos de la variedad.

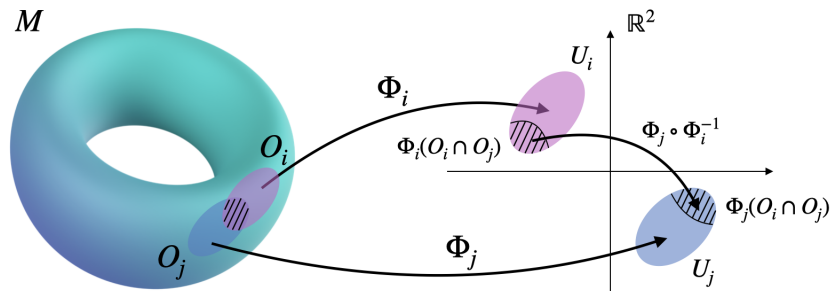


Como $\Phi_i(p)$ es un punto de $\mathbb{R}^n$ (en este caso $\mathbb{R}^2$), tenemos

$$\Phi_i(p) = (x_i^1(p), x_i^2(p), \dots, x_i^n(p))$$

es decir que $x_i^\alpha(p)$ son las coordenadas de P . Elegir otra aplicación Φ_j que contiene el punto p es elegir otro sistema de coordenadas.

Para el tercer punto de la definición de una variedad, si $\Phi_i \cap \Phi_j \neq \{\emptyset\}$, es decir, que existen puntos que pertenecen a ambas cartas, o de forma similar, que tenemos dos coordenadas para estos puntos, debemos garantizar que es posible pasar de un sistema de coordenadas a otro de forma suave



Podemos tener como ejemplos, el espacio $\mathbb{R}^n$ que es obviamente una variedad con un atlas compuesto por una sola carta

$$\Phi : (x^1, \dots, x^n) \mapsto (x^1, \dots, x^n)$$

También podemos considera el círculo S^1 . En ese caso, podríamos usar una sola carta $\phi : S^1 \mapsto [0, 2\pi[$ definido a partir del ángulo θ . Pero $[0, 2\pi[$ no es un abierto, por lo tanto debemos ocupar dos cartas

1. Excluyendo el punto $P = (1, 0)$, es decir $\Phi_1 : S^1 \setminus \{P\} \mapsto]0, 2\pi[$, con $\Phi_1(q) = \theta_1$
2. Excluyendo el punto $Q = (-1, 0)$, es decir $\Phi_2 : S^1 \setminus \{Q\} \mapsto]-\pi, \pi[$, con $\Phi_2(q) = \theta_2$

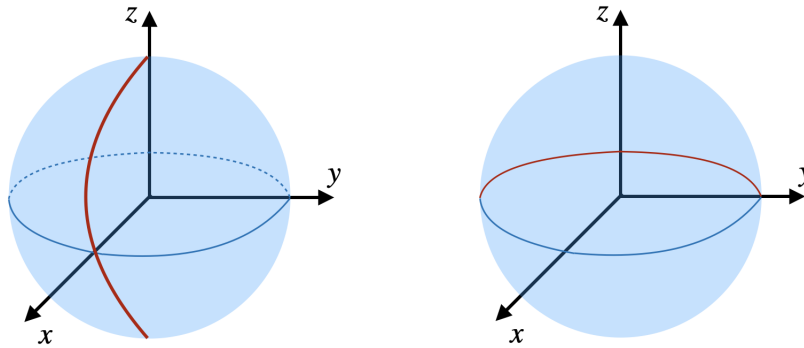
El conjunto de los dos atlas forman S^1 y tienen intersección para la parte arriba $\theta \in]0, \pi[$ y la parte abajo $]\pi, 2\pi[$.

Para la primera intersección, $\theta_2 = \Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}(\theta_1) = \theta_1$ ($\theta_1 \in]0, \pi[$)

Para el segundo caso, $\theta_2 = \Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}(\theta_1) = \theta_1 - 2\pi$ ($\theta_1 \in]\pi, 2\pi[$)

Las 2 funciones son infinitamente diferenciable ($\theta_2 = \theta_1, \theta_2 = \theta_1 - 2\pi$), lo que nos permite concluir que S^1 es una variedad diferenciable.

Para la 2-esfera, podemos hacer el mismo con 2 atlas.



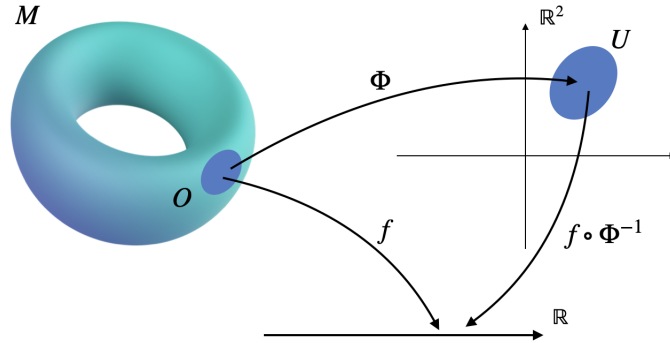
En cada caso, se elimina la linea roja

En el primer caso, con $x = \sin \theta_1 \cos \phi_1$, $y = \sin \theta_1 \sin \phi_1$ y $z = \cos \theta_1$, tenemos $\theta_1 \in]0, \pi[$ y $\phi_1 \in]0, 2\pi[$

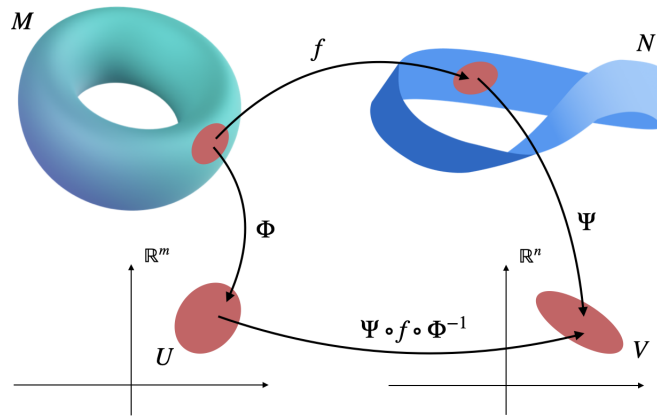
En el segundo caso, con $x = -\sin \theta_2 \cos \phi_2$, $y = \cos \theta_2$ y $z = \sin \theta_2 \sin \phi_2$, tenemos $\theta_2 \in]0, \pi[$ y $\phi_2 \in]0, 2\pi[$

Esta manera de relacionar una variedad M de dimensión n a un espacio $\mathbb{R}^n$, nos permite extender las nociones conocidas en $\mathbb{R}^n$ a la variedad.

Se dice que $f : M \mapsto \mathbb{R}$ es suave (infinitamente diferenciable) si $f \circ \Phi^{-1} : U \mapsto \mathbb{R}$ es suave para $\forall \Phi$



De forma similar $f : M \mapsto N$ es suave (M y N son variedades) si $\Psi \circ f \circ \Phi^{-1} : U \mapsto V$ es suave con $\Phi : M \mapsto U$ y $\Psi : N \mapsto V$

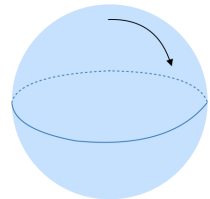


No necesariamente tenemos que $\dim M = \dim N$, pero en el caso de que $\dim M = \dim N$ y que f es un homeomorfismo suave, es decir, que su inverso existe y es suave, f es un difeomorfismo. En este caso, se dice que M y N son difeomorfos, y se denota $M \equiv N$. Esto significa que podemos deformar de forma suave M en N (y viceversa).

Ahora que sabemos definir aplicaciones de un espacio a otro, podemos introducir objetos más complejos como vectores, tensores, $\dots$

3.2 Espacio tangente

Los vectores se vean como flechas rectas que conectan 2 puntos, si este concepto geométrico es fácil imaginar en el espacio $\mathbb{R}^n$, parece difícil imaginar en un espacio curvo. De hecho, veamos que para una 2-esfera, este *vector* no parece ser una flecha muy recta.



Por lo tanto, es mejor ocupar la definición algebraica de un vector. Por ejemplo, la velocidad de una partícula $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$ aparece como una derivada, como un objeto tangente a la curva que define la trayectoria de la partícula.

En dos dimensiones, en el plano (xy) , si consideramos una curva o la trayectoria, podemos aproximar esta curva alrededor de un punto x_0 con la relación

$$y = y(x_0) + a(x - x_0), \quad \text{con } a \equiv \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$$

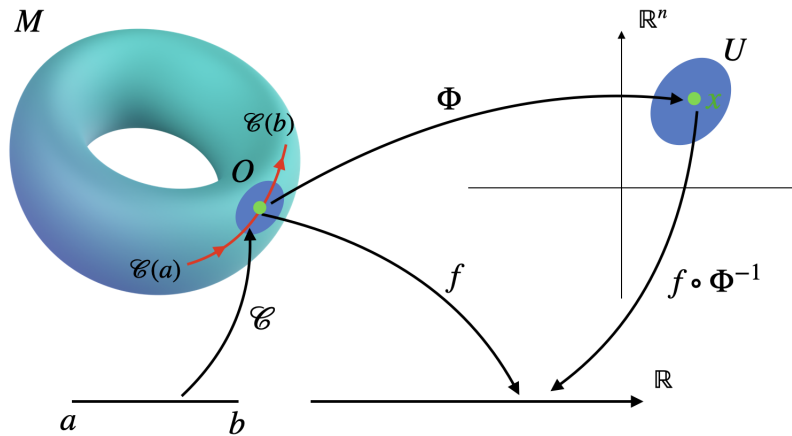
Queremos generalizar esta noción de vector tangente a una variedad. Por lo tanto, necesitamos una curva

$$\mathcal{C} :]a, b[\mapsto M$$

y una función

$$f : M \mapsto \mathbb{R}$$

para hacer cálculos.



Imaginamos que el punto verde se encuentra en $t = 0$, es decir que corresponde a $\mathcal{C}(0)$. Por lo tanto, queremos calcular $\left. \frac{df(\mathcal{C}(t))}{dt} \right|_{t=0}$. Es una cantidad perfectamente bien definida. Nos dice como " f " cambia a lo largo de esta curva. Para continuar el calculo, tenemos que definir un sistema de coordenadas, es decir una carta Φ .

Por lo tanto, tenemos

$$\left. \frac{df(\mathcal{C}(t))}{dt} \right|_{t=0} = \frac{\partial f \circ \Phi^{-1}(x)}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu(\mathcal{C}(t))}{dt} \Big|_{t=0}$$

o por abuso de notación

$$\left. \frac{df(\mathcal{C}(t))}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu(\mathcal{C}(t))}{dt} \right|_{t=0}$$

Definiendo

$$V^\mu = \left. \frac{dx^\mu}{dt} \right|_{t=0}$$

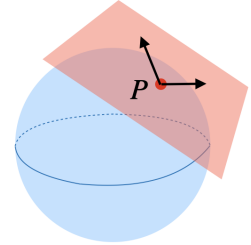
tenemos que el vector tangente es (ocuparemos siempre la notación de Einstein)

$$V^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu}$$

Veamos que independientemente de la variedad M o de la función f la derivada direccional $V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ tiene un significado intrínseco.

Para una nueva curva, pasando por el mismo punto, V^μ sera diferente porque $V^\mu = \left. \frac{dx^\mu(\mathcal{C}(t))}{dt} \right|_{t=0}$ es decir que depende de $\mathcal{C}$ pero $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ queda lo mismo

Lo que nos permite concluir, que todos los vectores en un mismo punto forman un espacio vectorial llamado el espacio tangente a ese punto. Es el espacio tangente de M en p , $T_p M$. Una base de este espacio esta definido por $\{\partial_\mu\}$. Por lo tanto, tenemos que $\dim(M) = \dim(T_p M)$



Obviamente podemos siempre cambiar de base, es decir de aplicación Φ . En ese caso, tenemos

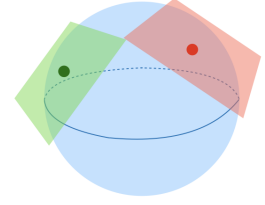
$$\begin{aligned} \left. \frac{df(\mathcal{C}(t))}{dt} \right|_{t=0} &= \left. \frac{\partial f \circ \Phi'^{-1}(x)}{\partial x'^\nu} \frac{dx'^\nu(\mathcal{C}(t))}{dt} \right|_{t=0} \equiv \left. \frac{\partial f}{\partial x'^\nu} \frac{dx'^\nu(\mathcal{C}(t))}{dt} \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{\partial f}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu(\mathcal{C}(t))}{dt} \right|_{t=0} \end{aligned}$$

Lo que implica la relación entre las dos bases

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu}$$

Por ejemplo en mecánica clásica, si consideramos un lagrangiano $L(q^i, \dot{q}^i)$ tenemos la derivada $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i}$, es decir que el espacio de velocidades es el espacio tangente al espacio de configuración. Si a este espacio de configuración (la variedad) tenemos las coordenadas q^i , entonces el espacio tangente tiene como base, $\{\partial_{q^i}\}$, y $\dot{q}^i$ son las coordenadas.

Obviamente en cada punto de la variedad, tenemos un espacio tangente diferente. El conjunto de todos estos espacios tangente se llama el fibrado tangente



$$TM \equiv \bigcup_P T_P M$$

Este espacio se define por el punto elegido de la variedad y del espacio tangente, lo que implica que tiene una dimensión de $2n$.

Como los espacios tangente en diferentes puntos son diferentes, no tiene ningún sentido sumar dos vectores tangente que pertenecen a espacios diferentes. Se debe agregar una estructura adicional para definir estas operaciones.

Por el momento, hemos definido un vector tangente en un punto. Podemos definir un campo vectorial, es decir un vector tangente en cada punto, que escribimos en una base como

$$X = X^\mu \partial_\mu$$

Si consideramos dos campos vectoriales, el producto no es un campo vectorial porque aparecen derivadas de orden 2. De hecho, considerando el cálculo en una cierta base $\{\partial_\mu\}$, tenemos

$$XY = X^\mu \partial_\mu (Y^\nu \partial_\nu) = X^\mu (\partial_\mu Y^\nu) \partial_\nu + X^\mu Y^\nu \partial_{\mu\nu}$$

pero

$$YX = Y^\mu \partial_\mu (X^\nu \partial_\nu) = Y^\mu (\partial_\mu X^\nu) \partial_\nu + Y^\mu X^\nu \partial_{\mu\nu}$$

Podemos deducir que

$$XY - YX = (X^\mu \partial_\mu Y^\nu - Y^\mu \partial_\mu X^\nu) \partial_\nu$$

es un campo vectorial. Se llama el corchete de Lie $[X, Y]$.

3.3 Espacio cotangente

Como $T_P M$ es un espacio vectorial, podemos definir su espacio dual en el punto P que se denota $T_P^* M$ y se llama el espacio cotangente. Consideramos una función de $T_P^* M$

$$(df)_p : T_P M \mapsto \mathbb{R}$$

es decir que actúa sobre un vector tangente para obtener un real. Definimos

$$(df)_p(V) \equiv V(f)(p) \quad \text{con } V \in T_P M$$

Según esta definición

$$dx^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\mu$$

lo que implica que $\{dx^\mu\}$ define una base del espacio cotangente T_p^*M .

Para verificar la consistencia, vemos que

$$df(V) = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu (V^\nu \partial_\nu) = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} V^\nu \underbrace{dx^\mu \partial_\nu}_{\delta_\nu^\mu} = V^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} = V(f)$$

Los elementos del espacio T_p^*M se llaman covectores o 1-forma

3.4 Tensores

Finalmente, podemos definir tensores de rango $r + s$, o de tipo (r, s) como aplicaciones del producto tensorial

$$T : \underbrace{T_p^*M \otimes T_p^*M \otimes \dots \otimes T_p^*M}_r \otimes \underbrace{T_pM \otimes \dots \otimes T_pM}_s \mapsto \mathbb{R}$$

Considerando una base, se definen las componentes del tensor

$$T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} = T(dx^{\mu_1}, \dots, dx^{\mu_r}, \partial_{\nu_1}, \dots, \partial_{\nu_s})$$

Es decir que

$$T = T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} \partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_r} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_s}$$

Por ejemplo, un tensor de tipo $(0, 1)$ es una aplicación $T_pM \mapsto \mathbb{R}$, es decir un covector aunque un tensor de tipo $(1, 0)$ es una aplicación $T_p^*M \mapsto \mathbb{R}$, es decir un vector.

4. Geometría riemanniana y lorentziana

4.1 Métrica

Una vez definida la noción de variedad, podemos definir una distancia, es decir, una métrica. Como en el caso euclídeo, podemos definir la métrica a partir del producto escalar entre dos vectores. Considerando una variedad M , una métrica riemanniana es un tensor de tipo $(0, 2)$ definido en cada punto $p \in M$, tal que es

- Bilineal: $\forall u, v, w \in T_p M$ y $a, b \in \mathbb{R}$, $g_p(au + bv, w) = ag_p(u, w) + bg_p(v, w)$,
- Simétrico: $\forall u, v \in T_p M$, $g_p(u, v) = g_p(v, u)$,
- Positivo: $\forall u \in T_p M$, $u \neq 0$, $g_p(u, u) > 0$

Por otro lado la métrica es pseudo-riemanniana si es

- Bilineal: $\forall u, v, w \in T_p M$ y $a, b \in \mathbb{R}$, $g_p(au + bv, w) = ag_p(u, w) + bg_p(v, w)$,
- Simétrica: $\forall u, v \in T_p M$, $g_p(u, v) = g_p(v, u)$,
- No degenerada: Si $g_p(u, v) = 0$, $\forall u \in T_p M$ entonces $v = 0$

Considerando un sistema de coordenadas $\{x^\mu\}$, tenemos

$$g_p = g_{\mu\nu}(p) dx^\mu \otimes dx^\nu \quad \text{con} \quad g_{\mu\nu}(p) = g_p(\partial_\mu, \partial_\nu) = g_{\mu\nu}(p). \quad (4.1)$$

Muchas veces g_p se escribe como $g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, y $g_{\mu\nu}$ se llama por extensión la métrica (aunque g es la métrica y $g_{\mu\nu}$ sus componentes).

Podemos siempre definir una base en la cual $g_{\mu\nu}$ sea una matriz diagonal, con un cierto signo de los elementos diagonales. Estos signos se llaman la signatura de la métrica. Una métrica pseudo-riemanniana tiene signatura (p, q) , donde p son los signos $-$ y q los signos $+$. En el caso particular de una métrica pseudo-riemanniana $(1, 3)$, se llama lorentziana. El caso más conocido es el espacio de Minkowski.

La métrica nos define un isomorfismo entre vectores y covectores, es decir, "bajar" o "subir" los índices. De hecho, consideramos $g_p(u, \cdot)$. Esta aplicación actúa sobre un vector y da un número real

$$\begin{aligned} g_p(u, \cdot) : T_p M &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ v &\longmapsto g_p(u, v) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Por lo tanto, podemos ver $g_p(u, \cdot)$ como un covector. En una base $\{x^\mu\}$, podemos escribir

$$g_{\mu\nu} u^\mu = w_\nu \quad (4.3)$$

es decir, la aplicación sobre un vector v^μ es un covector w_ν . Como $g_{\mu\nu}$ es invertible, escribimos $g^{\mu\nu}$ el inverso, es decir, $g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu$. Por lo tanto, podemos escribir la relación (4.3) de la forma siguiente

$$u^\mu = g^{\mu\nu}\omega_\nu \quad (4.4)$$

En conclusión, g_p es una aplicación entre T_pM y T_p^*M , asociando a un vector un covector y viceversa. Usualmente usamos la misma letra para el espacio tangente y cotangente, es decir:

$$u^\mu = g^{\mu\nu}u_\nu \quad \text{y} \quad u_\mu = g_{\mu\nu}u^\nu.$$

4.2 Elemento de volumen

La métrica es un tensor de rango 2 ya que ds^2 es invariante

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} dx'^\alpha dx'^\beta \quad (4.5)$$

$$= g'_{\alpha\beta} dx'^\alpha dx'^\beta. \quad (4.6)$$

Es decir, que bajo la transformación generalizada $x^\mu \mapsto x'^\mu$, tenemos:

$$g'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} g_{\mu\nu}, \quad (\text{tensor de rango 2})$$

Este resultado implica que

$$\det(g') = \det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)^2 \det(g) \quad (4.7)$$

Por lo tanto,

$$\sqrt{|\det g|} d^4x \quad (4.8)$$

es un invariante, porque bajo $x \mapsto x'$:

$$d^4x \mapsto d^4x' = \det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) d^4x \quad (\text{el jacobiano})$$

lo que implica

$$\begin{aligned} \sqrt{|\det g|} d^4x &\mapsto \sqrt{|\det g'|} d^4x' \\ &= \left(\det \frac{\partial x}{\partial x'}\right) \left(\det \frac{\partial x'}{\partial x}\right) \sqrt{|\det g|} d^4x \\ &= \sqrt{|\det g|} d^4x \end{aligned}$$

Por ejemplo, en $3D$, en coordenadas cartesianas,

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

es decir que tenemos $\det g = 1$ y por lo tanto

$$\sqrt{|\det g|} d^3x = dx dy dz \quad (4.10)$$

En coordenadas esféricas, $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$ o

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

es decir que tenemos $\det g = r^4 \sin^2 \theta$ lo que nos permite obtener

$$\sqrt{|\det g|} d^3x = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \quad (4.12)$$

Es conclusión,

$$\sqrt{|\det g|} d^4x$$

define el volumen infinitesimal invariante que aparecerá en las integrales.

4.3 Conexión

En relatividad especial, la derivada de un vector es un tensor. Es decir, si V^μ es un vector de Lorentz, entonces $\partial_\alpha V^\mu$ es un tensor de rango 2. De hecho, si consideramos la transformación de Lorentz $x^\mu \mapsto x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$, tenemos $V^\mu \mapsto V'^\mu = \Lambda^\mu_\nu V^\nu$, entonces

$$\partial_\nu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\nu} \mapsto \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \equiv \Lambda^\alpha_\nu \partial_\alpha \quad (4.13)$$

lo que implica

$$\partial_\alpha V^\beta \longrightarrow \frac{\partial V'^\beta}{\partial x'^\alpha} = \Lambda^\sigma_\alpha \frac{\partial (\Lambda^\beta_\gamma V^\gamma)}{\partial x^\sigma} = \Lambda^\sigma_\alpha \Lambda^\beta_\gamma \partial_\sigma V^\gamma \quad (4.14)$$

es decir la transformación de un tensor de Lorentz de rango 2.

El problema es que, si consideramos una transformación generalizada,

$$x^\mu \mapsto x'^\mu \quad (4.15)$$

entonces $\partial_\alpha V^\beta$ no es un tensor. De hecho,

$$\partial'_\alpha V'^\beta \equiv \frac{\partial V'^\beta}{\partial x'^\alpha} = \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial V'^\beta}{\partial x^\gamma} = \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \left[\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\sigma} V^\sigma \right] \quad (4.16)$$

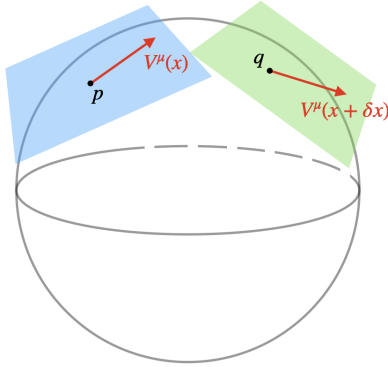
Esto resulta en

$$\frac{\partial V'^\beta}{\partial x'^\alpha} = \underbrace{\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\sigma} \frac{\partial V^\sigma}{\partial x^\gamma}}_{\text{misma forma de transformación que un tensor}} + V^\sigma \underbrace{\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial^2 x'^\beta}{\partial x^\gamma \partial x^\sigma}}_{\neq 0 \text{ en general}} \quad (4.17)$$

Esto muestra que $\partial_\alpha V^\beta$ no se transforma como un tensor debido al término $\frac{\partial^2 x'^\beta}{\partial x^\gamma \partial x^\sigma}$. En el caso de transformaciones lineales (como las de Lorentz), $\frac{\partial^2 x'^\beta}{\partial x^\gamma \partial x^\sigma} = 0$, y entonces $\partial_\alpha V^\beta$ sí es un tensor.

Una razón más profunda de este problema es que la derivada ordinaria está mal definida. En su lugar, deberíamos tener algo de la forma

$$\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{V^\mu(x + \delta x) - v^\mu(x)}{\delta x^\nu} \quad (4.18)$$



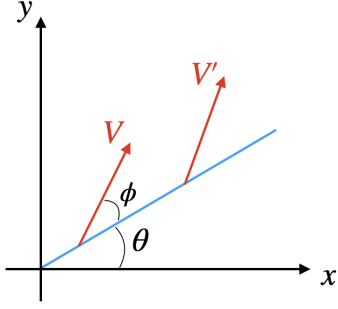
infinitesimal. Es decir

$$\delta V_\mu \propto V_\nu \delta x^\alpha \quad (4.19)$$

Esto describe el cambio del vector durante este desplazamiento. Definimos entonces

$$\delta V_\mu = \Gamma_{\mu\alpha}^\nu V_\nu \delta x^\alpha \quad (4.20)$$

Aquí, $\Gamma_{\mu\alpha}^\nu$ no es un tensor, sino que nos dice únicamente cuánto cambia un vector durante un desplazamiento. A $\Gamma_{\mu\alpha}^\nu$ se le llama una conexión y describe el proceso de transporte.



Consideramos como ejemplo un vector en el espacio en 2 dimensiones, desplazado a lo largo de la línea azul. Usaremos las coordenadas polares. Llamamos V a la norma del vector. En la base polar, tenemos

$$V = V^r \mathbf{e}_r + V^\theta \mathbf{e}_\theta,$$

con $V^r = V \cos \phi$ y $V^\theta = V \sin \phi / r$. De hecho, la normalización es

$$V^2 \equiv g_{ij} V^i V^j = (V^r)^2 + r^2 (V^\theta)^2 = V^2 \cos^2 \phi + r^2 V^2 \frac{\sin^2 \phi}{r^2} = V^2 \quad (4.21)$$

En el punto $(r + \delta r, \theta)$, la base no cambia, aunque el vector es

$$\mathbf{V}' = V \cos \phi \mathbf{e}_r + V \frac{\sin \phi}{r + \delta r} \mathbf{e}_\theta \quad (4.22)$$

$$\simeq V \cos \phi \mathbf{e}_r + V \frac{\sin \phi}{r} \left(1 - \frac{\delta r}{r}\right) \mathbf{e}_\theta = \mathbf{V} - V \sin \phi \frac{\delta r}{r^2} \mathbf{e}_\theta \quad (4.23)$$

$$= \mathbf{V} - V^\theta \frac{\delta r}{r} \mathbf{e}_\theta \quad (4.24)$$

Lo que nos permite deducir

$$\delta V^\theta = -\frac{1}{r} \delta r V^\theta, \quad \delta V^r = 0$$

Para deducir la conexión, debemos obtener, según (4.20), la transformación del covector y no del vector. Para deducir δV_θ y δV_r , usamos la normalización. Como lo hemos definido, la norma no cambia durante el transporte paralelo, lo que implica $\delta(V_\mu V^\mu) = 0$, es decir

$$\begin{aligned} V^\mu \delta V_\mu &= -V_\mu \delta V^\mu = V_\theta V^\theta \frac{\delta r}{r}, \\ &= V^r \delta V_r + V^\theta \delta V_\theta \end{aligned}$$

Esto implica

$$\delta V_r = 0, \quad \delta V_\theta = V_\theta \frac{\delta r}{r}$$

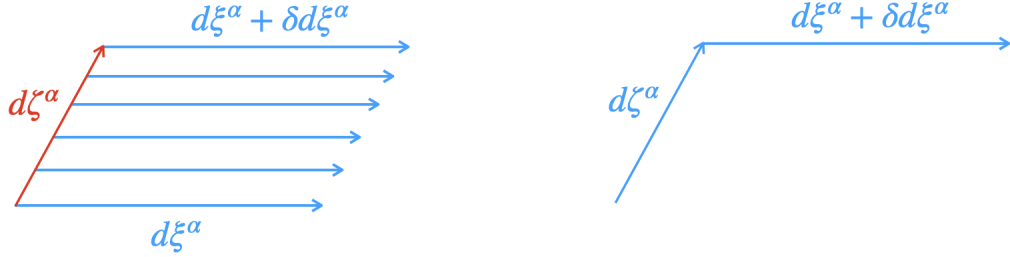
Por lo tanto, las conexiones son

$$\Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\theta \theta}^\theta = 0, \quad \Gamma_{rr}^r = 0, \quad \Gamma_{r\theta}^r = 0 \quad (4.25)$$

4.4 Torsión

Hemos asumido que los dos índices inferiores de la conexión son simétricos, es decir, $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \Gamma_{\nu\mu}^\sigma$ (por ejemplo, $\Gamma_{\theta r}^\theta = \Gamma_{r\theta}^\theta$). ¿Cuál es la consecuencia de esta simetría?

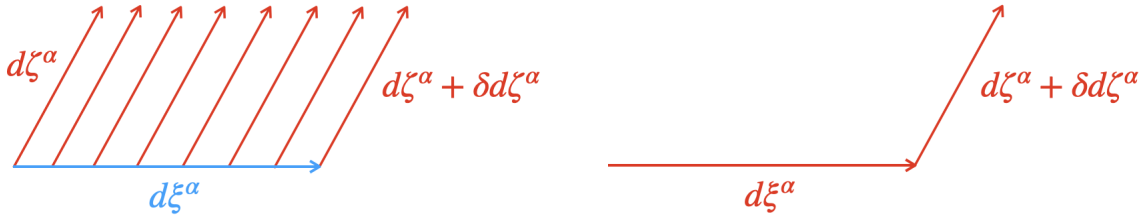
Consideremos dos vectores infinitesimales $d\zeta^\alpha$ y $d\xi^\alpha$, y estudiemos el transporte paralelo de uno respecto al otro.



con $\delta d\xi^\alpha = -\Gamma_{\mu\nu}^\alpha d\xi^\mu d\zeta^\nu$ y por lo tanto el vector azul es

$$d\xi^\alpha + d\zeta^\alpha - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha d\xi^\mu d\zeta^\nu \quad (4.26)$$

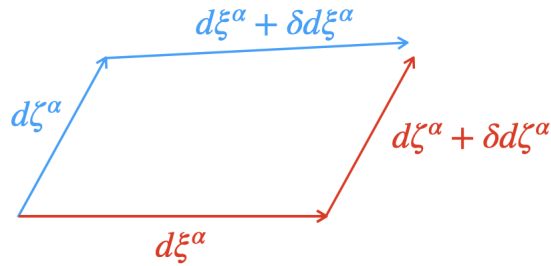
Ahora hacemos el transporte de $d\zeta^\alpha$ a lo largo de $d\xi^\alpha$



El vector rojo resulta ser

$$d\xi^\alpha + d\zeta^\alpha - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha d\zeta^\mu d\xi^\nu = d\xi^\alpha + d\zeta^\alpha - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha d\xi^\mu d\zeta^\nu. \quad (4.27)$$

Estos dos vectores (el azul y el rojo) son iguales, lo que implica que el paralelogramo se cierra si y solo si $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\nu\mu}^\alpha$. Si el paralelogramo no se cierra ($\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \neq \Gamma_{\nu\mu}^\alpha$), decimos que el espacio tiene torsión



Existe una teoría de la gravedad que considera espacios con torsión, llamada la teoría de Einstein-Cartan. Sin embargo, esta no es la relatividad general. En relatividad general, se consideran espacios sin torsión, lo que implica que la conexión es simétrica

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma}. \quad (4.28)$$

4.5 Derivada covariante

Ahora podemos definir la derivada covariante. Para calcular esta derivada, que mide la diferencia entre un objeto evaluado en dos puntos distintos, es necesario utilizar el concepto de transporte paralelo

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{A_{\mu}(x + \delta x) - [A_{\mu}(x) + \delta A_{\mu}]}{\delta x^{\nu}} \quad \text{hemos realizado el transporte} \\ & \quad \text{paralelo de } A_{\mu} \text{ hasta } x + \delta x \\ &= \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{A_{\mu}(x + \delta x) - A_{\mu}(x)}{\delta x^{\nu}} - \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta A_{\mu}}{\delta x^{\nu}} \\ &= \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{A_{\mu}(x + \delta x) - A_{\mu}(x)}{\delta x^{\nu}} - \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} V_{\alpha} \delta x^{\beta}}{\delta x^{\nu}} \\ &= \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} V_{\alpha} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \\ &= \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} V_{\alpha} \delta_{\nu}^{\beta} \\ &= \partial_{\nu} A_{\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} V_{\alpha}. \end{aligned}$$

Usualmente, esta operación se denota como ∇ , de manera que

$$\nabla_{\mu} A_{\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} V_{\alpha}$$

Para obtener la derivada covariante de A^{μ} (vector contravariante) ocupamos el resultado que un escalar no cambia durante un transporte (porque no tiene dirección), es decir que si ϕ es un escalar

$$\nabla_{\mu} \phi = \partial_{\mu} \phi \quad (4.29)$$

Como sabemos que $A_{\nu} B^{\nu}$ es un escalar, tenemos

$$\nabla_{\mu} (A_{\nu} B^{\nu}) = \partial_{\mu} (A_{\nu} B^{\nu}) = (\partial_{\mu} A_{\nu}) B^{\nu} + A_{\nu} (\partial_{\mu} B^{\nu}) \quad (4.30)$$

$$= (\nabla_{\mu} A_{\nu}) B^{\nu} + A_{\nu} \nabla_{\mu} B^{\nu} \quad (4.31)$$

$$= (\partial_{\mu} A_{\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} A_{\sigma}) B^{\nu} + A_{\nu} \nabla_{\mu} B^{\nu} \quad (4.32)$$

es decir

$$A_\nu \nabla_\mu B^\nu = A_\nu \partial_\mu B^\nu + A_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\sigma B^\nu \quad (4.33)$$

$$= A_\nu \partial_\mu B^\nu + A_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\nu B^\sigma \quad (4.34)$$

lo que podemos escribir

$$A_\nu \left(\nabla_\mu B^\nu - \partial_\mu B^\nu - \Gamma_{\mu\sigma}^\nu B^\sigma \right) = 0 \quad (4.35)$$

Pero dado que esta identidad se cumple para cualquier A_ν , concluimos que

$$\nabla_\mu B^\nu - \partial_\mu B^\nu - \Gamma_{\mu\sigma}^\nu B^\sigma = 0 \quad (4.36)$$

es decir

$$\nabla_\mu B^\nu = \partial_\mu B^\nu + \Gamma_{\mu\sigma}^\nu B^\sigma$$

De la misma manera, podemos deducir $\nabla_\mu C^{\mu\nu}$ usando que $A_\mu B_\nu C^{\mu\nu}$ es un escalar. De forma genérica, tenemos

$$\begin{aligned} \nabla_\mu T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_r} &= \partial_\mu T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_r} + \Gamma_{\mu\sigma_1}^{\alpha_1} T^{\sigma_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_r} \\ &+ \Gamma_{\mu\sigma_2}^{\alpha_2} T^{\alpha_1 \sigma_2 \alpha_3 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_r} - \Gamma_{\mu\beta_1}^{\sigma_1} T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\sigma_1 \beta_2 \dots \beta_r} - \Gamma_{\mu\beta_2}^{\sigma_2} T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \sigma_2 \beta_3 \dots \beta_r} + \dots \end{aligned} \quad (4.37)$$

Nota que la conexión no es un tensor. Se puede hacer un cambio de coordenadas y ver como se transforma o de forma más simple, observamos que

$\nabla_\mu A_\nu$ es un tensor

$\partial_\mu A_\nu$ no es un tensor

y por lo tanto $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma A_\sigma = \nabla_\mu A_\nu - \partial_\mu A_\nu$ no es un tensor.

Existen varios tipos de conexiones, es decir, distintas maneras de transportar un objeto de un punto a otro. Sin embargo, hay una conexión especialmente natural, que no requiere introducir estructuras adicionales en el universo, salvo la propia métrica $g_{\mu\nu}$. Esta conexión se denomina conexión de Christoffel o símbolos de Christoffel, y se define exclusivamente en términos de la métrica. Para establecerla, se impone una condición adicional conocida como condición de metricidad

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0 \quad (4.38)$$

Esta condición expresa que la norma de un vector permanece constante bajo transporte paralelo.

Según la ecuación $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$, tenemos

$$\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma g_{\sigma\nu} - \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma g_{\mu\sigma} = 0 \quad (4.39)$$

Pero tenemos también que $\nabla_\mu g_{\nu\alpha} = 0$ es decir

$$\partial_\mu g_{\nu\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma g_{\sigma\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^\sigma g_{\nu\sigma} = 0 \quad (4.40)$$

y finalmente $\nabla_\nu g_{\alpha\mu} = 0$ lo que implica

$$\partial_\nu g_{\alpha\mu} - \Gamma_{\nu\alpha}^\sigma g_{\sigma\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\sigma g_{\alpha\sigma} = 0 \quad (4.41)$$

Considerando la expresión (4.40)+(4.41)-(4.39), tenemos

$$\partial_\nu g_{\alpha\mu} - \Gamma_{\nu\alpha}^\sigma g_{\sigma\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\sigma g_{\alpha\sigma} + \partial_\mu g_{\nu\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma g_{\sigma\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^\sigma g_{\nu\sigma} - \partial_\alpha g_{\mu\nu} + \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma g_{\sigma\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma g_{\mu\sigma} = 0$$

lo que se simplifica en

$$\partial_\nu g_{\alpha\mu} + \partial_\mu g_{\nu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu} = 2\Gamma_{\mu\nu}^\sigma g_{\sigma\alpha} \quad (4.42)$$

es decir

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2}g^{\sigma\alpha} (\partial_\mu g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu})$$

Esta conexión, compatible con la métrica, se llama la conexión de Levi-Civita. Verifiquemos este resultado en coordenadas polares (2D), donde la métrica es

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 \quad (4.43)$$

De aquí se obtienen las componentes:

$$g_{rr} = 1, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g^{rr} = 1, \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2} \quad (4.44)$$

La conexión (símbolos de Christoffel) está dada por

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{2}g^{\theta\sigma} (\partial_r g_{\theta\sigma} + \partial_\theta g_{r\sigma} - \partial_\sigma g_{r\theta}), \quad (4.45)$$

con suma implícita sobre el índice $\sigma = \{r, \theta\}$. Evaluando explícitamente obtenemos:

$$\begin{aligned} \Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{1}{2}g^{\theta\theta} (\partial_r g_{\theta\theta} + \partial_\theta g_{r\theta} - \partial_\theta g_{r\theta}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2) = \frac{1}{r} \end{aligned} \quad (4.46)$$

lo que corresponde al resultado (4.25). De forma similar, se pueden calcular las otras componentes.

4.6 Transporte paralelo

Queremos poder transportar gráficamente un vector. La idea del transporte paralelo es que el vector no cambia en la dirección del transporte. Si realizamos un transporte paralelo en la dirección x , significa que

$$\partial_x \vec{V} = \vec{0}, \quad \text{o} \quad (\vec{e}_x \cdot \vec{\partial}) \vec{V} = \vec{0}. \quad (4.47)$$

De forma similar, el transporte paralelo del vector $\vec{V}$ a lo largo del eje y es

$$(\vec{e}_y \cdot \vec{\partial}) \vec{V} = \vec{0} \quad (4.48)$$

En general, el transporte paralelo de un vector $\vec{V}$ en una dirección $\vec{W}$ se expresa como $(\vec{W} \cdot \vec{\partial}) \vec{V} = \vec{0}$, es decir

$$(W^\mu \partial_\mu) V^\sigma = 0 \quad (4.49)$$

En un espacio curvo, la derivada covariante reemplaza a la derivada usual

$$W^\mu \nabla_\mu V^\sigma = W^\mu (\partial_\mu V^\sigma + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma V^\nu) = 0. \quad (4.50)$$

Si ahora transportamos un vector a lo largo de una curva $x^\mu(\tau)$, donde τ es un parámetro a lo largo de la curva, con vector tangente $W^\mu = dx^\mu/d\tau$, obtenemos

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} (\partial_\mu V^\sigma + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma V^\nu) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dV^\sigma}{d\tau} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{dx^\mu}{d\tau} V^\nu = 0. \quad (4.51)$$

ya que

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} \partial_\mu V^\sigma = \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{\partial V^\sigma}{\partial x^\mu} = \frac{dV^\sigma}{d\tau} \quad (4.52)$$

Si conocemos $V^\sigma(\tau = 0)$, podremos deducir de la ec.(4.51) como se mueve V^τ a lo largo de $x^\mu(\tau)$.

Consideremos un ejemplo en 2D con coordenadas polares, cuya métrica es

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2, \quad (4.53)$$

con símbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -r, \quad \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}. \quad (4.54)$$

Si transportamos un vector a lo largo de un círculo de radio unidad ($r = 1$), tenemos $x^r = 1$ y $x^\theta = \tau$. Por lo tanto, las ecuaciones se simplifican en

$$\frac{dV^r}{d\tau} - V^\theta = 0, \quad \frac{dV^\theta}{d\tau} + V^r = 0. \quad (4.55)$$

De aquí obtenemos la ecuación diferencial para V^r

$$\frac{d^2 V^r}{d\tau^2} + V^r = 0 \quad (4.56)$$

lo que nos da

$$V^r(\tau) = \alpha \cos \tau + \beta \sin \tau, \quad (4.57)$$

$$V^\theta(\tau) = -\alpha \sin \tau + \beta \cos \tau. \quad (4.58)$$

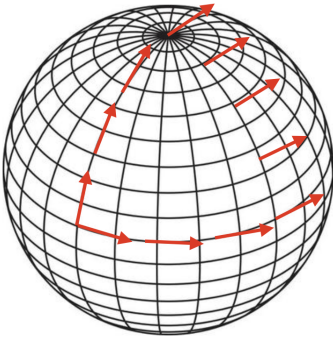
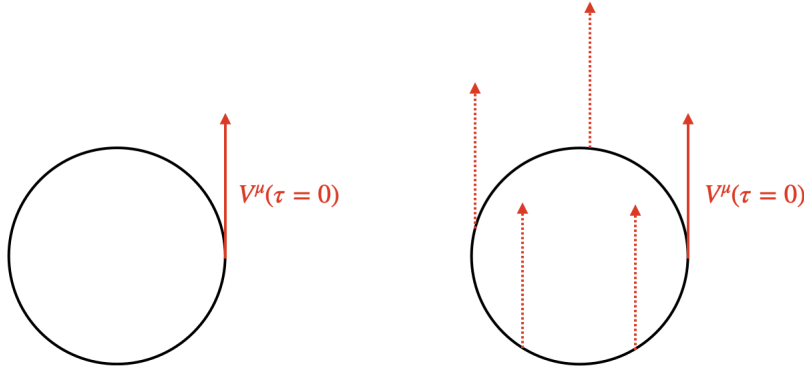
Si iniciamos en $\tau = 0$ con $V^r(0) = 0$ y $V^\theta(0) = 1$, entonces

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1 \quad (4.59)$$

es decir

$$V^r(\tau) = \sin \tau, \quad V^\theta(\tau) = \cos \tau \quad (4.60)$$

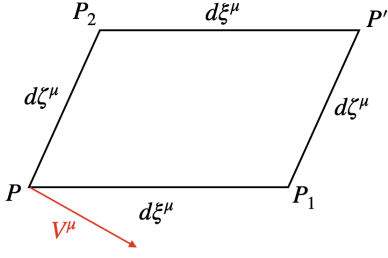
Luego de una rotación completa ($\tau = 2\pi$), el vector retorna exactamente a su orientación original.



Sin embargo, en espacios curvos, transportar un vector a lo largo de un camino cerrado resulta en un vector con diferente orientación final, revelando la presencia de curvatura. Por ejemplo, transportar un vector sobre la superficie de una esfera (como seguir un meridiano, el ecuador y regresar al polo) produce un cambio en su dirección inicial. No obstante, la norma del vector se mantiene constante gracias a la condición de metricidad.

4.7 Curvatura

Por lo tanto, vamos a considerar un camino cerrado y transportar un vector a lo largo de este camino. La variación de dicho vector se denomina tensor de Riemann, es decir, la curvatura.



Consideremos un camino cerrado con forma de paralelogramo.

En vez de desplazar V^μ de $P \rightarrow P_1 \rightarrow P' \rightarrow P_2 \rightarrow P$, desplazamos el vector por dos caminos distintos: de $P \rightarrow P_1 \rightarrow P'$ y de $P \rightarrow P_2 \rightarrow P'$, y luego tomamos la diferencia.

En el punto P , tenemos el vector $V^\mu(P)$. El desplazamiento hasta P_1 da el vector

$$V^\mu - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(P) V^\alpha d\xi^\beta \quad (4.61)$$

Luego, al movernos de P_1 a P' obtenemos:

$$V^\mu - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(P) V^\alpha d\xi^\beta - \Gamma_{\gamma\delta}^\mu(P_1) [V^\gamma - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma(P) V^\alpha d\xi^\beta] d\zeta^\delta. \quad (4.62)$$

Expandiendo alrededor de P , $\Gamma_{\gamma\delta}^\mu(P_1) = \Gamma_{\gamma\delta}^\mu(P) + \partial_\sigma \Gamma_{\gamma\delta}^\mu(P) d\xi^\sigma$, queda aproximadamente:

$$V^\mu - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu V^\alpha d\xi^\beta - \Gamma_{\gamma\delta}^\mu V^\gamma d\zeta^\delta + \Gamma_{\gamma\delta}^\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma V^\alpha d\xi^\beta d\zeta^\delta - \partial_\sigma \Gamma_{\gamma\delta}^\mu V^\gamma d\xi^\sigma d\zeta^\delta. \quad (4.63)$$

Haciendo el mismo cálculo para el camino $P \rightarrow P_2 \rightarrow P'$, tenemos:

$$V^\mu - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu V^\alpha d\zeta^\beta - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu V^\alpha d\xi^\beta + \Gamma_{\gamma\delta}^\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma V^\alpha d\xi^\delta d\zeta^\beta - \partial_\sigma \Gamma_{\gamma\delta}^\mu V^\gamma d\zeta^\sigma d\xi^\delta. \quad (4.64)$$

Considerando la diferencia, obtenemos:

$$\Delta V^\mu = (\partial_\sigma \Gamma_{\gamma\delta}^\mu - \partial_\delta \Gamma_{\gamma\sigma}^\mu + \Gamma_{\alpha\sigma}^\mu \Gamma_{\gamma\delta}^\alpha - \Gamma_{\alpha\delta}^\mu \Gamma_{\gamma\sigma}^\alpha) V^\gamma d\xi^\delta d\zeta^\sigma \quad (4.65)$$

$$\equiv R_{\gamma\delta\sigma}{}^\mu V^\gamma d\xi^\delta d\zeta^\sigma. \quad (4.66)$$

Si $R_{\gamma\delta\sigma}{}^\mu = 0$, el espacio es plano y $\Delta V^\mu = 0$, es decir que el vector regresa al mismo punto con la misma orientación.

En conclusión el tensor de curvatura conocido como el tensor de Riemann es

$$R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma = \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\sigma - \partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}^\sigma + \Gamma_{\mu\rho}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\sigma - \Gamma_{\nu\rho}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\sigma$$

De forma similar, podemos definir la curvatura por la no conmutación de las derivadas covariantes; su conmutador está dado precisamente por este tensor de curvatura

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V_\rho = R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma V_\sigma \quad (4.67)$$

De hecho, la doble derivada covariante se expresa como

$$\nabla_{\mu\nu} V_\rho = \partial_\mu (\nabla_\nu V_\rho) - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \nabla_\alpha V_\rho - \Gamma_{\mu\rho}^\alpha \nabla_\nu V_\alpha \quad (4.68)$$

Expandiendo los términos

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu\nu} V_\rho &= \partial_\mu [\partial_\nu V_\rho - \Gamma_{\nu\rho}^\alpha V_\alpha] - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha [\partial_\alpha V_\rho - \Gamma_{\alpha\rho}^\sigma V_\sigma] - \Gamma_{\mu\rho}^\alpha [\partial_\nu V_\alpha - \Gamma_{\nu\alpha}^\sigma V_\sigma] \\ &= \partial_{\mu\nu} V_\rho - \partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}^\alpha V_\alpha - \Gamma_{\nu\rho}^\alpha \partial_\mu V_\alpha - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \partial_\alpha V_\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\rho}^\sigma V_\sigma - \Gamma_{\mu\rho}^\alpha \partial_\nu V_\alpha + \Gamma_{\mu\rho}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\sigma V_\sigma \end{aligned}$$

Del mismo modo, calculamos $\nabla_{\nu\mu} V_\rho$ (es decir, intercambiando $\mu \leftrightarrow \nu$)

$$\nabla_{\nu\mu} V_\rho = \partial_{\nu\mu} V_\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\alpha V_\alpha - \Gamma_{\mu\rho}^\alpha \partial_\nu V_\alpha - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha \partial_\alpha V_\rho + \Gamma_{\nu\mu}^\alpha \Gamma_{\alpha\rho}^\sigma V_\sigma - \Gamma_{\nu\rho}^\alpha \partial_\mu V_\alpha + \Gamma_{\nu\rho}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\sigma V_\sigma$$

Restando las dos expresiones, obtenemos

$$\nabla_{\mu\nu} V_\rho - \nabla_{\nu\mu} V_\rho = (\partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\alpha - \partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}^\alpha) V_\alpha + (\Gamma_{\mu\rho}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\sigma - \Gamma_{\nu\rho}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\sigma) V_\sigma \quad (4.69)$$

$$= [\partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\alpha - \partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}^\alpha + \Gamma_{\mu\rho}^\sigma \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha - \Gamma_{\nu\rho}^\sigma \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha] V_\alpha \quad (4.70)$$

En resumen

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V_\rho = [\partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\alpha - \partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}^\alpha + \Gamma_{\mu\rho}^\sigma \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha - \Gamma_{\nu\rho}^\sigma \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha] V_\alpha \quad (4.71)$$

es decir

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V_\rho = R_{\mu\nu\rho}{}^\alpha V_\alpha \quad (4.72)$$

Hay en principio, $256 = 4^4$ componentes de este tensor que debemos calcular, pero tiene varias simetrías que simplifican el problema

$$R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma = -R_{\nu\mu\rho}{}^\sigma$$

De hecho,

$$R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma V_\sigma = \nabla_{\mu\nu} V_\rho - \nabla_{\nu\mu} V_\rho = -(\nabla_{\nu\mu} V_\rho - \nabla_{\mu\nu} V_\rho) = -R_{\nu\mu\rho}{}^\sigma V_\sigma \quad (4.73)$$

pero como esta igualdad es verdadera para cualquier vector V_σ , obtenemos

$$R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma = -R_{\nu\mu\rho}{}^\sigma \quad (4.74)$$

También tenemos la primera identidad de Bianchi

$$R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma + R_{\nu\rho\mu}{}^\sigma + R_{\rho\mu\nu}{}^\sigma = 0$$

también escrita como $R_{[\mu\nu\rho]}{}^\sigma = 0$.

Expandida, esta se puede expresar como

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma + R_{\nu\rho\mu}{}^\sigma + R_{\rho\mu\nu}{}^\sigma &= \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\sigma - \partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}^\sigma + \Gamma_{\mu\rho}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\sigma - \Gamma_{\mu\alpha}^\sigma \Gamma_{\nu\rho}^\alpha \\
&\quad + \partial_\rho \Gamma_{\nu\mu}^\sigma - \partial_\nu \Gamma_{\rho\mu}^\sigma + \Gamma_{\nu\mu}^\alpha \Gamma_{\rho\alpha}^\sigma - \Gamma_{\nu\alpha}^\sigma \Gamma_{\rho\mu}^\alpha \\
&\quad + \partial_\mu \Gamma_{\rho\nu}^\sigma - \partial_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + \Gamma_{\rho\nu}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\sigma - \Gamma_{\rho\alpha}^\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.75}$$

Considerando

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\sigma\alpha} R_{\mu\nu\rho}{}^\alpha,$$

y si la conexión es la de Levi-Civita, tenemos

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\rho}$$

Esta relación es verdadera solo y solo si la conexión es la de Levi-Civita.

Si V_ρ es un campo vectorial

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V_\rho = R_{\mu\nu\rho}{}^\alpha V_\alpha \tag{4.76}$$

Usando la métrica para subir el índice

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\sigma = R_{\mu\nu}{}^{\sigma\alpha} V_\alpha \tag{4.77}$$

Hemos usado la condición de metricidad

$$g^{\rho\sigma} [\nabla_\mu, \nabla_\nu] V_\rho = [\nabla_\mu, \nabla_\nu] g^{\rho\sigma} V_\rho = [\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\sigma \tag{4.78}$$

Ocupando el escalar $S = V_\rho W^\rho$, lo que nos permite escribir

$$\nabla_\mu \nabla_\nu S = \nabla_\nu \nabla_\mu S \Rightarrow [\nabla_\mu, \nabla_\nu] S = 0 \tag{4.79}$$

Pero

$$\begin{aligned}
[\nabla_\mu, \nabla_\nu] S &= ([\nabla_\mu, \nabla_\nu] V_\rho) W^\rho + V_\rho ([\nabla_\mu, \nabla_\nu] W^\rho) \\
&= R_{\mu\nu\rho}{}^\alpha V_\alpha W^\rho + R_{\mu\nu}{}^{\rho\alpha} V_\rho W_\alpha \\
&= R_{\mu\nu\rho\alpha} V^\alpha W^\rho + R_{\mu\nu\rho\alpha} V^\rho W^\alpha \\
&= R_{\mu\nu\rho\alpha} V^\alpha W^\rho + R_{\mu\nu\alpha\rho} V^\alpha W^\rho \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.80}$$

es decir

$$R_{\mu\nu\rho\alpha} = -R_{\mu\nu\alpha\rho} \quad (4.81)$$

También, podemos demostrar que

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu}$$

De hecho, la identidad de Bianchi implica que

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\nu\rho\mu\sigma} - R_{\rho\mu\nu\sigma} \quad (4.82)$$

lo que nos permite obtener

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\rho\sigma} &= +R_{\nu\rho\sigma\mu} + R_{\rho\mu\sigma\nu} \quad (\text{antisimetría en los últimos dos índices}) \\ &= +R_{\nu\rho\sigma\mu} - R_{\mu\sigma\rho\nu} - R_{\sigma\rho\mu\nu} \quad (\text{usando Bianchi nuevamente}) \\ &= +R_{\nu\rho\sigma\mu} - R_{\mu\sigma\rho\nu} + R_{\rho\sigma\mu\nu} \quad (\text{antisimetría en los primeros dos índices}) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} - R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\nu\rho\sigma\mu} - R_{\mu\sigma\rho\nu} \quad (4.83)$$

Haciendo una redefinición de los índices ($\mu \leftrightarrow \nu$) y ($\rho \leftrightarrow \sigma$)

$$R_{\nu\mu\sigma\rho} - R_{\sigma\rho\nu\mu} = R_{\mu\sigma\rho\nu} - R_{\nu\rho\sigma\mu} \quad (4.84)$$

Sumando las ecuaciones (4.83) y (4.84), se obtiene

$$2R_{\nu\rho\sigma\mu} = 2R_{\mu\sigma\rho\nu} \Rightarrow R_{\rho\nu\mu\sigma} = R_{\mu\sigma\rho\nu} \quad (4.85)$$

También existen identidades con derivadas, como la segunda identidad de Bianchi

$$\nabla_\mu R_{\nu\rho\sigma}{}^\alpha + \nabla_\nu R_{\rho\mu\sigma}{}^\alpha + \nabla_\rho R_{\mu\nu\sigma}{}^\alpha = 0$$

O en notación con corchetes

$$\nabla_{[\mu} R_{\nu\rho]\sigma}{}^\alpha = 0 \quad (4.86)$$

Para demostrar esta relación, se considera la relación (4.67)

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V_\rho = R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma V_\sigma \quad (4.87)$$

Derivando esta expresión, obtenemos

$$\nabla_{\alpha\mu\nu}V_\rho - \nabla_{\alpha\nu\mu}V_\rho = \nabla_\alpha(R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma V_\sigma) = R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma \nabla_\alpha V_\sigma + (\nabla_\alpha R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma)V_\sigma \quad (4.88)$$

Pero también se tiene

$$(\nabla_{\alpha\mu} - \nabla_{\mu\alpha})\nabla_\nu V_\rho = R_{\alpha\mu\nu}{}^\sigma \nabla_\sigma V_\rho + R_{\alpha\mu\rho}{}^\sigma \nabla_\nu V_\sigma \quad (4.89)$$

Restando (4.88) y (4.89)

$$\nabla_{\mu\alpha\nu}V_\rho - \nabla_{\alpha\nu\mu}V_\rho = (\nabla_\alpha R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma)V_\sigma + R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma \nabla_\alpha V_\sigma - R_{\alpha\mu\nu}{}^\sigma \nabla_\sigma V_\rho - R_{\alpha\mu\rho}{}^\sigma \nabla_\nu V_\sigma \quad (4.90)$$

Permutando los índices

$$\nabla_{\alpha\nu\mu}V_\rho - \nabla_{\nu\mu\alpha}V_\rho = (\nabla_\nu R_{\alpha\mu\rho}{}^\sigma)V_\sigma + R_{\alpha\mu\rho}{}^\sigma \nabla_\nu V_\sigma - R_{\nu\alpha\mu}{}^\sigma \nabla_\sigma V_\rho - R_{\nu\alpha\rho}{}^\sigma \nabla_\mu V_\sigma \quad (4.91)$$

Y otra permutación

$$\nabla_{\nu\mu\alpha}V_\rho - \nabla_{\mu\alpha\nu}V_\rho = (\nabla_\mu R_{\nu\alpha\rho}{}^\sigma)V_\sigma + R_{\nu\alpha\rho}{}^\sigma \nabla_\mu V_\sigma - R_{\mu\nu\alpha}{}^\sigma \nabla_\sigma V_\rho - R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma \nabla_\alpha V_\sigma \quad (4.92)$$

Sumando las tres ecuaciones (4.90,4.91,4.92)

$$0 = (\nabla_\alpha R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma + \nabla_\nu R_{\alpha\mu\rho}{}^\sigma + \nabla_\mu R_{\nu\alpha\rho}{}^\sigma)V_\sigma - \underbrace{(\nabla_\alpha R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma + \nabla_\nu R_{\alpha\mu\rho}{}^\sigma + \nabla_\mu R_{\nu\alpha\rho}{}^\sigma)}_{=0 \text{ por primera identidad de Bianchi}} \nabla_\sigma V_\rho$$

lo que implica

$$\nabla_\alpha R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma + \nabla_\nu R_{\alpha\mu\rho}{}^\sigma + \nabla_\mu R_{\nu\alpha\rho}{}^\sigma = 0 \quad (4.93)$$

A partir del tensor de Riemann, podemos obtener un nuevo tensor: el tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}{}^\alpha$$

es decir

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\mu \Gamma_{\alpha\nu}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha - \Gamma_{\alpha\nu}^\beta \Gamma_{\beta\mu}^\alpha \quad (4.94)$$

Este tensor es simétrico

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu} \quad (4.95)$$

ya que

$$R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\mu\alpha\nu\beta} = g^{\alpha\beta} R_{\nu\beta\mu\alpha} = R_{\nu\mu} \quad (4.96)$$

Finalmente, se define la curvatura escalar

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \equiv R^\mu_\mu$$

Obviamente $R_{\mu\nu}$ y R contienen menos información sobre la curvatura que el tensor completo de Riemann $R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma$ pero van a ser importante para la teoría de Einstein.

Podemos obtener una nueva identidad a partir de la segunda identidad de Bianchi

$$\nabla_\mu R_{\nu\rho\sigma}{}^\alpha + \nabla_\nu R_{\rho\mu\sigma}{}^\alpha + \nabla_\rho R_{\mu\nu\sigma}{}^\alpha = 0 \quad (4.97)$$

Contrayendo con $\alpha = \sigma$ y sumando

$$\nabla_\mu R_{\nu\rho\sigma}{}^\rho + \nabla_\nu R_{\rho\mu\sigma}{}^\rho + \nabla_\rho R_{\mu\nu\sigma}{}^\rho = 0 \quad (4.98)$$

es decir

$$\nabla_\mu R_{\nu\sigma} - \nabla_\nu R_{\mu\sigma} + \nabla_\rho R_{\mu\nu\sigma}{}^\rho = 0 \quad (4.99)$$

Tomando la traza sobre μ y σ , se obtiene

$$\nabla_\mu R_\nu{}^\mu - \nabla_\nu R + \nabla_\rho R_\nu{}^\rho = 0 \quad (4.100)$$

es decir

$$2\nabla_\mu R^\mu_\nu - \nabla_\nu R = 0 \quad (4.101)$$

o

$$\nabla_\mu \left(R^\mu_\nu - \frac{1}{2} \delta^\mu_\nu R \right) = 0 \quad (4.102)$$

O, elevando el índice ν , se escribe como

$$\nabla_\mu \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) = 0$$

Definimos entonces el tensor de Einstein

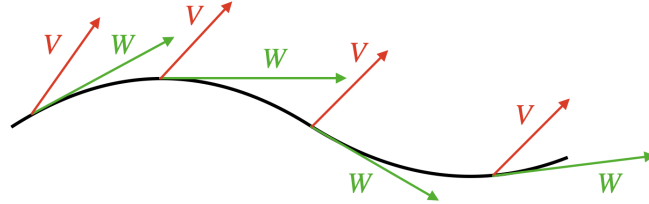
$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \quad (4.103)$$

el cual satisface

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0 \quad (4.104)$$

4.8 Geodésicas

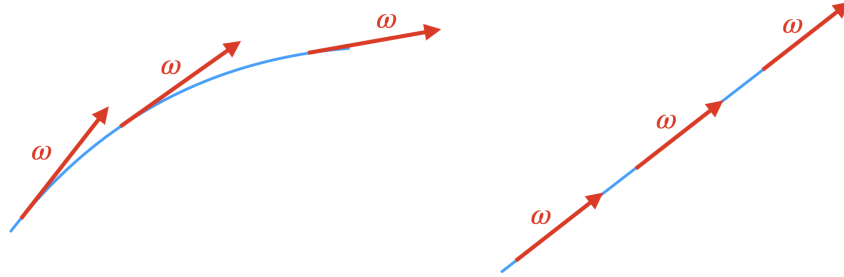
Una vez conocida la geometría, y por lo tanto la curvatura, podemos estudiar el desplazamiento de una partícula de prueba en esta geometría (es decir, una partícula muy pequeña que no afecta la geometría).



Hemos visto que se puede transportar un vector V^μ a lo largo de una dirección definida por un vector W^μ , W puede ser la tangente a una curva y V^μ es solución de (4.50)

$$W^\mu \nabla_\mu V^\nu = 0 \quad (4.105)$$

Pero ¿Qué ocurre si $V = W$? Es decir, que desplazamos W a lo largo de sí mismo.



En un espacio plano, sabemos que un vector permanece paralelo durante el transporte paralelo si la curva es recta. Por lo tanto, esto selecciona un tipo particular de trayectoria. En el espacio plano, son líneas rectas. En un espacio curvo, estas trayectorias se llaman **geodésicas** y satisfacen

$$W^\rho \nabla_\rho W^\mu = 0 \quad (4.106)$$

Expresado en términos de la conexión

$$W^\rho \partial_\rho W^\mu + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu W^\rho W^\sigma = 0 \quad (4.107)$$

Como $W^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$, entonces

$$W^\rho \partial_\rho W^\mu = \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{\partial}{\partial x^\rho} \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \quad (4.108)$$

Sustituyendo

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0$$

Esta es la ecuación de geodésica. La conexión Γ no tiene por qué ser la de Levi-Civita, pero si lo es, esta ecuación representa también líneas que minimizan la distancia.

De hecho, podemos derivar esta ecuación desde un principio variacional que minimiza una distancia. Sea la acción

$$S = \int ds = \int \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \int \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} d\tau \equiv \int \mathcal{L} d\tau \quad (4.109)$$

donde $\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$, y el lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \sqrt{g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} \quad (4.110)$$

La ecuación de Euler-Lagrange es

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\lambda} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\lambda} \quad (4.111)$$

Calculando ambas derivadas y simplificando

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\sigma} = \frac{g_{\mu\nu} \left(\frac{\partial \dot{x}^\mu}{\partial \dot{x}^\sigma} \dot{x}^\nu + \dot{x}^\mu \frac{\partial \dot{x}^\nu}{\partial \dot{x}^\sigma} \right)}{2\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}} = \frac{g_{\sigma\nu} \dot{x}^\nu + g_{\mu\sigma} \dot{x}^\mu}{2\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}} = \frac{g_{\sigma\mu} \dot{x}^\mu}{\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}} \quad (4.112)$$

lo que implica

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\sigma} \right) = \frac{(\partial_\rho g_{\sigma\mu}) \dot{x}^\rho \dot{x}^\mu + g_{\sigma\mu} \ddot{x}^\mu}{\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}} - \frac{1}{2} g_{\sigma\mu} \dot{x}^\mu \frac{\frac{d}{d\tau} (g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta)}{\left(\sqrt{g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta} \right)^3} \quad (4.113)$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\sigma} = \frac{(\partial_\sigma g_{\mu\nu}) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}{2\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}} \quad (4.114)$$

es decir

$$(\partial_\rho g_{\sigma\mu}) \dot{x}^\rho \dot{x}^\mu + g_{\sigma\mu} \ddot{x}^\mu - \frac{1}{2} g_{\sigma\mu} \dot{x}^\mu \frac{\frac{d}{d\tau} (g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta)}{g_{\gamma\delta} \dot{x}^\gamma \dot{x}^\delta} - \frac{1}{2} (\partial_\sigma g_{\mu\nu}) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0 \quad (4.115)$$

pero como $g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta$ es constante a lo largo de una geodésica, su derivada es nula

$$(\partial_\rho g_{\sigma\mu}) \dot{x}^\rho \dot{x}^\mu + g_{\sigma\mu} \ddot{x}^\mu - \frac{1}{2} (\partial_\sigma g_{\mu\nu}) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0 \quad (4.116)$$

Multiplicando por $g^{\sigma\varepsilon}$, tenemos

$$g^{\sigma\varepsilon} (\partial_\rho g_{\sigma\mu}) \dot{x}^\rho \dot{x}^\mu + \ddot{x}^\varepsilon - \frac{1}{2} g^{\sigma\varepsilon} \partial_\sigma g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0 \quad (4.117)$$

es decir

$$\ddot{x}^\varepsilon + \frac{1}{2} g^{\sigma\varepsilon} (2\partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0 \quad (4.118)$$

Como $\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$ es simétrico en los dos índices, obtenemos

$$\ddot{x}^\varepsilon + \frac{1}{2} g^{\sigma\varepsilon} (\partial_\nu g_{\sigma\mu} + \partial_\mu g_{\sigma\nu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0 \quad (4.119)$$

es decir

$$\ddot{x}^\varepsilon + \Gamma_{\mu\nu}^\varepsilon \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0 \quad (4.120)$$

donde hemos usado la definición de la conexión de Levi-Civita. Las dos ecuaciones de geodésicas son similares, curva más corta y curva más similar a una curva recta, si la conexión es definida por los símbolos de Christoffel.

Nota que también se puede usar el lagrangiano cuadrático

$$\mathcal{L} = g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \quad (4.121)$$

en lugar del lagrangiano con raíz cuadrada. Ambas opciones conducen a la misma ecuación geodésica.

Las ecuaciones de la relatividad general

5. Las ecuaciones de movimiento

De los capítulos previos, hemos demostrado que la gravedad es descrita por la métrica. Por ejemplo, cuando los efectos relativistas son pequeños, hemos encontrado que

$$g_{00} \simeq -1 - \frac{2\phi}{c^2} \quad (5.1)$$

donde ϕ es el potencial gravitacional, y sabemos que

$$T_{00} = \rho c^2 \quad (5.2)$$

Por lo tanto, la ecuación de Poisson $\Delta\phi = 4\pi G \rho$ se escribe

$$\frac{c^2}{2} \Delta g_{00} = 4\pi G \frac{T_{00}}{c^2} \Rightarrow \Delta g_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{00} \quad (5.3)$$

La ecuación que buscamos debe ser tensorial (principio de covarianza)

$$\Delta g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (5.4)$$

pero también no lineal (la energía gravitacional produce gravedad). Por lo tanto, debemos buscar un tensor $E_{\mu\nu}$ tal que

$$E_{\mu\nu} = \alpha T_{\mu\nu}, \quad (5.5)$$

con α una constante, de modo que $E_{\mu\nu}$ contenga segundas derivadas de la métrica (como Δg_{00}), sea simétrico ($E_{\mu\nu} = E_{\nu\mu}$, igual que $T_{\mu\nu}$), no lineal, y que $E_{00} \simeq \Delta g_{00}$ en el límite newtoniano.

En octubre de 1915, Einstein postuló que $E_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}$, es decir,

$$R_{\mu\nu} = \alpha T_{\mu\nu}. \quad (5.6)$$

Sin embargo, para reproducir las ecuaciones de un fluido, recordemos que

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (5.7)$$

mientras que en general

$$\nabla_\mu R^{\mu\nu} \neq 0, \quad (5.8)$$

aunque (4.104)

$$\nabla_\mu (R^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} R g^{\mu\nu}) = 0 \quad (5.9)$$

Por ello, el 25 de noviembre de 1915 publicó un nuevo artículo con la ecuación

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \alpha T_{\mu\nu}. \quad (5.10)$$

En ese mismo artículo menciona que se puede agregar una constante Λ de forma consistente con todas las reglas

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \alpha T_{\mu\nu} \quad (5.11)$$

Dado que

$$\nabla_\mu (\Lambda g^{\mu\nu}) = \Lambda \nabla_\mu (g^{\mu\nu}) = 0 \quad (5.12)$$

Podemos considerar la traza de la ecuación (5.11), contrayéndola con $g^{\mu\nu}$

$$g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} R g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = \alpha g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \quad (5.13)$$

es decir

$$-R + 4\Lambda = \alpha T \quad \Rightarrow \quad R = 4\Lambda - \alpha T \quad (5.14)$$

Por lo tanto, podemos reescribir la ecuación de Einstein como

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} (4\Lambda - \alpha T) - \Lambda g_{\mu\nu} + \alpha T_{\mu\nu} \\ &= \Lambda g_{\mu\nu} + \alpha (T_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} T g_{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (5.15)$$

Para determinar α , consideramos el límite newtoniano, donde

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad \text{con} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \quad (5.16)$$

es decir una pequeña desviación a la métrica plana. Además, asumimos que la métrica es casi estática y que las velocidades son pequeñas. Estudiamos la ecuación con $\mu = \nu = 0$

$$R_{00} = \Lambda g_{00} + \alpha \left(T_{00} - \frac{1}{2} T g_{00} \right). \quad (5.17)$$

con

$$R_{00} = \partial_\mu \Gamma_{00}^\mu - \underbrace{\partial_0 \Gamma_{\mu 0}^\mu}_{=0, \text{ estático}} + \underbrace{\Gamma_{00}^\mu \Gamma_{\mu\nu}^\nu - \Gamma_{\nu 0}^\mu \Gamma_{\mu 0}^0}_{\text{segundo orden en } h} \quad (5.18)$$

y

$$\Gamma_{00}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \overbrace{(\partial_0 g_{0\sigma} + \partial_0 g_{\sigma 0} - \partial_\sigma g_{00})}^{=0, \text{ estático}} = -\frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \partial_\sigma (\eta_{00} + h_{00}) \quad (5.19)$$

$$= -\frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \partial_\sigma h_{00} \simeq -\frac{1}{2} \eta^{\mu\sigma} \partial_\sigma h_{00} = -\frac{1}{2} \partial^\mu h_{00} \quad (5.20)$$

Lo que nos permite obtener

$$R_{00} \simeq \partial_\mu \Gamma_{00}^\mu \simeq -\frac{1}{2} \square h_{00} \simeq -\frac{1}{2} \Delta h_{00} \quad (5.21)$$

Tenemos desde (5.17)

$$-\frac{1}{2} \Delta h_{00} = -\Lambda + \alpha \left(\rho u_0 u_0 - \frac{\rho}{2} c^2 \right) \quad \text{con } u^0 \simeq -c \Rightarrow u_0 = c \quad (5.22)$$

es decir

$$\Delta h_{00} = 2\Lambda - \alpha \rho c^2 \quad (5.23)$$

Recordando que (5.1)

$$h_{00} \simeq -\frac{2\phi}{c^2} \quad (5.24)$$

se recupera la ecuación de Poisson

$$\Delta \phi = 4\pi G \rho, \quad (5.25)$$

si

$$\alpha = \frac{16\pi G}{c^4} \quad (5.26)$$

y si Λc^2 es despreciable.

Así obtenemos, finalmente, las ecuaciones de Einstein de la relatividad general

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

o bien

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (5.27)$$

con

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \quad (5.28)$$

5.1 Constante cosmológica

La constante Λ que será llamada más tarde la constante cosmológica tiene un efecto que podemos observar en el límite newtoniano. La ec.(5.23) se escribe

$$\Delta\phi = -\Lambda c^2 + 4\pi G\rho, \quad (5.29)$$

Consideramos un problema esférico

$$\Delta\phi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) \quad (5.30)$$

lo que transforma la ecuación de Poisson en

$$\partial_r (r^2 \phi') = -\Lambda c^2 r^2 + 4\pi G \rho r^2 \quad (5.31)$$

$$r^2 \phi' = -\frac{\Lambda}{3} c^2 r^3 + 4\pi G \int \rho r^2 dr \quad (5.32)$$

Para un objeto esférico, su masa es

$$M = \int \rho r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = 4\pi \int \rho r^2 dr \quad (5.33)$$

lo que implica que

$$r^2 \phi' = -\frac{\Lambda}{3} c^2 r^3 + GM \quad (5.34)$$

es decir

$$\phi' = -\frac{\Lambda}{3} c^2 r + \frac{GM}{r^2} \quad (5.35)$$

A partir de lo cual podemos obtener el campo gravitacional

$$\vec{g} = -\vec{\nabla}\phi = -\phi'\vec{e}_r \quad (5.36)$$

es decir

$$\vec{g} = -\frac{GM}{r^2}\vec{e}_r + \frac{\Lambda}{3}c^2r\vec{e}_r \quad (5.37)$$

lo que muestra que si Λ es pequeño, su efecto sólo aparece a grandes escalas, para grandes valores de r . Además, si $\Lambda > 0$, produce un efecto repulsivo; si $\Lambda < 0$, el efecto es atractivo.

6. Acción de Einstein-Hilbert

Las ecuaciones de Einstein pueden ser obtenidas a partir de una acción, encontrada por Hilbert y conocida como la acción de Einstein-Hilbert. Como la acción debe ser un escalar, no hay muchas posibilidades. Utilizamos el determinante de la métrica $g = \det(g_{\mu\nu})$ y la curvatura escalar R . La acción sin materia es

$$S = \frac{c^4}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R \quad (6.1)$$

con $\int d^4x \sqrt{-g}$ el invariante de volumen (4.8). Al incluir la constante cosmológica Λ y la materia, la acción total se convierte en

$$S = \frac{c^4}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + S_m, \quad (6.2)$$

donde S_m es la acción de la materia.

Esta acción depende del campo métrico $g_{\mu\nu}$, por lo que debemos hacer una variación con respecto a esta métrica

$$\delta S = \frac{c^4}{16\pi G} \int d^4x [\delta(\sqrt{-g})(R - 2\Lambda) + \sqrt{-g} \delta R] + \delta S_m. \quad (6.3)$$

Dado que $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, su variación es

$$\delta R = \delta(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}. \quad (6.4)$$

Usando que $g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \nabla_\mu V^\mu$ es un término de frontera (con V^μ una combinación lineal de derivadas de $\delta g_{\mu\nu}$), y que este no contribuye a las ecuaciones del movimiento, lo omitimos (ver sección 6.1).

Nos falta calcular

$$\sqrt{-g} = -\frac{\delta g}{2\sqrt{-g}} \quad (6.5)$$

donde δg es la variación de un determinante. Por eso ocupamos la relación para una matriz M

$$\det M = \exp(\text{Tr} \ln M) \quad \Rightarrow \quad \ln(\det M) = \text{Tr} \ln M \quad (6.6)$$

lo que implica

$$\frac{\delta(\det M)}{\det M} = \text{Tr}(M^{-1} \delta M) \quad (6.7)$$

Aplicando esto a la métrica $g_{\mu\nu}$, obtenemos

$$\frac{\delta g}{g} = \text{Tr}(g^{\mu\alpha}\delta g_{\alpha\nu}) = g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \quad (6.8)$$

En la última igualdad hemos usado que $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 4$ lo que implica

$$(\delta g_{\mu\nu})g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu}(\delta g^{\mu\nu}) = 0 \quad (6.9)$$

es decir

$$(\delta g_{\mu\nu})g^{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}(\delta g^{\mu\nu}) \quad (6.10)$$

Por otro lado, usando que $g^{\mu\nu}g_{\nu\lambda} = \delta^\mu_\lambda$, se puede demostrar que

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\delta g_{\alpha\beta}, \quad (6.11)$$

lo que implica

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{\delta g}{2\sqrt{-g}} = -\frac{-g}{2\sqrt{g}}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \quad (6.12)$$

Sustituyendo todo en la variación total, obtenemos

$$\delta S = \frac{c^4}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(R - 2\Lambda) \right] \delta g^{\mu\nu} + \delta S_m. \quad (6.13)$$

Por el principio variacional, $\delta S = 0$ para variaciones arbitrarias de $\delta g^{\mu\nu}$, lo que implica

$$\frac{c^4}{16\pi G} \sqrt{-g} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \right] + \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 \quad (6.14)$$

Definimos el tensor energía-momento como

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (6.15)$$

Finalmente, llegamos a las ecuaciones de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (6.16)$$

6.1 Termino de borde

Considerando la definición del tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\mu \Gamma_{\alpha\nu}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta - \Gamma_{\alpha\nu}^\beta \Gamma_{\beta\mu}^\alpha \quad (6.17)$$

obtenemos para su variación:

$$\delta R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\mu \delta \Gamma_{\alpha\nu}^\alpha + (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) \Gamma_{\alpha\beta}^\beta + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\beta - (\delta \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) \Gamma_{\beta\mu}^\alpha - \Gamma_{\alpha\nu}^\beta \delta \Gamma_{\beta\mu}^\alpha \quad (6.18)$$

Esto se puede escribir más fácilmente como

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\alpha \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \nabla_\mu \delta \Gamma_{\alpha\nu}^\alpha \quad (6.19)$$

Para demostrar esta relación, se recomienda partir del lado derecho y expandir las derivadas covariantes.

También tenemos

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \quad (6.20)$$

de donde se deduce que

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} \delta g^{\alpha\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) + \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (\partial_\mu \delta g_{\nu\sigma} + \partial_\nu \delta g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma \delta g_{\mu\nu}) \quad (6.21)$$

Y esto se puede reescribir como

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (\nabla_\mu \delta g_{\nu\sigma} + \nabla_\nu \delta g_{\sigma\mu} - \nabla_\sigma \delta g_{\mu\nu}) \quad (6.22)$$

De nuevo, para demostrar esta forma covariante, es más fácil partir del lado derecho y expandir las derivadas covariantes.

También deducimos

$$\delta \Gamma_{\alpha\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (\nabla_\alpha \delta g_{\nu\sigma} + \nabla_\nu \delta g_{\sigma\alpha} - \nabla_\sigma \delta g_{\alpha\nu}) = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} \nabla_\nu \delta g_{\sigma\alpha} \quad (6.23)$$

Por lo tanto

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (\nabla_\alpha \nabla_\mu \delta g_{\nu\sigma} + \nabla_\alpha \nabla_\nu \delta g_{\sigma\mu} - \nabla_\alpha \nabla_\sigma \delta g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g_{\sigma\alpha}) \quad (6.24)$$

Y al contraer con $g^{\mu\nu}$, obtenemos

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \nabla^\mu \nabla^\nu \delta g_{\mu\nu} - \square(g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}) \equiv \nabla_\mu X^\mu \quad (6.25)$$

donde

$$X^\mu = (g^{\mu\beta}g^{\alpha\gamma} - g^{\mu\alpha}g^{\beta\gamma}) \nabla_\alpha \delta g_{\beta\gamma} \quad (6.26)$$

En conclusión, en la acción aparece un término superficial

$$\int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\mu X^\mu = \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} n^\mu X_\mu \quad (6.27)$$

por el teorema de Stokes, donde h es la métrica inducida sobre el borde y n^μ el vector normal.

Como este término es un término de borde, no contribuye a las ecuaciones del movimiento. Sin embargo, se puede agregar un término adicional (una integral en 3D sobre la frontera) que cancela este aporte superficial. Este término agregado se llama el término de Gibbons-Hawking (ver curso más avanzado).

7. Algunos espacios triviales

En este capítulo, queremos estudiar algunos espacios que son soluciones de las ecuaciones de Einstein. Para ello, construiremos estos espacios de forma geométrica y luego verificaremos que satisfacen efectivamente las ecuaciones de la relatividad general. En esta línea, definiremos algunos espacios como hipersuperficies inmersas en un espacio de dimensión superior, a partir del cual podremos obtener la métrica inducida sobre la hipersuperficie. Por ejemplo, podemos ver una esfera en 2D como una superficie definida por la ecuación en 3D

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (7.1)$$

Es decir, una esfera de radio R en 3 dimensiones. Esta es una restricción sobre las coordenadas (x, y, z) en un espacio euclidiano con métrica

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (7.2)$$

Este espacio euclidiano tiene 6 simetrías:

- 3 traslaciones en las direcciones x, y, z
- 3 rotaciones en los planos: $(xy), (xz), (yz)$

La superficie que estamos considerando (la esfera) es invariante bajo 3 rotaciones, pero no bajo traslaciones. Por lo tanto, esta esfera de 2 dimensiones tiene el número máximo de simetrías posibles en su categoría: se dice que es **maximalmente simétrica**. Podemos definir nuevas coordenadas que resuelven automáticamente la ec.(7.2)

$$x = R \sin \theta \cos \phi \quad (7.3)$$

$$y = R \sin \theta \sin \phi \quad (7.4)$$

$$z = R \cos \theta \quad (7.5)$$

de lo cual podemos encontrar la métrica inducida sobre la 2-esfera usando este sistema de coordenadas (llamadas coordenadas inducidas)

$$dx = R \cos \theta \cos \phi d\theta - R \sin \theta \sin \phi d\phi \quad (7.6)$$

$$dy = R \cos \theta \sin \phi d\theta + R \sin \theta \cos \phi d\phi \quad (7.7)$$

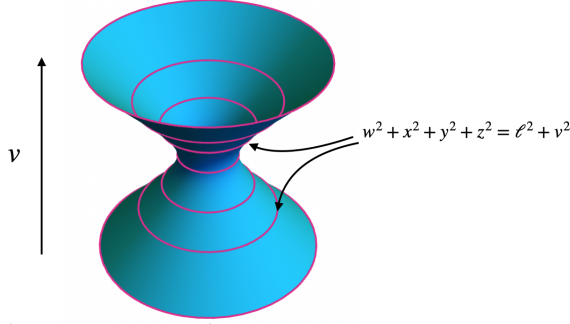
$$dz = -R \sin \theta d\theta \quad (7.8)$$

La métrica usando esta restricción es

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (7.9)$$

Es decir que hemos obtenido la métrica de la 2-esfera.

7.1 Espacio de Sitter (dS)



siones con métrica

De forma análoga, podemos estudiar otras superficies incluidas en un espacio más grande. Por ejemplo, consideremos la ecuación

$$-v^2 + w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = \ell^2$$

en un espacio de Minkowski en 5 dimensiones

$$ds^2 = -dv^2 + dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (7.10)$$

El espacio de Minkowski en 5D tiene 15 simetrías

- 5 traslaciones: v, w, x, y, z
- 6 rotaciones: $(wx), (wy), (wz), (xy), (xz), (yz)$
- 4 boosts: $(vw), (vx), (vy), (vz)$

La superficie definida por la ecuación anterior es invariante bajo 10 de estas simetrías, en particular las 6 rotaciones y 4 boosts, lo que la hace maximalmente simétrica. Se llama el espacio de Sitter. De la misma manera que no necesitamos ver una esfera como embebida en un espacio mayor para describirla, basta con su métrica en 2D, podemos hacer lo mismo con el espacio de de Sitter. Para resolver la ecuación

$$-v^2 + w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = \ell^2, \quad (7.11)$$

podemos introducir el siguiente cambio de variables:

$$v = \ell \sinh(t/\ell), \quad (7.12)$$

$$w = \ell \cos \theta_1 \cosh(t/\ell), \quad (7.13)$$

$$x = \ell \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cosh(t/\ell), \quad (7.14)$$

$$y = \ell \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \cosh(t/\ell), \quad (7.15)$$

$$z = \ell \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cosh(t/\ell). \quad (7.16)$$

Al reemplazar estas variables en la métrica del espacio de Minkowski 5D,

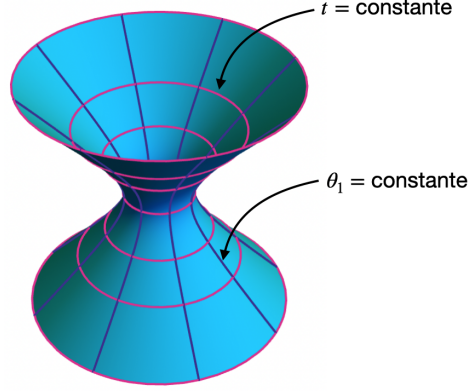
$$ds^2 = -dv^2 + dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (7.17)$$

obtenemos la métrica inducida

$$ds^2 = -dt^2 + \ell^2 \cosh^2(t/\ell) [d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 (d\theta_2^2 + \sin^2 \theta_2 d\theta_3^2)] \quad (7.18)$$

con

$$t \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \theta_1 \leq \pi, \quad 0 \leq \theta_2 \leq \pi, \quad 0 \leq \theta_3 \leq 2\pi. \quad (7.19)$$



Las coordenadas $(t, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ se llaman *coordenadas globales*, ya que cubren toda la superficie. Usando esta métrica en la ecuación de Einstein, podemos comprobar que es solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío con constante cosmológica positiva

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0, \quad \text{con} \quad \Lambda = \frac{3}{\ell^2} > 0. \quad (7.20)$$

También podemos introducir otro sistema de coordenadas, llamado *coordenadas planas*, aunque no cubren todo el espacio

$$v = \ell \sinh(t/\ell) + \frac{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2}{2\ell} e^{t/\ell}, \quad (7.21)$$

$$w = \ell \cosh(t/\ell) - \frac{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2}{2\ell} e^{t/\ell}, \quad (7.22)$$

$$x = \bar{x} e^{t/\ell}, \quad (7.23)$$

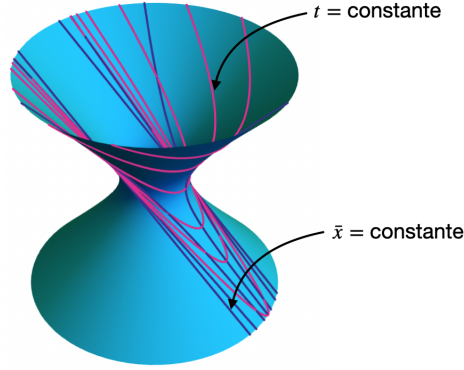
$$y = \bar{y} e^{t/\ell}, \quad (7.24)$$

$$z = \bar{z} e^{t/\ell} \quad (7.25)$$

Como $v + w = \ell e^{t/\ell} \geq 0$, esto muestra que este sistema de coordenadas no cubre todo el espacio. Reemplazando este cambio en la métrica de Minkowski 5D obtenemos

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2t/\ell} (d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2) \quad (7.26)$$

lo cual corresponde a un sistema de coordenadas frecuentemente utilizado en cosmología.



En física de agujeros negros, se utiliza todavía otro sistema de coordenadas.

$$v = \sqrt{\ell^2 - r^2} \sinh(t/\ell) \quad (7.27)$$

$$w = \sqrt{\ell^2 - r^2} \cosh(t/\ell) \quad (7.28)$$

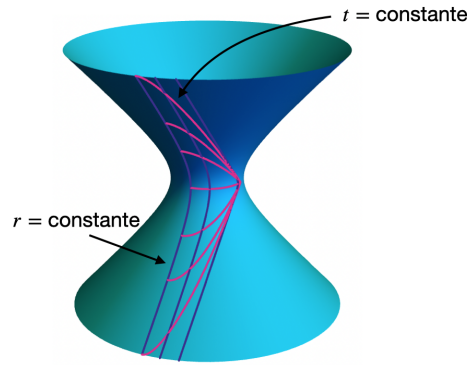
$$x = r \cos \theta \quad (7.29)$$

$$y = r \sin \theta \cos \phi \quad (7.30)$$

$$z = r \sin \theta \sin \phi \quad (7.31)$$

con $0 \leq r \leq \ell$. El punto $r = \ell$ no es una singularidad. Es un *horizonte* para un observador localizado en $r = 0$. La métrica inducida se vuelve

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r^2}{\ell^2} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - r^2/\ell^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (7.32)$$



Este sistema de coordenadas estáticas sólo cubre $r \in [0, \ell]$. Para $r > \ell$, es necesario usar un sistema de coordenadas dependiente del tiempo.

7.2 Espacio Anti-de Sitter (AdS)

De forma análoga, consideramos la superficie

$$-v^2 - w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = -\ell^2 \quad (7.33)$$

incluida en el espacio 5D con métrica:

$$ds^2 = -dv^2 - dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (7.34)$$

Este espacio tiene 10 simetrías:

- 4 rotaciones: $(vw), (xy), (xz), (yz)$
- 6 boosts: $(vx), (vy), (vz), (wx), (wy), (wz)$

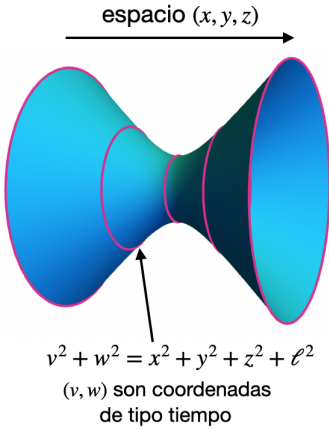
Por tanto, es un espacio *maximalmente simétrico*. Podemos escribir la ecuación como

$$x^2 + y^2 + z^2 + \ell^2 = v^2 + w^2 \quad (7.35)$$

Si (x, y, z) son fijos, obtenemos un círculo en el plano (v, w) , es decir, una topología de S^1 . Como $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, la topología del espacio es:

$$S^1 \times \mathbb{R}^3 \quad (7.36)$$

En general, en D dimensiones, la topología del espacio AdS es $S^1 \times \mathbb{R}^{D-1}$. Mientras que para el espacio de de Sitter, la topología es $\mathbb{R} \times S^{D-1}$.



Por lo tanto, en $D = 2$, ambos espacios son topológicamente equivalentes: $\mathbb{R} \times S^1$. Como voy a usar un dibujo en 2D, los dos espacios pueden parecer similares. La cantidad $v^2 + w^2$ define un tiempo periódico. Por esa razón, no se usa en física.

En su lugar, se utiliza el *recubrimiento universal* del espacio AdS, que en física simplemente llamamos, el espacio AdS.

Es decir, debemos "abrir" esta superficie y hacer infinitas copias de la misma, eliminando así la periodicidad temporal.

Las coordenadas que cubren todo el espacio, se llaman coordenadas globales

$$v = \ell \cosh \rho \cos \tau \quad (7.37)$$

$$w = \ell \cosh \rho \sin \tau \quad (7.38)$$

$$x = \ell \sinh \rho \sin \theta \sin \phi \quad (7.39)$$

$$y = \ell \sinh \rho \sin \theta \cos \phi \quad (7.40)$$

$$z = \ell \sinh \rho \cos \theta \quad (7.41)$$

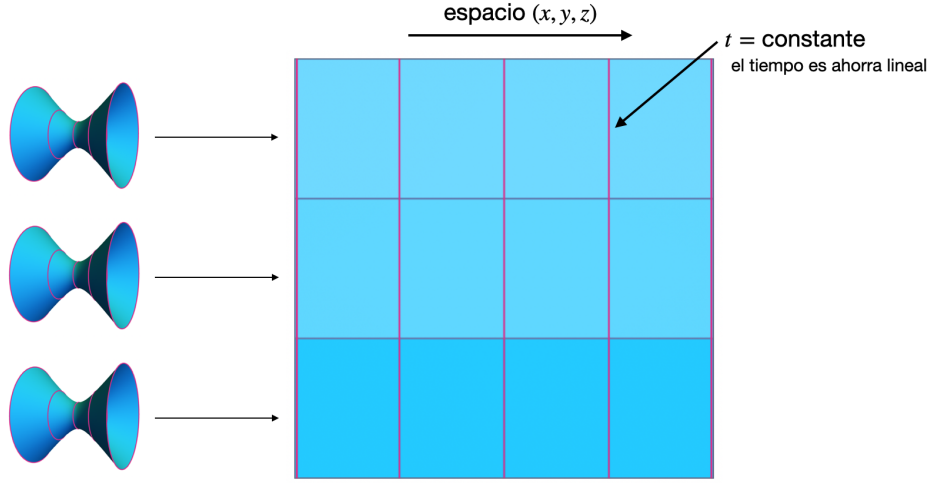
La métrica en estas coordenadas toma la forma:

$$ds^2 = \ell^2 \left[-\cosh^2 \rho d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (7.42)$$

con

$$0 \leq \rho < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi \quad (7.43)$$

En el recubrimiento universal reemplazamos $\tau \in [0, 2\pi]$ por $\tau \in \mathbb{R}$.



Esta métrica es solución de la ecuación de Einstein en el vacío con constante cosmológica negativa

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0, \quad \text{con} \quad \Lambda = -\frac{3}{\ell^2} < 0 \quad (7.44)$$

La métrica es estática, en coordenadas globales a diferencia del espacio de Sitter. Podemos definir otro sistema de coordenadas

$$r = \ell \sinh \rho, \quad t = \ell \tau \quad (7.45)$$

y reescribir la métrica como

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{r^2}{\ell^2}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 + r^2/\ell^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (7.46)$$

Este sistema de coordenadas también cubre todo el espacio.

Espacio-tiempo esféricamente simétrico

8. Isometrias y simetría esférica

Si un espacio-tiempo es invariante bajo una transformación de coordenadas

$$x^\mu \longmapsto \bar{x}^\mu$$

se dice que esta transformación es una **simetría** o **isometría** del espacio-tiempo. Por ejemplo, para el espacio de Minkowski en 4 dimensiones, tenemos:

- 4 traslaciones (una por cada coordenada),
- 3 rotaciones espaciales,
- 3 boosts (transformaciones de Lorentz entre espacio y tiempo).

En total, hay 10 simetrías. Este es el número máximo posible en 4D. Se dice que el espacio es **maximalmente simétrico**. Estas 10 transformaciones dejan la métrica invariante.

En general, bajo una transformación de coordenadas, la métrica se transforma como

$$\bar{g}_{\alpha\beta}(\bar{x}) = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta} g_{\mu\nu}(x), \quad (8.1)$$

o, de forma equivalente,

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^\nu} \bar{g}_{\alpha\beta}(\bar{x}). \quad (8.2)$$

Decimos que una transformación es una **isometría** si

$$\bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x}) = g_{\mu\nu}(\bar{x}), \quad (8.3)$$

es decir, si la forma de la métrica no cambia en las nuevas coordenadas. Por tanto, la condición para una isometría es

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^\nu} g_{\alpha\beta}(\bar{x}) \quad (8.4)$$

Esta ecuación es muy complicada en general. Por eso, se estudian transformaciones infinitesimales. Por ejemplo, una rotación infinitesimal es

$$\bar{x} = x \cos \varepsilon + y \sin \varepsilon \approx x + \varepsilon y \quad (8.5)$$

con ε el ángulo infinitesimal. Por lo tanto, de forma genérica, consideramos un cambio infinitesimal de coordenadas

$$\bar{x}^\alpha = x^\alpha + \varepsilon k^\alpha(x), \quad \varepsilon \ll 1 \quad (8.6)$$

Entonces el jacobiano se aproxima por

$$\frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\alpha + \varepsilon \frac{\partial k^\alpha}{\partial x^\mu} \quad (8.7)$$

Sustituyendo en la transformación de la métrica

$$g_{\mu\nu}(x) \simeq (\delta_\mu^\alpha + \varepsilon \partial_\mu k^\alpha) (\delta_\nu^\beta + \varepsilon \partial_\nu k^\beta) g_{\alpha\beta}(x^\sigma + \varepsilon k^\sigma) \quad (8.8)$$

$$\simeq \left(\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta + \varepsilon \delta_\nu^\beta \partial_\mu k^\alpha + \varepsilon \delta_\mu^\alpha \partial_\nu k^\beta + \varepsilon^2 \partial_\mu k^\alpha \partial_\nu k^\beta \right) \left(g_{\alpha\beta}(x) + \varepsilon k^\sigma \partial_\sigma g_{\alpha\beta}(x) \right) \quad (8.9)$$

Expandiendo hasta primer orden en ε , obtenemos

$$g_{\mu\nu}(x) \simeq g_{\mu\nu}(x) + \varepsilon (\partial_\mu k^\alpha g_{\alpha\nu} + \partial_\nu k^\beta g_{\mu\beta} + k^\sigma \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \quad (8.10)$$

Por lo tanto, para que la transformación sea una isometría, se debe cumplir

$$k^\sigma \partial_\sigma g_{\mu\nu} + (\partial_\mu k^\alpha) g_{\alpha\nu} + (\partial_\nu k^\beta) g_{\mu\beta} = 0 \quad (8.11)$$

Esta es la condición de Killing. El campo $k^\mu(x)$ es un **vector de Killing** si satisface esta ecuación.

Podemos reescribir la ecuación de Killing de otra manera

$$k^\sigma \partial_\sigma g_{\mu\nu} + \underbrace{\partial_\nu (k^\beta g_{\mu\beta})}_{=\partial_\nu k_\mu} - \underbrace{k^\beta \partial_\nu g_{\mu\beta}}_{=k^\sigma \partial_\nu g_{\mu\sigma}} + \underbrace{\partial_\mu (k^\alpha g_{\alpha\nu})}_{=\partial_\mu k_\nu} - \underbrace{k^\alpha \partial_\mu g_{\alpha\nu}}_{=k^\sigma \partial_\mu g_{\sigma\nu}} = 0$$

Agrupando términos

$$\partial_\mu k_\nu + \partial_\nu k_\mu - k^\sigma (\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) = 0 \quad (8.12)$$

o de forma equivalente

$$\partial_\mu k_\nu + \partial_\nu k_\mu - k_\alpha g^{\alpha\sigma} (\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) = 0 \quad (8.13)$$

Reconocemos el símbolo de Christoffel (4.43)

$$\partial_\mu k_\nu + \partial_\nu k_\mu - 2k_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha = 0 \quad (8.14)$$

Entonces, la ecuación de Killing puede escribirse como

$$\nabla_\mu k_\nu + \nabla_\nu k_\mu = 0 \quad (8.15)$$

Nota que si k^μ es un vector de Killing y p_μ es el momento de una partícula que sigue una geodésica, entonces

$$k^\mu p_\mu = \text{constante a lo largo de la trayectoria} \quad (8.16)$$

En efecto, al derivar a lo largo del parámetro afín σ

$$\frac{d}{d\sigma} (k^\mu p_\mu) = \frac{d}{d\sigma} (k_\mu p^\mu) = \frac{dk_\mu}{d\sigma} p^\mu + k_\mu \frac{dp^\mu}{d\sigma} \quad (8.17)$$

Sabemos que

$$\frac{dk_\mu}{d\sigma} = \frac{\partial k_\mu}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\sigma} = \left(\nabla_\nu k_\mu + \Gamma_{\nu\mu}^\sigma k_\sigma \right) \frac{dx^\nu}{d\sigma} \quad (8.18)$$

Y por la ecuación de geodésicas, como $p^\mu = m v^\mu$

$$\frac{dp^\mu}{d\sigma} = -\Gamma_{\rho\sigma}^\mu p^\rho \frac{dx^\sigma}{d\sigma} \quad (8.19)$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma} (k^\mu p_\mu) &= \left(\nabla_\nu k_\mu + \Gamma_{\nu\mu}^\sigma k_\sigma \right) p^\mu \frac{dx^\nu}{d\sigma} - k_\mu \Gamma_{\rho\sigma}^\mu p^\rho \frac{dx^\sigma}{d\sigma} \\ &= \nabla_\nu k_\mu p^\mu \frac{dx^\nu}{d\sigma} = m \nabla_\nu k_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} \end{aligned} \quad (8.20)$$

El segundo término es simétrico en $\mu \leftrightarrow \nu$, y usando la ecuación de Killing antisimétrica en $\mu \leftrightarrow \nu$, se anula. Entonces

$$\frac{d}{d\sigma} (k^\mu p_\mu) = 0 \quad (8.21)$$

Esto demuestra que $k^\mu p_\mu$ es una **cantidad conservada** si k^μ es un vector de Killing y p^μ satisface la ecuación geodésica.

En conclusión, si conocemos las isometrías (es decir, las transformaciones $x^\mu \rightarrow \bar{x}^\mu$ o de forma infinitesimal $x^\mu \rightarrow \bar{x}^\mu = x^\mu + \varepsilon k^\mu$), podemos:

- simplificar la forma de la métrica,
- encontrar las cantidades conservadas para partículas en movimiento,
- clasificar las simetrías del espacio-tiempo.

8.1 Isometrías del espacio de Minkowski

En coordenadas cartesianas, la ecuación de Killing se reduce a

$$\partial_\mu k_\nu + \partial_\nu k_\mu = 0 \quad (8.22)$$

La solución general de la ecuación de Killing en espacio de Minkowski es

$$k_\mu = \omega_{\mu\nu} x^\nu + a_\mu \quad (8.23)$$

donde a_μ y $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ son constantes. Es decir, hay

- 4 vectores de traslación a_μ ,
- 6 parámetros antisimétricos $\omega_{\mu\nu}$ que corresponden a las transformaciones de Lorentz (rotaciones y boosts).

De hecho, si $k_\mu = \omega_{\mu\alpha} x^\alpha + a_\mu$

$$\partial_\nu k_\mu = \omega_{\mu\alpha} \delta_\nu^\alpha = \omega_{\mu\nu} \quad (8.24)$$

tenemos

$$\partial_\nu k_\mu + \partial_\mu k_\nu = \omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu} = 0 \quad (8.25)$$

Lo cual cumple con la ecuación de Killing: $\partial_\mu k_\nu + \partial_\nu k_\mu = 0$. Los k_μ representan transformaciones infinitesimales de Lorentz y traslaciones. Como k^μ son las componentes de un vector, el vector completo es

$$k = k^\mu \partial_\mu \quad (8.26)$$

Por ejemplo el generador de rotación alrededor del eje x es ω_{23} . Sea $\omega_{23} \neq 0$ el único parámetro distinto de cero. Entonces

$$k_2 = \omega_{23} x^3 = \omega_{23} z \quad (8.27)$$

$$k_3 = \omega_{32} x^2 = -\omega_{23} y \quad (8.28)$$

El vector de Killing correspondiente es

$$k = k^\mu \partial_\mu = \omega_{23} (z \partial_y - y \partial_z) \quad (8.29)$$

que representa el generador de rotaciones alrededor del eje x .

8.2 Isometrías de la 2-esfera

Consideramos la 2-esfera descrita por la métrica

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (8.30)$$

La ecuación de Killing es

$$\nabla_\mu k_\nu + \nabla_\nu k_\mu = 0 \quad (8.31)$$

Para esta métrica, las únicas componentes no nulas de los símbolos de Christoffel son

$$\Gamma_{\theta\phi}^\phi = \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \frac{1}{\tan \theta}, \quad \Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\cos \theta \sin \theta \quad (8.32)$$

Aplicamos la ecuación de Killing para diferentes combinaciones de índices

$$\mu = \nu = \theta \Rightarrow \partial_\theta k_\theta = 0 \quad (8.33)$$

$$\mu = \theta, \nu = \phi \Rightarrow \partial_\theta k_\phi + \partial_\phi k_\theta - \frac{2}{\tan \theta} k_\phi = 0 \quad (8.34)$$

$$\mu = \nu = \phi \Rightarrow \partial_\phi k_\phi + \cos \theta \sin \theta k_\theta = 0 \quad (8.35)$$

De (8.33) obtenemos

$$k_\theta = f(\phi) \quad (8.36)$$

Tomando la derivada (∂_θ) de la ec.(8.35) y usando (8.36)

$$\partial_\phi (\partial_\theta k_\phi) - (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) f(\phi) = 0 \quad (8.37)$$

ahora ocupando (8.34)

$$\partial_\phi \left(-f'(\phi) + \frac{2}{\tan \theta} k_\phi \right) - (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) f(\phi) = 0 \quad (8.38)$$

finalmente usando (8.34) obtenemos

$$f''(\phi) + f(\phi) = 0 \quad (8.39)$$

con solución

$$k_\theta = f(\phi) = \alpha \cos \phi + \beta \sin \phi \quad (8.40)$$

Lo que nos permite obtener a partir de la ec.(8.35)

$$k_\phi = g(\theta) - \alpha \cos \theta \sin \theta \sin \phi + \beta \cos \theta \sin \theta \cos \phi \quad (8.41)$$

Reemplazando en (8.34) nos da una ecuación para $g(\theta)$

$$g'(\theta) - \frac{2}{\tan \theta} g(\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad g(\theta) = \gamma \sin^2 \theta \quad (8.42)$$

Entonces los vectores de Killing son

$$\begin{cases} k_\theta = \alpha \cos \phi + \beta \sin \phi \\ k_\phi = \gamma \sin^2 \theta - \alpha \cos \theta \sin \theta \sin \phi + \beta \cos \theta \sin \theta \cos \phi \end{cases} \quad (8.43)$$

Y las componentes contravariantes, usando la métrica

$$\begin{cases} k^\theta = g^{\theta\theta} k_\theta = k_\theta = \alpha \cos \phi + \beta \sin \phi \\ k^\phi = g^{\phi\phi} k_\phi = \frac{k_\phi}{\sin^2 \theta} = \gamma + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (-\alpha \sin \phi + \beta \cos \phi) \end{cases} \quad (8.44)$$

El vector de Killing completo es

$$k = k^\theta \partial_\theta + k^\phi \partial_\phi \quad (8.45)$$

$$= (\alpha \cos \phi + \beta \sin \phi) \partial_\theta + \left[\gamma + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (-\alpha \sin \phi + \beta \cos \phi) \right] \partial_\phi \quad (8.46)$$

$$= \gamma \partial_\phi + \alpha \left[\cos \phi \partial_\theta - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \sin \phi \partial_\phi \right] + \beta \left[\sin \phi \partial_\theta + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cos \phi \partial_\phi \right] \quad (8.47)$$

$$= \gamma k^{(3)} + \alpha k^{(2)} + \beta k^{(1)} \quad (8.48)$$

Estos son los tres generadores de rotaciones sobre la esfera S^2

$$k^{(1)} = \sin \phi \partial_\theta + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cos \phi \partial_\phi \quad (8.49)$$

$$k^{(2)} = \cos \phi \partial_\theta - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \sin \phi \partial_\phi \quad (8.50)$$

$$k^{(3)} = \partial_\phi \quad (8.51)$$

Se puede verificar que satisfacen el álgebra de Lie de $\mathfrak{so}(3)$

$$[k^{(i)}, k^{(j)}] = \varepsilon^{ijk} k^{(k)} \quad (8.52)$$

Este resultado podía haber sido obtenido más fácilmente. De hecho, Si conocemos las simetrías (por ejemplo, rotaciones), podemos considerar sus acciones como transformaciones de coordenadas. Consideramos las coordenadas (x, y, z) . Para una rotación en el plano (x^i, x^j)

$$\bar{x}^i = x^i \cos \theta + x^j \sin \theta \quad (8.53)$$

$$\bar{x}^j = -x^i \sin \theta + x^j \cos \theta \quad (8.54)$$

$$\bar{x}^k = x^k \quad \text{si } k \neq i, j \quad (8.55)$$

Si consideramos una transformación infinitesimal ($\theta \ll 1$)

$$\bar{x}^i = x^i + \theta x^j \quad (8.56)$$

$$\bar{x}^j = x^j - \theta x^i \quad (8.57)$$

$$\bar{x}^k = x^k \quad (8.58)$$

Recordando que una transformación se escribe como $\bar{x}^\mu = x^\mu + \varepsilon k^\mu$. Esto corresponde a una transformación infinitesimal con parámetro $\varepsilon = \theta$ y vector de Killing

$$k_{(ij)}^\mu = x^j \delta_i^\mu - x^i \delta_j^\mu \quad (8.59)$$

el índice (ij) es para indicar que es una transformación en el plano (x^i, x^j) .

Los generadores de las rotaciones son por lo tanto, $k = k^\mu \partial_\mu$, en coordenadas cartesianas

$$k_{(xy)} = (x\delta_y^\mu - y\delta_x^\mu) \partial_\mu = x\partial_y - y\partial_x \quad (8.60)$$

$$k_{(yz)} = (y\delta_z^\mu - z\delta_y^\mu) \partial_\mu = y\partial_z - z\partial_y \quad (8.61)$$

$$k_{(xz)} = (x\delta_z^\mu - z\delta_x^\mu) \partial_\mu = x\partial_z - z\partial_x \quad (8.62)$$

Al cambiar a coordenadas esféricas, estos generadores se convierten en

$$k_{(xy)} = \partial_\phi \quad (8.63)$$

$$k_{(yz)} = \sin \phi \partial_\theta + \frac{\cos \phi}{\tan \theta} \partial_\phi \quad (8.64)$$

$$k_{(xz)} = \cos \phi \partial_\theta - \frac{\sin \phi}{\tan \theta} \partial_\phi \quad (8.65)$$

Estas expresiones coinciden con los vectores de Killing obtenidos anteriormente (8.49,8.50,8.51).

8.3 Simetría esférica

Hemos visto cómo obtener los vectores de Killing, que representan los generadores de las simetrías. De forma inversa, podemos considerar un espacio con cierta simetría, es decir, invariante bajo la acción de algunos vectores de Killing, y analizar cuáles serán las consecuencias sobre la métrica para que dicho espacio posea esa simetría. En particular, nos vamos a enfocar en el caso de la simetría esférica. La ecuación de Killing (8.11) es

$$k^\sigma \partial_\sigma g_{\mu\nu} + \partial_\nu k^\beta g_{\mu\beta} + \partial_\mu k^\alpha g_{\alpha\nu} = 0 \quad (8.66)$$

Considerando el primer vector de Killing ($k^\mu = \delta_\phi^\mu$) obtenemos con la ecuación de Killing

$$\partial_\phi g_{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad g_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu}(t, r, \theta) \quad (8.67)$$

Usando el segundo vector de Killing $k^\mu = \sin \phi \delta_\theta^\mu + \frac{\cos \phi}{\tan \theta} \delta_\phi^\mu$ con la ecuación de Killing

$$\begin{aligned} \sin \phi \partial_\theta g_{\mu\nu} + \frac{\cos \phi}{\tan \theta} \partial_\phi g_{\mu\nu} + (\partial_\nu \sin \phi) g_{\mu\theta} + \partial_\nu \left(\frac{\cos \phi}{\tan \theta} \right) g_{\mu\phi} + (\partial_\mu \sin \phi) g_{\nu\theta} \\ + \partial_\mu \left(\frac{\cos \phi}{\tan \theta} \right) g_{\nu\phi} = 0 \end{aligned} \quad (8.68)$$

Finalmente con el tercer vector, $(k^\mu = \cos \phi \delta_\theta^\mu - \frac{\sin \phi}{\tan \theta} \delta_\phi^\mu)$ obtenemos

$$\begin{aligned} \cos \phi \partial_\theta g_{\mu\nu} + (\partial_\nu \cos \phi) g_{\mu\theta} - \partial_\nu \left(\frac{\sin \phi}{\tan \theta} \right) g_{\mu\phi} + (\partial_\mu \cos \phi) g_{\nu\theta} \\ - \partial_\mu \left(\frac{\sin \phi}{\tan \theta} \right) g_{\nu\phi} = 0 \end{aligned} \quad (8.69)$$

Multiplicando (8.68) por $\cos \phi$ y (8.69) por $\sin \phi$, restando y usando

$$\cos \phi \partial_\mu \sin \phi - \sin \phi \partial_\mu \cos \phi = \partial_\mu \phi \quad (8.70)$$

obtenemos

$$\partial_\nu \phi g_{\mu\theta} + \partial_\mu \phi g_{\nu\theta} + \partial_\nu (\cot \theta) g_{\mu\phi} + \partial_\mu (\cot \theta) g_{\nu\phi} = 0 \quad (8.71)$$

- Si $\nu = 2$ y $\mu = (0, 1)$, entonces $g_{\mu 3} = 0$, lo que implica, $g_{03} = 0$ y $g_{13} = 0$
- Si $\nu = 3$ y $\mu = (0, 1)$, entonces $g_{\mu 2} = 0$, lo que implica, $g_{02} = 0$ y $g_{12} = 0$
- Si $\nu = 2$ y $\mu = 2$, entonces $g_{23} = 0$.
- Si $\nu = 2$ y $\mu = 3$, se tiene la relación

$$g_{22} + \underbrace{\partial_\theta \cot \theta}_{-1/\sin^2 \theta} g_{33} = 0 \quad (8.72)$$

de donde se deduce $g_{33} = \sin^2 \theta g_{22}$

Por otro lado, multiplicando (8.68) por $\sin \phi$ y (8.69) por $\cos \phi$, y sumando

$$\partial_\theta g_{\mu\nu} - \cot \theta \partial_\nu \phi g_{\mu\phi} - \cot \theta \partial_\mu \phi g_{\nu\phi} = 0 \quad (8.73)$$

- Si $\nu = (0, 1)$ y $\mu = (0, 1)$ obtenemos $\partial_\theta g_{\mu\nu} = 0$ es decir que las funciones siguientes no dependen de θ , $g_{00}(t, r)$, $g_{01}(t, r)$, $g_{10}(t, r)$, $g_{11}(t, r)$

- Si $\nu = 2$ y $\mu = 2$, obtenemos $\partial_\theta g_{22} = 0$ es decir $g_{22}(t, r)$

En resumen, las simetrías nos permiten deducir que, en un espacio invariante bajo rotaciones, la métrica más general tiene la forma

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -f(t, r) & h(t, r) & 0 & 0 \\ h(t, r) & g(t, r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c(t, r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c(t, r) \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (8.74)$$

o de forma equivalente

$$ds^2 = -f(t, r)dt^2 + 2h(t, r)dtdr + g(t, r)dr^2 + c(t, r)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (8.75)$$

Podemos siempre hacer un cambio de coordenadas $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ que no cambie la física. Consideramos por ejemplo, la transformación

$$t = F(t', r'), \quad r = G(t', r') \quad (8.76)$$

Entonces

$$dt = F_{,t'} dt' + F_{,r'} dr' \quad (8.77)$$

$$dr = G_{,t'} dt' + G_{,r'} dr' \quad (8.78)$$

Sustituyendo en la métrica, obtenemos

$$ds^2 = -f(t, r)dt^2 + 2h(t, r)dtdr + g(t, r)dr^2 + c(t, r)d\Omega^2 \quad (8.79)$$

$$= -\alpha(t', r') dt'^2 + \beta(t', r') dt' dr' + \gamma(t', r') dr'^2 + C(t', r') d\Omega^2 \quad (8.80)$$

donde

$$\alpha = fF_{,t'}^2 - 2hF_{,t'}G_{,t'} - gG_{,t'}^2 \quad (8.81)$$

$$\beta = -2fF_{,t'}F_{,r'} + 2h(F_{,t'}G_{,r'} + F_{,r'}G_{,t'}) + 2gG_{,t'}G_{,r'} \quad (8.82)$$

$$\gamma = -fF_{,r'}^2 + 2hF_{,r'}G_{,r'} + gG_{,r'}^2 \quad (8.83)$$

y

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (8.84)$$

Podemos elegir el cambio de coordenadas, $F(t', r')$, de forma que el término cruzado desaparezca ($\beta = 0$). Además, si el gradiente de $C(t, r)$ es tal que $g^{\mu\nu} \partial_\mu C \partial_\nu C > 0$, podemos elegir¹ $G(t', r')$ tal que $C(t, r) = r^2$.

¹ver el libro de Plebanski and Krasinski, *An Introduction to General Relativity and Cosmology*

En conclusión, la forma más general de una métrica con **simetría esférica** (y coordenadas adaptadas) es

$$ds^2 = -A(t, r)dt^2 + B(t, r)dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

donde $A(t, r)$, $B(t, r)$ son funciones arbitrarias, y

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \tag{8.85}$$

9. El espacio de Schwarzschild

9.1 Campo gravitacional para un objeto aislado con simetría esférica

Considerando un espacio-tiempo con simetría esférica, la métrica se puede escribir de manera general como

$$ds^2 = -A(t, r) dt^2 + B(t, r) dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (9.1)$$

Con A, B dos funciones desconocidas que se pueden obtener a partir de las ecuaciones de Einstein. Es todavía un problema complicado. Por eso lo simplificamos, considerando el vacío como caso más simple

$$T_{\mu\nu} = 0 \quad (9.2)$$

Lo que implica

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0 \quad (9.3)$$

Tomando la traza, es decir, $g^{\mu\nu} \times$, obtenemos

$$R - 2R = -R = 0 \quad (9.4)$$

lo que implica

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (9.5)$$

Haciendo el cálculo de los símbolos de Christoffel, por la métrica (9.1), tenemos

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \frac{\dot{A}}{2A}, & \Gamma_{00}^1 &= \frac{A'}{2B}, & \Gamma_{01}^0 &= \Gamma_{10}^0 = \frac{A'}{2A}, & \Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{10}^1 = \frac{\dot{B}}{2B}, \\ \Gamma_{11}^0 &= \frac{\dot{B}}{2A}, & \Gamma_{11}^1 &= \frac{B'}{2B}, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, & \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{r}{B}, & \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, & \Gamma_{33}^1 &= -r \frac{\sin^2 \theta}{B}, & \Gamma_{33}^2 &= -\cos \theta \sin \theta \end{aligned} \quad (9.6)$$

A partir de los cuales podemos calcular el tensor de Ricci. Los más interesantes son

$$R_{01} = \frac{\dot{B}'}{rB} = 0 \quad (9.7)$$

es decir que tenemos

$$B(t, r) \equiv B(r) \quad (9.8)$$

También

$$R_{22} = 1 - \frac{1}{B} + \frac{rB'}{2B^2} - \frac{r}{2B} \frac{A'}{A} = 0 \quad (9.9)$$

lo que implica

$$\frac{A'(t, r)}{A(t, r)} = \frac{2B}{r} \left(1 - \frac{1}{B} + \frac{rB'}{2B^2} \right) \equiv f(r) \quad (9.10)$$

lo que en principio se puede integrar

$$\ln A(t, r) = g(r) + h(t) \quad (9.11)$$

con $g'(r) = f(r)$ y $h(t)$ una constante de integración

$$A(t, r) = \alpha(r) \beta(t) \quad \text{con} \quad \begin{cases} \alpha(r) = e^{g(r)} \\ \beta(t) = e^{h(t)} \end{cases} \quad (9.12)$$

En conclusión

$$ds^2 = -\alpha(r)\beta(t) dt^2 + B(r) dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (9.13)$$

Pero, podemos siempre redefinir el tiempo de tal manera que $\sqrt{\beta(t)} dt = dT$. Es un nuevo tiempo, asociado a algún observador. En conclusión, tenemos

$$ds^2 = -\alpha(r) dT^2 + B(r) dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (9.14)$$

Para notación, voy a llamar $T \rightarrow t$ y $\alpha = A$, es decir

$$ds^2 = -A(r) dt^2 + B(r) dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (9.15)$$

Cualquier solución con **simetría esférica** en el vacío es **estática**. Se llama *teorema de Birkhoff*. Además, como el espacio es estático, nada se propaga y por lo tanto no podemos tener ondas gravitacionales en el vacío alrededor de una esfera.

Continuando la resolución

$$R^0_0 - \frac{1}{2} R g^0_0 = \frac{B - B^2 - rB'}{r^2 B^2} = 0 \quad (9.16)$$

es decir

$$B(r) = \frac{1}{1 + \alpha/r} \quad (9.17)$$

Además

$$R^1_1 - \frac{1}{2}Rg^1_1 = \frac{A(4A + rA')B' + rB(A'^2 - 2AA'')}{4rA^2B^2} = 0 \quad (9.18)$$

es decir

$$A = A_0 \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) \quad (9.19)$$

con A_0 una constante. Por lo tanto, la métrica es

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) A_0 dt^2 + \frac{dr^2}{1 + \alpha/r} + r^2 d\Omega^2 \quad (9.20)$$

Podemos de nuevo eliminar esta constante por una redefinición del tiempo

$$ds^2 = -c^2 \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 + \alpha/r} + r^2 d\Omega^2 \quad (9.21)$$

α era una constante de integración, pero hemos visto en el límite newtoniano (2.16) que

$$g_{00} \simeq -1 + \frac{2GM}{rc^2} \Rightarrow \alpha = -\frac{2GM}{c^2} \quad (9.22)$$

Usualmente se define $r_s \equiv \frac{2GM}{c^2}$ (tiene dimensión de una distancia, radio)

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + r^2 d\Omega^2$$

Se llama la solución de **Schwarzschild**. Es la **única** solución para un problema con simetría esférica en el vacío.

9.2 Geodésicas en el espacio de Schwarzschild

Para encontrar las geodésicas, lo más simple es considerar el lagrangiano (4.121)

$$\mathcal{L} = -c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + r^2 \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2\right) \quad (9.23)$$

con $(\dot{t}, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$ definido de forma distinta si consideramos la partícula de prueba como masiva o sin masa. Para una partícula masiva, se considera derivadas con respecto al tiempo propio aunque para una partícula sin masa, como no existe un observador que se mueve con la partícula, ocupamos un parámetro a lo largo de la geodésica sin interpretación física.

Nota que el tiempo propio se define como (ver sección 1.5)

$$c^2 d\tau^2 = -ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (9.24)$$

Para una posición fija (r, θ, ϕ) , se tiene

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 \quad (9.25)$$

Cuando $r \rightarrow \infty$ obtenemos que $d\tau = dt$, es decir, t es el tiempo propio de un observador en el infinito.

Este lagrangiano (9.23) no depende explícitamente de t ni de ϕ es decir que t y ϕ son variables cíclicas. Por lo tanto

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = \text{constante} \equiv -2E/m \quad (9.26)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \text{constante} \equiv L/m \quad (9.27)$$

Estas constantes corresponden a simetrías del sistema. La simetría temporal implica conservación de la energía E , aunque la simetría rotacional implica conservación del momento angular L .

$$E = mc^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t} \quad (9.28)$$

$$L = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} \quad (9.29)$$

Para una partícula sin masa, estas definiciones deben cambiar ya que $m = 0$, por esa razón usualmente trabajamos con las cantidades

$$E = c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t} \quad (9.30)$$

$$L = r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} \quad (9.31)$$

Para una partícula con masa, las constantes E y L representan la energía y el momento angular por unidad de masa. Sin embargo, para una partícula sin masa, se tiene $\dot{t} = \frac{dt}{d\lambda}$, donde λ es un parámetro afín a lo largo de la geodésica. Este parámetro no representa el tiempo propio, ya que no existe un observador propio para una geodésica nula. El parámetro λ puede elegirse con una dimensión tal que las definiciones de E y L conserven las unidades correctas de energía y momento angular.

La ecuación para θ se obtiene de

$$\frac{d}{d\tau} (2r^2 \dot{\theta}) = 2r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 \quad (9.32)$$

pero

$$\frac{d}{d\tau}(2r^2\dot{\theta}) = 4r\dot{r}\dot{\theta} + 2r^2\ddot{\theta} \quad (9.33)$$

Por lo tanto

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} - \sin\theta \cos\theta \dot{\phi}^2 = 0 \quad (9.34)$$

A partir de esta ecuación podemos deducir que el movimiento de una partícula de prueba es planar. Para cualquier posición y velocidad inicial, podemos elegir el sistema de coordenadas de tal manera que

$$\theta(\tau = 0) = \frac{\pi}{2}, \quad \dot{\theta}(\tau = 0) = 0 \quad (9.35)$$

lo que implica a partir de la ec.(9.34)

$$\ddot{\theta}(\tau) = 0 \quad (9.36)$$

lo que significa que θ será constante y por lo tanto $\theta(\tau) = \frac{\pi}{2}$. El movimiento permanece en el plano ecuatorial. Como el movimiento es planar, podemos siempre fijar las coordenadas tal que

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad (9.37)$$

Entonces el lagrangiano (9.23) se reduce a

$$\mathcal{L} = -c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + r^2 \dot{\phi}^2 \quad (9.38)$$

La ecuación de Euler-Lagrange para r es

$$\frac{d}{d\tau} \left[\frac{2\dot{r}}{1 - \frac{r_s}{r}} \right] = -c^2 \frac{r_s}{r^2} \dot{t}^2 - \frac{r_s/r^2}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^2} \dot{r}^2 + 2r \dot{\phi}^2 \quad (9.39)$$

$$= \frac{2\ddot{r}}{1 - \frac{r_s}{r}} - 2 \frac{r_s/r^2}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^2} \dot{r}^2 \quad (9.40)$$

Reordenando

$$\ddot{r} - \frac{r_s/r^2}{2(1 - r_s/r)} \dot{r}^2 + c^2 \frac{r_s}{2r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t}^2 - r \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{\phi}^2 = 0 \quad (9.41)$$

Sustituyendo las constantes de movimiento (9.30,9.31) La ecuación se convierte en

$$\ddot{r} - \frac{r_s \dot{r}^2}{2r^2(1 - r_s/r)} + \frac{E^2}{c^2} \frac{r_s}{2r^2(1 - r_s/r)} - \frac{L^2}{r^3} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) = 0 \quad (9.42)$$

Es una ecuación complicada, por lo que es mejor usar la condición sobre el tipo de geodésicas que queremos estudiar

$$g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = \varepsilon = \begin{cases} 0 & (\text{fotones}) \\ -c^2 & (\text{partículas con masa}) \end{cases} \quad (9.43)$$

Escribiendo esto explícitamente:

$$-c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + r^2 \dot{\phi}^2 = \varepsilon \quad (9.44)$$

Usando las constantes de movimiento (9.30,9.31)

$$-\frac{E^2/c^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + \frac{L^2}{r^2} = \varepsilon \quad (9.45)$$

Esta ecuación es la primera integral de la ecuación de geodésicas (9.42), con constante de integración $\varepsilon = 0$ para luz, o $\varepsilon = -c^2$ para materia. Es decir, que si tomamos la derivada de esta ecuación nos da la ecuación previa (9.42). Multiplicando por $1 - r_s/r$ obtenemos

$$\dot{r}^2 + \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) + \varepsilon \frac{r_s}{r} = \frac{E^2}{c^2} + \varepsilon \quad (9.46)$$

Podemos escribir la ecuación como

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + V_{\text{ef}}(r) = E_{\text{ef}} \quad (9.47)$$

donde el potencial efectivo es

$$V_{\text{ef}}(r) = \frac{\varepsilon r_s}{2r} + \frac{L^2}{2r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \quad (9.48)$$

y la energía efectiva

$$E_{\text{ef}} = \frac{E^2/c^2 + \varepsilon}{2} \quad (9.49)$$

Lo que cierre el sistema de ecuaciones de nuestras geodésicas.

9.2.1 Caída libre de una partícula masiva

Consideramos el caso de una partícula en trayectoria radial, es decir $L = 0$, y $\varepsilon = -c^2$ (partícula masiva). Partimos de (9.46)

$$\dot{r}^2 - c^2 \frac{r_s}{r} = \frac{E^2}{c^2} - c^2 \quad (9.50)$$

Pero si la partícula parte de una distancia muy grande, r_0 ($r = \infty$) sin velocidad inicial $\dot{r} = 0$

$$E^2 - c^4 = 0 \quad (9.51)$$

es decir

$$\dot{r}^2 = c^2 \frac{r_s}{r} \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = \pm c \sqrt{\frac{r_s}{r}} \quad (9.52)$$

La solución con signo negativo describe una trayectoria que cae hacia el centro (aunque la otra solución corresponde a una partícula saliendo)

$$\dot{r} = -c \sqrt{\frac{r_s}{r}} = \frac{dr}{d\tau} \quad (9.53)$$

Integrando

$$\int_0^\tau c d\tau = - \int_{r_0}^r \sqrt{\frac{r_s}{r}} dr \quad (9.54)$$

es decir

$$c\tau = \frac{2}{3} \left[\sqrt{\frac{r_0^3}{r_s}} - \sqrt{\frac{r^3}{r_s}} \right] \quad (9.55)$$

La partícula alcanza $r = 0$ después de un tiempo propio

$$\tau = \frac{2}{3c} \sqrt{\frac{r_0^3}{r_s}} \quad (9.56)$$

Considerando la misma trayectoria para un observador al infinito, es decir, con su tiempo propio t . Sabemos que

$$\frac{dr}{d\tau} = -c \sqrt{\frac{r_s}{r}} \quad (9.57)$$

y de (9.30,9.51)

$$E = c^2 \frac{dt}{d\tau} \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) = c^2 \quad (9.58)$$

obtenemos

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = -c \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \sqrt{\frac{r_s}{r}} \quad (9.59)$$

con dr/dt la velocidad de esta partícula de prueba vista desde el infinito. Veamos que esta velocidad se acerca a 0 a menudo que r se acerca a r_s , aunque la velocidad medida con el reloj del observador en caída libre (9.57) siempre crece.

La ec.(9.59) es

$$c dt = -\frac{r^{3/2}}{(r - r_s)\sqrt{r_s}} dr \quad (9.60)$$

lo que podemos integrar

$$ct = \frac{2}{3} \left[\sqrt{\frac{r_0^3}{r_s}} - \sqrt{\frac{r^3}{r_s}} \right] + 2\sqrt{r_s}(\sqrt{r_0} - \sqrt{r}) + r_s \ln \left[\frac{\sqrt{\frac{r}{r_s}} + 1}{\sqrt{\frac{r}{r_s}} - 1} \frac{\sqrt{\frac{r_0}{r_s}} - 1}{\sqrt{\frac{r_0}{r_s}} + 1} \right] \quad (9.61)$$

Observamos que cuando $r \rightarrow r_s$ tenemos $t \rightarrow \infty$.

La partícula llega a $r = 0$ para un observador cayendo con ella, pero nunca cruza $r = r_s$ para un observador al infinito.

9.2.2 Observador estacionario

Considerando ahora un observador estacionario, en una posición (r, θ, ϕ) . Este observador necesita producir energía para mantenerse en ese punto; si no, cae. Para este observador, el tiempo propio es

$$dt' = \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} dt \quad (9.62)$$

y la distancia propia radial

$$dr' = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}} \quad (9.63)$$

Por lo tanto, la velocidad medida por este observador de una partícula cayendo hacia $r = 0$ es

$$\frac{dr'}{dt'} = \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} \frac{dr}{dt} = -c \sqrt{\frac{r_s}{r}} \quad (9.64)$$

Podemos ver que la velocidad es c cuando $r = r_s$, y mayor que c cuando $r < r_s$. Eso significa que no existe observador estacionario para $r < r_s$.

9.2.3 Caída libre de una partícula sin masa

Para un fotón, es decir, $\varepsilon = 0$, y con trayectoria radial, $L = 0$, tenemos (9.46)

$$\dot{r} = \pm E/c \quad \text{y} \quad c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t} = E \quad (9.65)$$

es decir

$$\frac{dr}{dt} = \pm c \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \quad (9.66)$$

lo que nos da

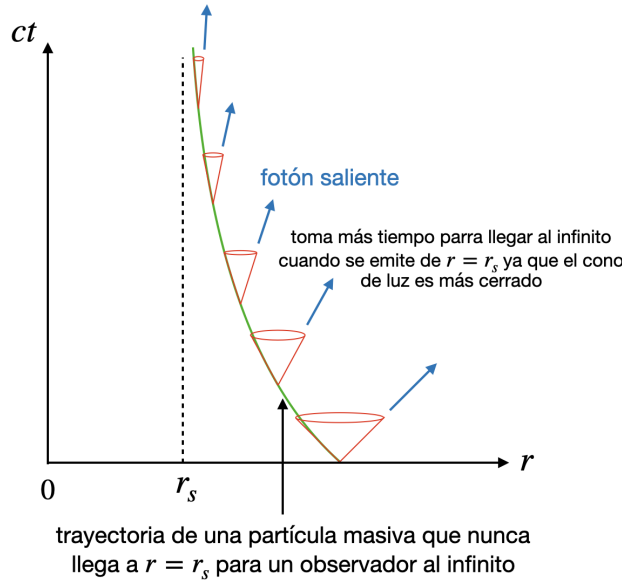
$$\text{fotón saliente:} \quad ct = r + r_s \ln \left(\frac{r}{r_s} - 1 \right) + \text{constante} \quad (9.67)$$

$$\text{fotón entrante:} \quad ct = -r - r_s \ln \left(\frac{r}{r_s} - 1 \right) + \text{constante} \quad (9.68)$$

Cuando $r \rightarrow \infty$, tenemos $ct \simeq \pm r$, es decir, $\frac{dr}{dt} = \pm c$, lo que define el cono de luz en relatividad especial. En nuestro caso, el cono de luz está definido para un observador en el infinito, ya que usamos el tiempo t de un observador situado en $r \rightarrow \infty$. A medida que este observador define el cono de luz más cerca del horizonte r_s , dicho cono se va cerrando.

$$\frac{dr}{dt} = \pm c \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \quad (9.69)$$

es decir cuando $r \rightarrow r_s$ tenemos $\frac{dr}{dt} \rightarrow 0$. El cono de luz se hace menos abierto y por lo tanto el fotón saliente toma más tiempo en llegar al infinito cuando se emite desde $r \rightarrow r_s$.



9.2.4 Órbita de una partícula masiva

Consideramos ahora órbitas para partículas masivas. Para una partícula masiva, tenemos

$$\dot{r}^2 + \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) - c^2 \frac{r_s}{r} = \frac{E^2}{c^2} - c^2 \quad (9.70)$$

$$\dot{\phi} = \frac{L}{r^2} \quad (9.71)$$

Esto implica

$$\frac{L^2}{r^4} \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = c^2 \frac{r_s}{r} - \frac{L^2}{r^2} + \frac{r_s L^2}{r^3} + \frac{E^2}{c^2} - c^2 \quad (9.72)$$

Como en mecánica newtoniana, hacemos el cambio de variable $u = 1/r$

$$L^2 \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = c^2 r_s u - L^2 u^2 + r_s L^2 u^3 + \frac{E^2}{c^2} - c^2 \quad (9.73)$$

Derivando esta ecuación, obtenemos

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{c^2 r_s}{2L^2} + \frac{3}{2} r_s u^2 \quad (9.74)$$

Es similar a la ecuación de Binet en mecánica newtoniana, excepto por el último término. En mecánica newtoniana, tenemos

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{L^2} \quad (9.75)$$

El último término desaparece cuando $u \rightarrow 0$ (es decir $r \rightarrow \infty$), o cuando $c \rightarrow \infty$, es decir el límite Newtoniano. Por lo tanto, es una corrección relativista a las trayectorias newtonianas.

Es importante, notar que el valor de r es solo una coordenada. Aunque en física newtoniana es la distancia radial, en relatividad la distancia viene dada por la métrica.

Para una órbita circular, r es constante, es decir u es constante, lo que implica $\frac{d^2 u}{d\phi^2} = 0$, lo que desde (9.75) nos da

$$u = \frac{c^2 r_s}{2L^2} + \frac{3}{2} r_s u^2 \quad (9.76)$$

Tiene dos soluciones, mientras que en la física newtoniana sólo hay una.

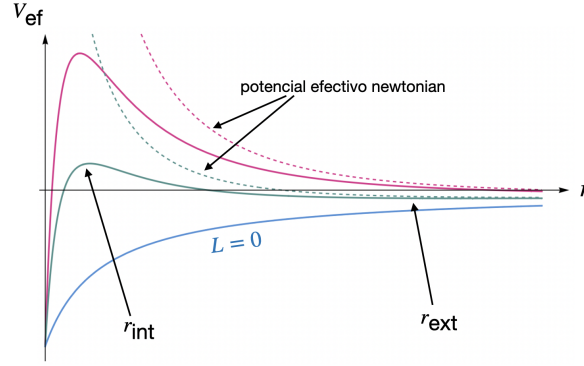
$$r_{\text{int}} = \frac{L^2}{r_s c^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{3r_s^2 c^2}{L^2}}\right) \quad (9.77)$$

$$r_{\text{ext}} = \frac{L^2}{r_s c^2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{3r_s^2 c^2}{L^2}}\right) \quad (9.78)$$

Para cada momento angular L , existen dos trayectorias circulares posibles. De hecho, se podía ver también con el potencial efectivo (9.48)

$$V_{\text{ef}}(r) = -\frac{c^2}{2} \frac{r_s}{r} + \frac{L^2}{2r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \quad (9.79)$$

Una órbita es circular cuando $V'_{\text{ef}}(r) = 0$



Como lo podemos ver, las trayectorias circulares no siempre existen; dependen del valor de L . Esto se puede deducir de la expresión de r_{int} y r_{ext} : para que r sea real, se requiere que

$$1 - 3\frac{r_s^2 c^2}{L^2} \geq 0 \quad (9.80)$$

Cuando se cumple esta condición, r_{int} corresponde a una órbita circular inestable, $V''_{\text{ef}}(r_{\text{int}}) < 0$ y r_{ext} corresponde a una órbita circular estable. También se puede deducir de (9.76)

$$L^2 = \frac{r_s c^2}{2u - 3r_s u^2} \quad (9.81)$$

Pero como $\dot{\phi}^2 = \frac{L^2}{r^4}$, resulta:

$$\dot{\phi}^2 = \frac{r_s u^3}{2 - 3r_s u} \quad (9.82)$$

De la condición $\dot{\phi}^2 \geq 0$ deducimos la condición

$$r \geq \frac{3}{2} r_s = \frac{3GM}{2c^2} \quad (9.83)$$

Cualquier trayectoria con $r < \frac{3}{2}r_s$ no puede ser una geodésica circular. En mecánica newtoniana, podemos tener trayectorias circulares para cualquier r . En relatividad general, no existe un L suficientemente grande para mantener una órbita circular cuando $r < \frac{3}{2}r_s$.

La trayectoria $r = \frac{3}{2}r_s$ es inestable. Las trayectorias estables son definidas por r_{ext} , y la más cercana al centro es cuando la raíz cuadrada se anula, es decir $L^2 = 3r_s^2$ lo que nos da

$$r = 3r_s = \frac{6GM}{c^2} \equiv r_{\text{isco}} \quad (9.84)$$

conocida como la órbita circular interna más estable (ISCO por sus siglas en inglés, innermost stable circular orbit). Es un límite importante para la acreción de gas. De hecho, los agujeros negros y las estrellas de neutrones típicamente poseen discos de acreción, es decir, discos giratorios de gas y polvo que espiralizan hacia el interior. El ISCO establece el límite interno de estos discos de acreción: en principio, la materia no puede orbitar de forma estable más cerca que el ISCO. Pero es precisamente en esta región donde los efectos gravitacionales son más extremos, dando lugar a emisiones de alta energía que los astrónomos observan (por ejemplo, en binarias de rayos X).

Por supuesto, hemos considerado un espacio-tiempo sin rotación. En el caso de que el objeto esté rotando, el ISCO se reduce y puede acercarse a GM/c^2 para agujeros negros con gran espín (sabiendo además que el horizonte también disminuye, concepto que no hemos todavía estudiado).

9.2.5 Órbita de una partícula sin masa

Para fotones, la ecuación de las órbitas se obtiene de la misma forma. A partir de

$$\dot{r}^2 + \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) = \frac{E^2}{c^2} \quad (9.85)$$

$$\dot{\phi} = \frac{L}{r^2} \quad (9.86)$$

obtenemos

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{3}{2}r_s u^2 \quad (9.87)$$

Una trayectoria circular existe si

$$u = \frac{3}{2}r_s u^2 \quad (9.88)$$

es decir

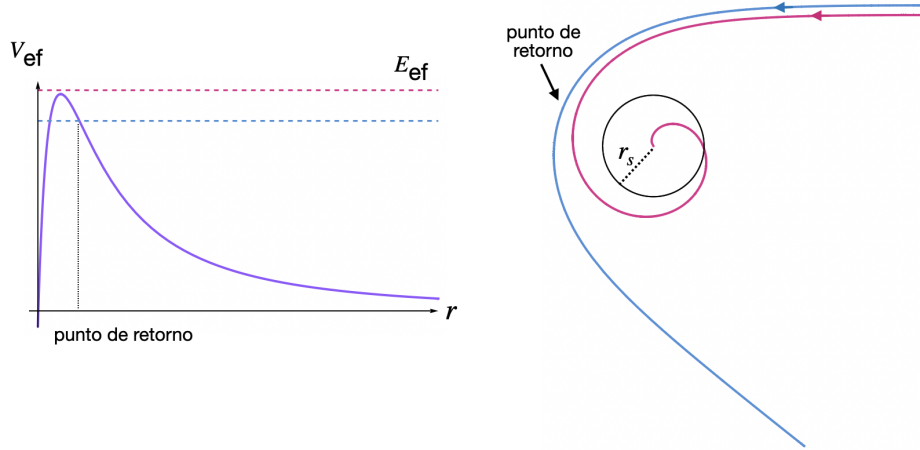
$$r = \frac{3}{2}r_s = \frac{3GM}{c^2} \quad (9.89)$$

Por ejemplo, para el Sol, obtenemos $r \sim 4.5 \text{ km} \ll R_\odot$, por lo que esta órbita está dentro del Sol, donde la solución de Schwarzschild no es válida ya que hay materia. Pero esta órbita puede existir para objetos muy compactos con radio menor a $< 3GM/c^2$. Pero esta órbita es inestable ya que $V''_{\text{ef}}\left(\frac{3GM}{c^2}\right) < 0$. En conclusión, es probable encontrar un fotón en una órbita circular alrededor de un objeto compacto, pero no podrá mantenerse mucho tiempo en dicha órbita. Esta órbita se llama la esfera de fotones y es importante para la noción de sombra de los agujeros negros. De hecho al "observar" agujeros negros (como en las imágenes del Telescopio del Horizonte de Sucesos del agujero negro M87*), la región oscura (la sombra del agujero negro) está estrechamente relacionada con la esfera de fotones.

Dependiendo de la energía del fotón comparada con $V_{\text{ef}}\left(\frac{3GM}{c^2}\right) = V_{\text{ef}}^{\text{máx}}$, el fotón puede o no alcanzar $r = 0$. De la ecuación (9.47)

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + V_{\text{ef}}(r) = \frac{E^2}{2c^2} \equiv E_{\text{ef}} \quad (9.90)$$

vemos que si $\frac{E^2}{2c^2} < V_{\text{ef}}^{\text{máx}}$, hay un r_{min} , es decir un punto de retorno. Esto ocurre si $L/E > \frac{3\sqrt{3}}{2}r_s$. Por otro lado, si $L/E < \frac{3\sqrt{3}}{2}r_s$, el fotón tiene poco momento angular y cae hacia el centro.



En el caso azul, hay una desviación de rayo de luz y queremos buscar de cuanto el rayo de luz desvía. La ecuación (9.87) se reduce para $M = 0$ o $r_s = 0$, es decir para un espacio plano, a

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 0 \quad (9.91)$$

lo que tiene como solución

$$u(\phi) = \alpha \cos \phi + \beta \sin \phi \quad (9.92)$$

lo que representa una línea recta. De hecho, en coordenadas cartesianas, $u = \frac{1}{r}$, $\cos \phi = \frac{x}{r}$, $\sin \phi = \frac{y}{r}$, entonces la ec.(9.92) es

$$\frac{1}{r} = \alpha \frac{x}{r} + \beta \frac{y}{r} \quad (9.93)$$

es decir

$$\alpha x + \beta y = 1 \quad (9.94)$$

Como es una línea recta, podemos elegir una orientación de nuestro sistema de coordenadas tal que $y = b$ lo que significa que en este sistema de coordenadas, $\alpha = 0$ y $\beta = 1/b$ lo que nos da

$$u = \frac{\sin \phi}{b} \quad (9.95)$$

con b un parámetro llamado el parámetro de impacto. Lo podemos relacionar a los parámetros de la partícula de prueba. De hecho, como $b = r \sin \phi$

$$0 = \frac{d}{dt}(r \sin \phi) = \dot{r} \sin \phi + r \dot{\phi} \cos \phi \quad (9.96)$$

es decir

$$\dot{r} \sin \phi + b \dot{\phi} \frac{\cos \phi}{\sin \phi} = 0 \quad (9.97)$$

Usando (9.85, 9.86) en el límite $r \rightarrow \infty$, es decir $\phi \rightarrow 0$, obtenemos

$$b = \frac{cL}{E} \quad (9.98)$$

Regresando a nuestro problema, queremos resolver

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{3}{2} r_s u^2 \quad (9.99)$$

Suponiendo una pequeña desviación a la trayectoria rectilínea

$$u \simeq \frac{\sin \phi}{b} + \Delta u \quad (9.100)$$

Al primer orden

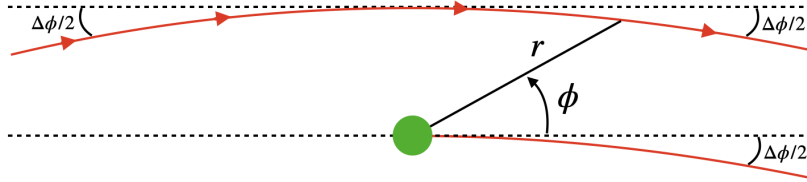
$$\frac{d^2 \Delta u}{d\phi^2} + \Delta u = \frac{3GM}{c^2 b^2} \sin^2 \phi \quad (9.101)$$

cuya solución es

$$\Delta u = \frac{3GM}{2c^2 b^2} \left(1 + \frac{1}{3} \cos 2\phi \right) \quad (9.102)$$

lo que nos da

$$u \simeq \frac{\sin \phi}{b} + \frac{3GM}{2c^2 b^2} \left(1 + \frac{1}{3} \cos 2\phi \right) \quad (9.103)$$



Definimos $\Delta\phi$ el ángulo total de desviación y para $u = 0$ tenemos $\phi = -\Delta\phi/2$ lo que nos permite escribir

$$0 = -\frac{\sin \Delta\phi/2}{b} + \frac{3GM}{2c^2 b^2} \left(1 + \frac{1}{3} \cos \Delta\phi \right) \quad (9.104)$$

lo que por pequeñas desviaciones, nos da

$$0 = -\frac{\Delta\phi}{2b} + \frac{3GM}{2c^2 b^2} \left(1 + \frac{1}{3} \right) \quad (9.105)$$

es decir

$$\Delta\phi = \frac{4GM}{bc^2} \quad (9.106)$$

Por ejemplo, para un rayo cerca del Sol ($b = R_\odot$), tenemos una predicción de

$$\Delta\phi \simeq 1.75'' \quad (9.107)$$

En 1919, Eddington y Dyson midieron

$$\Delta\phi \simeq 1.98'' \pm 0.10'' \quad (9.108)$$

$$\text{y } \Delta\phi \simeq 1.61'' \pm 0.4'' \quad (9.109)$$

Actualmente, con VLBI (Very Long Baseline Interferometry) se puede comprobar con alta precisión

$$\Delta\phi \simeq 1.74986'' \pm 0.00013'' \quad (9.110)$$

9.2.6 Precesión de las órbitas

En mecánica newtoniana, sabemos que la ecuación

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{L^2} \quad (9.111)$$

tiene como solución

$$u(\phi) = \frac{GM}{L^2} (1 + e \cos \phi) \quad (9.112)$$

lo que corresponde a una trayectoria elíptica con excentricidad e . Los radios extremos son

$$r_1 = a(1 - e), \quad r_2 = a(1 + e)$$

con $a = \frac{2L^2}{GM(1-e^2)}$ el semieje mayor. En relatividad,

la ecuación tiene un termino adicional, lo que cambia

la trayectoria elíptica. Como este termino es usualmente pequeño, lo consideramos como una perturbación a la trayectoria de Kepler y podemos escribir

$$u = \frac{GM}{L^2} (1 + e \cos \phi) + \Delta u \quad (9.113)$$

La ecuación (9.74) para Δu se escribe

$$\frac{d^2 \Delta u}{d\phi^2} + \Delta u = \frac{3(GM)^3}{c^2 L^4} (1 + e \cos \phi)^2 \quad (9.114)$$

cuya solución es

$$\Delta u = \frac{3(GM)^3}{c^2 L^4} \left[1 + e^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos 2\phi \right) + e \cos \phi + e\phi \sin \phi \right] \quad (9.115)$$

pero $\phi \sin \phi$ es el termino dominante ya que crece con tiempo aunque los otros términos están acotados. Entonces

$$u(\phi) \simeq \frac{GM}{L^2} (1 + e \cos \phi + \alpha e \phi \sin \phi) \quad \text{con } \alpha = \frac{3(GM)^2}{c^2 L^2} \quad (9.116)$$

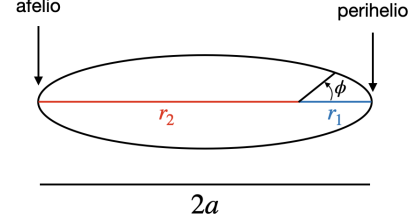
Tenemos

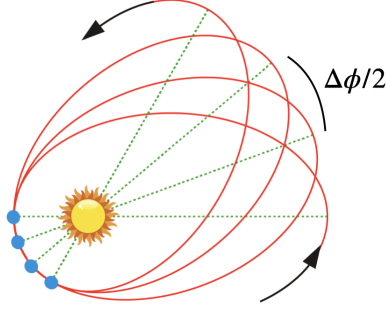
$$u(\phi) \simeq \frac{GM}{L^2} [1 + e(\cos \phi + \alpha \phi \sin \phi)] \quad (9.117)$$

$$\simeq \frac{GM}{L^2} [1 + e \cos[(1 - \alpha)\phi]], \quad \text{ya que } \alpha \ll 1 \quad (9.118)$$

Es una órbita periódica, pero con período $\frac{2\pi}{1-\alpha} > 2\pi$. Cada período, la órbita termina con un ángulo adicional; no es una órbita cerrada. Esto se llama la precesión.

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{1-\alpha} - 2\pi \simeq 2\pi\alpha = \frac{6\pi(GM)^2}{c^2 L^2} \quad (9.119)$$





Pero como el semieje mayor es

$$a = \frac{L^2}{GM(1 - e^2)}$$

obtenemos

$$\Delta\phi \simeq \frac{6\pi GM}{ac^2(1 - e^2)}$$

Para Mercurio que corresponde al planeta más cercano al sol y por lo tanto con las correcciones relativistas más fuertes

$$a \approx 5.8 \times 10^{10} \text{ m}, \quad e \approx 0.2, \quad M_{\odot} = 2 \times 10^{30} \text{ kg} \quad (9.120)$$

lo que nos da

$$\Delta\phi = 42.98'' \quad \text{por siglo} \quad (9.121)$$

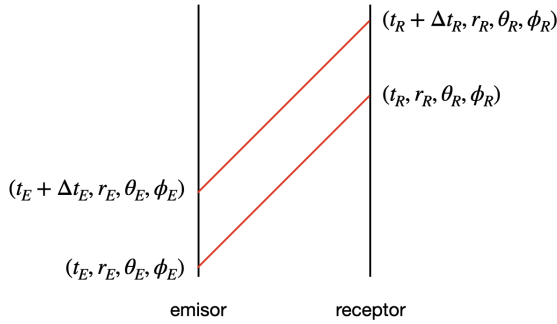
Existen otros efectos que también producen una precesión, como la influencia de otros objetos en el sistema solar, el hecho de que el Sol no es perfectamente esférico, su rotación, etc. El efecto total observado es de

$$\Delta\phi = 574.1'' \pm 0.65'' \quad (9.122)$$

aunque la teoría con la precesión relativista predice

$$\Delta\phi = 575'' \quad (9.123)$$

9.2.7 Corrimiento al rojo gravitacional



Consideramos dos observadores fijos: un emisor E con coordenadas (r_E, θ_E, ϕ_E) y un receptor R con coordenadas (r_R, θ_R, ϕ_R) . El momento de emisión es t_E y el momento de recepción es t_R . Un fotón viaja desde $(t_E, r_E, \theta_E, \phi_E)$ hasta $(t_R, r_R, \theta_R, \phi_R)$ siguiendo una geodésica nula. El emisor (E) emite un segundo fotón desde la misma posición en el instante $t_E + \Delta t_E$, y el receptor (R) lo recibe en su posición fija en $t_R + \Delta t_R$.

Las geodésicas que siguen los fotones son de tipo luz, por lo tanto

$$ds^2 = 0 \quad (9.124)$$

lo que implica

$$c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (9.125)$$

De aquí se deduce

$$c \frac{dt}{d\lambda} = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1/2} \sqrt{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2} \quad (9.126)$$

donde λ es un parámetro afín a lo largo de la geodésica. Entonces, el intervalo temporal entre emisión y recepción es

$$c(t_R - t_E) = \int_{\lambda_E}^{\lambda_R} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1/2} \sqrt{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2} d\lambda \quad (9.127)$$

Esta integral depende solamente del espacio recorrido. Si los dos observadores están fijos, entonces la integral será siempre la misma para todos los fotones, es decir que $t_R - t_E$ es constante. Tenemos el mismo intervalo para el primer o para el segundo fotón

$$t_R^{(1)} - t_E^{(1)} = t_R^{(2)} - t_E^{(2)} \quad (9.128)$$

es decir

$$\Delta t_E = \Delta t_R \quad (9.129)$$

Pero para cada observador el tiempo propio es diferente. Como las coordenadas (r, θ, ϕ) son constantes para cada uno, se tiene

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 = -c^2 d\tau^2 \quad (9.130)$$

es decir

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} dt \quad (9.131)$$

y como r es fijo

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} \Delta t \quad (9.132)$$

Lo que implica

$$\Delta\tau_E = \sqrt{1 - \frac{r_s}{r_E}} \Delta t_E \quad (9.133)$$

$$\Delta\tau_R = \sqrt{1 - \frac{r_s}{r_R}} \Delta t_R \quad (9.134)$$

Y como $\Delta t_E = \Delta t_R$, entonces

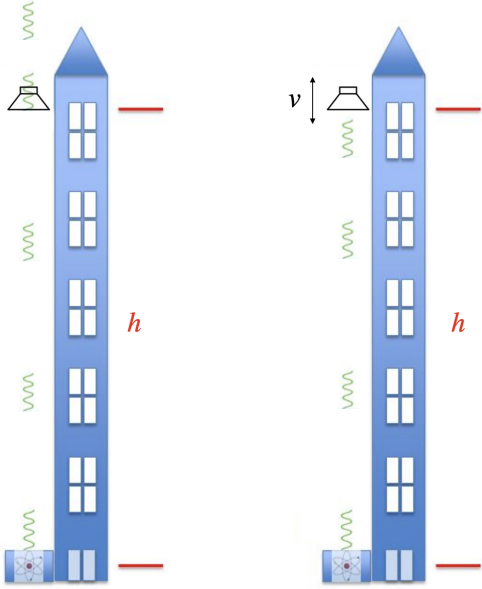
$$\frac{\Delta\tau_R}{\Delta\tau_E} = \sqrt{\frac{1 - \frac{r_s}{r_R}}{1 - \frac{r_s}{r_E}}} \quad (9.135)$$

Podemos imaginar $(\Delta\tau_R, \Delta\tau_E)$ como el tiempo entre dos crestas consecutivas de una onda electromagnética, es decir, el período. Esto implica que

$$\frac{\nu_R}{\nu_E} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2GM}{r_E c^2}}{1 - \frac{2GM}{r_R c^2}}} \quad (9.136)$$

con ν la frecuencia de la onda para cada observador. Si $r_R > r_E$, obtenemos que $\nu_R < \nu_E$ es decir que podemos concluir que el fotón "pierde" energía. Se llama el **corrimiento al rojo gravitacional**. Y el *redshift* gravitacional se define como

$$1 + z = \frac{\nu_E}{\nu_R} \quad (9.137)$$



La primera verificación fue hecha de 1959 a 1965 por Pound, Rebka y Snider. El experimento de Pound-Rebka se hizo en un edificio de Harvard, en la Torre Jefferson, con una altura de aproximadamente $h = 22.5$ m. Se utilizó la *resonancia de Mössbauer* con rayos gamma emitidos por núcleos de ^{57}Fe , lo que permite medir cambios de frecuencia extremadamente pequeños. Un fotón emitido desde lo alto de la torre cae hacia un detector situado en la base: su frecuencia aumenta por el efecto gravitacional. Para compensar el corrimiento gravitacional y permitir la absorción por los núcleos receptores, se aplicó un efecto Doppler inverso desplazando la fuente. Recordando que por

velocidad el efecto Doppler es

$$\frac{\nu_R}{\nu_E} = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \quad (9.138)$$

Para que ambos efectos se anulan, necesitamos

$$\left(\frac{\nu_R}{\nu_E}\right)^2 = \frac{1 - v/c}{1 + v/c} \frac{1 - \frac{2GM}{(R+h)c^2}}{1 - \frac{2GM}{Rc^2}} = 1 \quad (9.139)$$

con R el radio de la Tierra, es decir

$$v = \frac{cGhM}{c^2R(h+R) - GM(h+2R)} \simeq \frac{GM}{cR^2}h \quad (9.140)$$

lo que corresponde para esta torre de altura $h = 22.5$ m, a $v \simeq 7.4 \times 10^{-7}$ m s⁻¹. Han obtenido

$$\frac{\Delta\nu_{\text{exp}}}{\Delta\nu_{\text{teo}}} = 1.05 \pm 0.10 \quad (\text{Pound-Rebka, 1959})$$

$$\frac{\Delta\nu_{\text{exp}}}{\Delta\nu_{\text{teo}}} = 1.00 \pm 0.01 \quad (\text{Pound-Snider, 1964})$$

Actualmente, el efecto del corrimiento al rojo gravitacional se mide con gran precisión utilizando satélites como *Galileo*, en órbitas cercanas al Sol

$$\frac{\Delta\nu_{\text{exp}}}{\Delta\nu_{\text{teo}}} = 1 \pm 0.005 \quad (9.141)$$

En 1972, Häfele-Keating han comparado dos relojes atómicos: uno permanecía sobre la Tierra, y el otro fue transportado en un avión a una altitud de aproximadamente 10⁴ km.

$$\frac{\Delta\nu_{\text{exp}}}{\Delta\nu_{\text{teo}}} = 0.9 \pm 0.1$$

También en 1979, Vessot y Levine utilizaron relojes de máser de hidrógeno a bordo del satélite *Gravity Probe A*. Fue una de las pruebas más precisas hasta esa fecha:

$$\frac{\Delta\nu_{\text{exp}}}{\Delta\nu_{\text{teo}}} = 1 \pm 0.0002$$

¡Nota que los GPS toman en cuenta este efecto!

9.2.8 Efecto Shapiro

El efecto Shapiro se refiere al retraso temporal que experimenta una señal electromagnética al propagarse cerca de un cuerpo masivo, como el Sol. Según la relatividad general, la presencia de masa curva el espacio-tiempo, lo que significa que el transcurso del tiempo varía en diferentes regiones del campo gravitatorio. En particular, en las proximidades de un objeto masivo, el "reloj" local se ralentiza en comparación con el de un observador alejado (por ejemplo, en el infinito). Por ello, una señal que viaja cerca de dicho objeto tarda más en llegar a su destino que si se propagara en un

espacio-tiempo plano. Este retraso, que no es causado por una extensión adicional en la distancia recorrida sino por la dilatación temporal inducida por la gravedad, fue predicho por Irwin Shapiro en 1964 y posteriormente confirmado experimentalmente mediante el análisis de señales de radar reflejadas por planetas.

Sabemos que para fotones (9.46, 9.30)

$$\dot{r}^2 + \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) = \frac{E^2}{c^2} \quad (9.142)$$

$$c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t} = E \quad (9.143)$$

Entonces

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{d\lambda} = \frac{dr}{dt} \dot{t} = \frac{E}{c^2(1 - r_s/r)} \frac{dr}{dt} \quad (9.144)$$

lo que nos da a partir de (9.142)

$$\frac{1}{c^2(1 - r_s/r)^3} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2 c^2}{E^2 r^2} = \frac{1}{1 - r_s/r} \quad (9.145)$$

Para un fotón viajando entre la Tierra y Venus, y pasando a distancia mínima r_0 , donde $\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=r_0} = 0$, se obtiene

$$\frac{L^2 c^2}{E^2 r_0^2} = \frac{1}{1 - r_s/r_0} \quad (9.146)$$

Sustituyendo en (9.145)

$$\frac{dr}{dt} = c \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{r^2} \frac{1 - r_s/r}{1 - r_s/r_0}} \quad (9.147)$$

El tiempo para ir de r_0 a r es:

$$t(r_0, r) = \int_{r_0}^r \frac{1}{c(1 - r_s/r)} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \frac{1 - r_s/r}{1 - r_s/r_0}\right)^{-1/2} dr \quad (9.148)$$

Al primer orden (cuando $r_s \ll r$)

$$t(r_0, r) \simeq \int_{r_0}^r \frac{r}{c\sqrt{r^2 - r_0^2}} \left(1 + \frac{r_s}{r} + \frac{r_s r_0}{2r(r + r_0)}\right) dr \quad (9.149)$$

$$\simeq \frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{c} + \frac{r_s}{c} \ln \left(\frac{r + \sqrt{r^2 - r_0^2}}{r_0}\right) + \frac{r_s}{2c} \sqrt{\frac{r - r_0}{r + r_0}} \quad (9.150)$$

El primer termino es estándar y corresponde al teorema de Pitágoras aunque la parte siguiente corresponde al efecto relativista. El exceso de tiempo comparado con espacio plano es

$$\Delta t = 2 \left[t(r_0, r_{\text{Tierra}}) + t(r_0, r_{\text{Venus}}) - \frac{\sqrt{r_{\text{Tierra}}^2 - r_0^2}}{c} - \frac{\sqrt{r_{\text{Venus}}^2 - r_0^2}}{c} \right] \quad (9.151)$$

El factor 2 corresponde al hecho de que la señal regresa a la Tierra. Pero como $r_{\text{Tierra}} \gg r_0$ y $r_{\text{Venus}} \gg r_0$, obtenemos

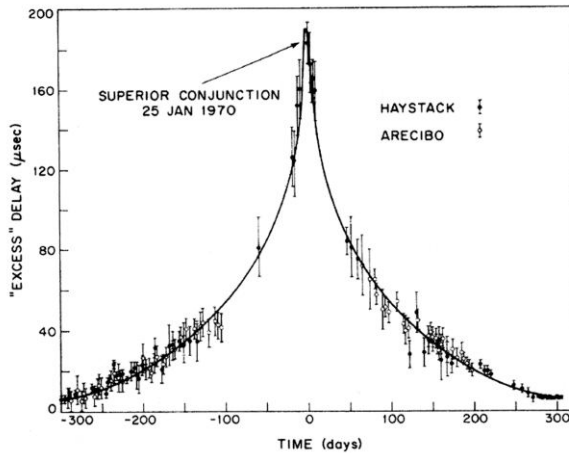
$$\Delta t \simeq \frac{4GM}{c^3} \left[\ln \left(\frac{r_{\text{Tierra}} r_{\text{Venus}}}{r_0^2} \right) + 1 \right] \quad (9.152)$$

Como los relojes en la Tierra miden nuestro tiempo propio y que para nosotros la Tierra esta fija

$$\Delta \tau = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_{\text{Tierra}}} \right) \Delta t \simeq \Delta t \quad (9.153)$$

ya que $r_{\text{Tierra}} \gg 2GM/c^2$. En conclusión,

$$\Delta \tau \simeq \frac{4GM}{c^3} \left[\ln \left(\frac{r_{\text{Tierra}} r_{\text{Venus}}}{r_0^2} \right) + 1 \right] \quad (9.154)$$



El efecto es máximo cuando r_0 es mínimo ($r_0 = R_{\odot}$), es decir, alineación Tierra-Sol-Venus. En ese caso

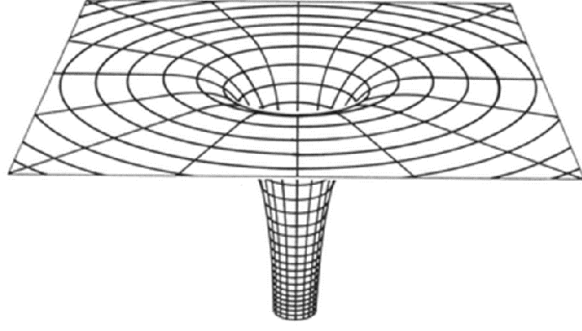
$$\Delta \tau \simeq 220 \mu\text{s} \quad (9.155)$$

Fue una predicción de Irwin Shapiro en 1964 (una predicción que Einstein no conocía).

Actualmente, se mide utilizando sondas en otros planetas, como la misión Viking en Marte. También se utiliza el eco-radar emitido desde la Tierra y reflejado por otros planetas, aunque este método es relativamente impreciso.

9.3 Estructura geométrica del espacio de Schwarzschild

El espacio de Schwarzschild tiene una cierta estructura geométrica. Usualmente se representa de la siguiente manera.



Como no podemos representar las 4 dimensiones, se considera una sección del espacio total fijando $t = \text{constante}$ y $\theta = \pi/2$. Entonces, la métrica se reduce a

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + r^2 d\phi^2, \quad (9.156)$$

la cual representa una superficie 2D en coordenadas (r, ϕ) . Por lo tanto, podemos representar esta superficie en nuestro espacio euclidiano 3D (en coordenadas cilíndricas), cuya métrica es

$$ds^2 = dr^2 + dz^2 + r^2 d\phi^2 \quad (9.157)$$

En este espacio, la superficie se describe mediante una curva $z \equiv z(r)$, es decir, $dz = z'(r) dr$. Así, la métrica inducida en la superficie es

$$ds^2 = \left[1 + (z'(r))^2\right] dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (9.158)$$

Comparando con Schwarzschild, obtenemos

$$1 + z'(r)^2 = \frac{1}{1 - r_s/r} \quad (9.159)$$

es decir

$$z'(r) = \pm \sqrt{\frac{r_s}{r - r_s}} \quad (9.160)$$

lo que nos da

$$z(r) = \pm 2\sqrt{r_s} \sqrt{r - r_s} \quad (9.161)$$

Es la *inmersión* de una sección del espacio-tiempo de Schwarzschild en el espacio euclidiano.



9.3.1 Singularidad

Aparecen en la métrica dos divergencias

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + r^2 d\Omega^2 \quad (9.162)$$

una en $r = 0$ y otra en $r = r_s$. Para saber si son singularidades reales o simplemente un problema de coordenadas (es decir, que desaparecen al cambiar de sistema de coordenadas), debemos calcular un escalar. Un escalar es una cantidad invariante bajo cambios de coordenadas. Si un escalar diverge en un sistema, entonces lo hace en todos, lo que indica una singularidad física. Tenemos primero el escalar de Ricci

$$R = 0 \quad (\text{para la solución de Schwarzschild}) \quad (9.163)$$

por lo tanto, no aporta información sobre posibles singularidades. A partir del tensor de Ricci podemos construir el escalar $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$, pero como $R_{\mu\nu} = 0$, entonces

$$R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = 0 \quad (9.164)$$

Finalmente, usamos el tensor de Riemann para construir el **escalar de Kretschmann**

$$K = R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (9.165)$$

Los componentes no nulos del tensor de Riemann en la métrica de Schwarzschild son

$$R_{0101} = -\frac{r_s}{r^3}, \quad (9.166)$$

$$R_{0202} = \frac{r_s(r - r_s)}{2r}, \quad (9.167)$$

$$R_{0303} = R_{0202} \sin^2 \theta, \quad (9.168)$$

$$R_{1212} = -\frac{r_s}{2(r - r_s)}, \quad (9.169)$$

$$R_{1313} = R_{1212} \sin^2 \theta, \quad (9.170)$$

$$R_{2323} = r_s r \sin^2 \theta. \quad (9.171)$$

De estos componentes se obtiene

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{12r_s^2}{r^6}. \quad (9.172)$$

Este escalar diverge en $r = 0$, lo cual indica una **singularidad física real**. En cambio, es finito en $r = r_s$, lo que implica que esa divergencia es solo una **singularidad de coordenadas**.

Este sistema de coordenadas (t, r, θ, ϕ) describe solamente la región del espacio-tiempo donde $r > r_s$. Esto se debe a que está adaptado a un observador estático, que no puede existir dentro del horizonte. Sin embargo, para un observador que cae libremente hacia el agujero negro, vimos que alcanza $r = 0$ en un tiempo propio finito (9.56). Este tipo de observador no debería experimentar ninguna singularidad al cruzar $r = r_s$. Por lo tanto, es más adecuado usar un sistema de coordenadas adaptado al movimiento del observador en caída libre.

9.3.2 Coordenadas de caída libre (Gullstrand–Painlevé)

Elegimos entonces las coordenadas (τ, r, θ, ϕ) , donde τ representa el *tiempo propio* del observador. Ya vimos que (9.61)

$$ct = \frac{2}{3} \left[\sqrt{\frac{r_0^3}{r_s}} - \sqrt{\frac{r^3}{r_s}} \right] + 2\sqrt{r_s}(\sqrt{r_0} - \sqrt{r}) + r_s \ln \left[\frac{(\sqrt{r} + \sqrt{r_s})(\sqrt{r_0} - \sqrt{r_s})}{(\sqrt{r} - \sqrt{r_s})(\sqrt{r_0} + \sqrt{r_s})} \right] \quad (9.173)$$

y (9.55)

$$c\tau = \frac{2}{3} \left[\sqrt{\frac{r_0^3}{r_s}} - \sqrt{\frac{r^3}{r_s}} \right] \quad (9.174)$$

es decir

$$ct = c\tau + 2\sqrt{r_s}(\sqrt{r_0} - \sqrt{r}) + r_s \ln \left[\frac{(\sqrt{r} + \sqrt{r_s})(\sqrt{r_0} - \sqrt{r_s})}{(\sqrt{r} - \sqrt{r_s})(\sqrt{r_0} + \sqrt{r_s})} \right] \quad (9.175)$$

Derivando

$$cdt = cd\tau - \sqrt{\frac{r_s}{r}}dr + \frac{r_s}{2\sqrt{r}} \left(\frac{1}{\sqrt{r} + \sqrt{r_s}} - \frac{1}{\sqrt{r} - \sqrt{r_s}} \right) dr \quad (9.176)$$

$$= cd\tau - \frac{\sqrt{r}\sqrt{r_s}}{r - r_s}dr \quad (9.177)$$

Entonces la métrica (9.162) se transforma en

$$\begin{aligned}
ds^2 &= -c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + r^2 d\Omega^2 \\
&= - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left[c^2 d\tau^2 + \frac{rr_s}{(r - r_s)^2} dr^2 - 2c\sqrt{r_s} \frac{\sqrt{r}}{r - r_s} d\tau dr \right] + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + r^2 d\Omega^2 \\
&= -c^2 d\tau^2 + \left[dr + \sqrt{\frac{r_s}{r}} c d\tau \right]^2 + r^2 d\Omega^2
\end{aligned} \tag{9.178}$$

Son las coordenadas de Gullstrand–Painlevé. Esta forma es regular en $r = r_s$ y para cualquier $r > 0$, y describe el espacio desde el punto de vista de un observador en caída libre. Por lo tanto, la singularidad en $r = r_s$ era un problema de coordenadas. Para $\tau = \text{constante}$, la métrica se reduce a

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \tag{9.179}$$

lo cual corresponde a la métrica del espacio euclídeo tridimensional. Esto es perfectamente coherente, ya que estamos utilizando un sistema de coordenadas adaptado a un observador en caída libre, para quien el espacio instantáneo a tiempo propio constante es localmente plano.

Si este observador emite un rayo de luz radial ($d\theta = d\phi = 0$), tenemos desde $ds^2 = 0$

$$-c^2 d\tau^2 + \left[dr + \sqrt{\frac{r_s}{r}} c d\tau \right]^2 = 0 \tag{9.180}$$

es decir

$$\frac{dr}{d\tau} = c \left[\pm 1 - \sqrt{\frac{r_s}{r}} \right] \tag{9.181}$$

Observamos que cuando $r > r_s$, tenemos

$$r'_+ = c \left(1 - \sqrt{\frac{r_s}{r}} \right) > 0, \quad \text{es decir un rayo de luz saliente} \tag{9.182}$$

$$r'_- = -c \left(1 + \sqrt{\frac{r_s}{r}} \right) < 0, \quad \text{es decir un rayo de luz entrante} \tag{9.183}$$

es decir la luz puede escapar hacia el infinito o caer hacia $r = 0$. Pero cuando $r < r_s$, ambos

$$r'_+ < 0, \quad r'_- < 0 \tag{9.184}$$

Los dos rayos de luz se dirigen hacia el centro. No pueden ir al infinito. En conclusión, $r = r_s$ no es una singularidad física, pero separa dos regiones. Desde la región $r < r_s$ nada, hasta la luz, puede ir al infinito. Es un **horizonte de eventos**.

La solución de Schwarzschild fue encontrada directamente en estas coordenadas por Painlevé en 1921 y luego por Gullstrand (quien la publicó antes que Painlevé). Ambos usaron esta forma de la métrica para argumentar que la solución original de Schwarzschild no era física, ya que aparentemente existían varias soluciones distintas para un mismo problema físico. Einstein, por su parte, respondió correctamente que lo importante no es el sistema de coordenadas en sí, sino los observables físicos que se derivan de la métrica. A pesar de ello, en otra discusión, Einstein rechazó explícitamente la métrica de Painlevé–Gullstrand porque contiene un término cruzado $dt dr$, lo que, según él, no era compatible con la simetría esférica del problema. Este episodio muestra claramente la confusión que reinaba en la época sobre la interpretación geométrica del espacio-tiempo y el papel de los sistemas de coordenadas. Aún se estaba aprendiendo a distinguir entre singularidades reales y artefactos del sistema de referencia.

9.3.3 Coordenadas de Lemaître

Las coordenadas de Gullstrand–Painlevé no son diagonales pero se puede obtener una métrica diagonal usando (9.175)

$$r = \left[\frac{3}{2} c \sqrt{r_s} (\tau_0 - \tau) \right]^{2/3} \quad (9.185)$$

Una manera de obtener nuevas coordenadas, es promover una constante de integración (τ_0) a una nueva variable. Hacemos el cambio

$$r = \left[\frac{3}{2} c \sqrt{r_s} \left(\frac{\rho}{c} - \tau \right) \right]^{2/3} \quad (9.186)$$

es decir

$$dr = -\sqrt{\frac{r_s}{r}} (c d\tau - d\rho) \quad (9.187)$$

Entonces

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 + \left(dr + \sqrt{\frac{r_s}{r}} c d\tau \right)^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (9.188)$$

$$= -c^2 d\tau^2 + \frac{r_s}{\left[\frac{3}{2} c \sqrt{r_s} \left(\frac{\rho}{c} - \tau \right) \right]^{2/3}} d\rho^2 + \left[\frac{3}{2} c \sqrt{r_s} \left(\frac{\rho}{c} - \tau \right) \right]^{4/3} d\Omega^2 \quad (9.189)$$

La métrica es diagonal pero depende del tiempo. Podemos ver que es regular en $r = r_s$, es decir en $\left[\frac{3}{2}c\sqrt{r_s}\left(\frac{\rho}{c} - \tau\right)\right]^{2/3} = r_s$, no hay singularidad allí.

Fue encontrada por Lemaître en el año 1933 y aclaro por primera vez que r_s no era una singularidad.

9.3.4 Coordenadas de Eddington-Finkelstein

Para mejor entender la estructura del espacio-tiempo, es mejor ocupar un sistema de coordenadas adaptado a la luz. Son las coordenadas de Eddington-Finkelstein. Aunque parecen haber inspirado la idea, ninguno de los dos escribió explícitamente estas coordenadas ni la métrica en estas coordenadas. Roger Penrose parece haber sido el primero en escribir esta forma, pero la atribuye a un artículo de Finkelstein y, en su ensayo para el Premio Adams ese mismo año, tanto a Eddington como a Finkelstein. De manera más influyente, Misner, Thorne y Wheeler, en su libro *Gravitation*, se refieren a estas coordenadas nulas con ese nombre.

Partimos de la métrica

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - r_s/r} + r^2 d\Omega^2 \quad (9.190)$$

$$= \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left[-c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{(1 - r_s/r)^2}\right] + r^2 d\Omega^2 \quad (9.191)$$

Definimos una nueva coordenada radial, conocida como la coordenada de Regge-Wheeler o coordenada tortuga

$$dr_* = \frac{dr}{1 - r_s/r} \quad (9.192)$$

es decir

$$r_* = r + r_s \ln \left(\frac{r}{r_s} - 1\right) \quad (9.193)$$

Cuando $r \rightarrow r_s$, la coordenada $r_* \rightarrow -\infty$ es decir que nunca llegamos al horizonte, como una cierta tortuga en la historia de Zenón de Elea. Entonces

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) [-c^2 dt^2 + dr_*^2] + r^2 d\Omega^2 \quad (9.194)$$

Para un rayo de luz ($ds^2 = 0$) radial ($d\theta = d\phi = 0$), tenemos $c^2 dt^2 = dr_*^2$ es decir

$$ct = \pm r_* + \text{constante} \quad (9.195)$$

Tenemos la misma estructura de cono de luz que en el espacio plano

$ct - r_* = \text{constante}$, representa rayos de luz saliente

$ct + r_* = \text{constante}$, representa rayos de luz entrante

Como en el caso de las coordenadas de Lemaître, vamos a promover las constantes de integración a nuevas variables

$u = ct - r_*$, un rayo de luz saliente tiene, $u = \text{constante}$

$v = ct + r_*$, un rayo de luz entrante tiene, $v = \text{constante}$

Podemos entonces definir los siguientes sistemas de coordenadas:

- (u, r, θ, ϕ) : coordenadas de Eddington–Finkelstein **salientes** (también llamadas retardadas)
- (v, r, θ, ϕ) : coordenadas de Eddington–Finkelstein **entrantes** (también llamadas avanzadas)
- (u, v, θ, ϕ) : coordenadas de **Kruskal–Szekeres**

En las coordenadas de Eddington–Finkelstein

$$\text{Entrantes: } ds^2 = - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dv^2 + 2 dv dr + r^2 d\Omega^2 \quad (9.196)$$

$$\text{Salientes: } ds^2 = - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) du^2 - 2 du dr + r^2 d\Omega^2 \quad (9.197)$$

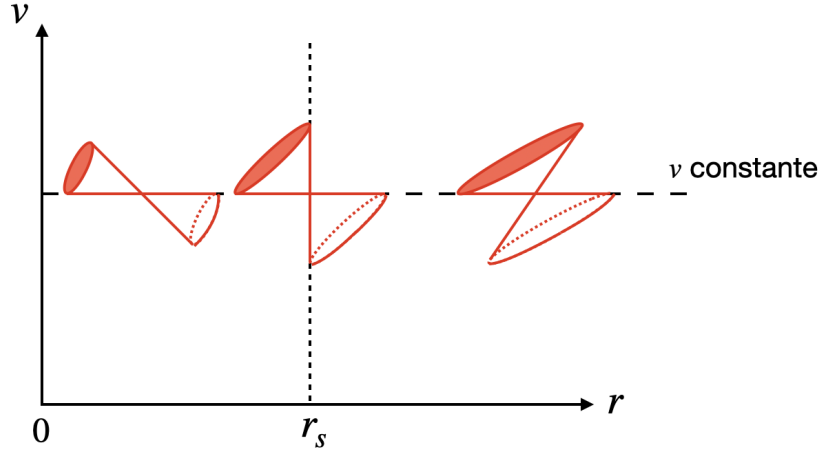
Aunque aparece $1 - r_s/r$, la métrica no es degenerada porque el determinante es distinto de cero. Podemos de nuevo estudiar el cono de luz del espacio pero ahora con un sistema de coordenadas que es válido para todo el espacio. Considerando las coordenadas de Eddington–Finkelstein **entrantes** y suponiendo $d\theta = d\phi = 0$, tenemos que para un rayo de luz (lo que define el cono de luz)

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dv^2 + 2 dv dr = 0 \quad (9.198)$$

es decir

$$dv = 0 \quad (9.199)$$

$$\frac{dv}{dr} = \frac{2}{1 - \frac{r_s}{r}} \quad (9.200)$$



Una vez cruzado el horizonte, el único futuro posible para cualquier observador o rayo de luz es $r = 0$, la *singularidad*.

El agujero negro atrapa el futuro de los observadores

No es posible escapar hacia regiones con $r > r_s$ una vez dentro del horizonte ya que corresponde al pasado de este observador. Salir del agujero negro significaría ir hacia el pasado. El radio $r = r_s$ define una **superficie nula**, llamada *horizonte de eventos*, que separa causalmente el interior del exterior. Puede demostrarse que en esta región el vector de Killing ∂_t se vuelve de tipo *espacio* cuando $r < r_s$.

9.3.5 Coordenadas de Kruskal–Szekeres

En estas coordenadas, tenemos

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) du dv + r^2 d\Omega^2 \quad (9.201)$$

Pero en estas coordenadas, el horizonte, $r = r_s$ está en $r_* = -\infty$ es decir en $u = \infty$ o $v = -\infty$ ya que $u = ct - r_*$ y $v = ct + r_*$. Para que el horizonte se encuentre a un valor de coordenada finito, usamos

$$U = -e^{-u/2r_s}, \quad V = e^{v/2r_s} \quad (9.202)$$

es decir que el horizonte se encontrará en $U = 0$ o $V = 0$. Tenemos

$$1 - \frac{r_s}{r} = \frac{r_s}{r} \left(\frac{r}{r_s} - 1 \right) = \frac{r_s}{r} e^{-r/r_s} e^{\frac{v-u}{2r_s}} \quad (9.203)$$

De hecho

$$\frac{v-u}{2r_s} = \frac{r_*}{r_s} = \frac{r}{r_s} + \ln \left(\frac{r}{r_s} - 1 \right) \quad (9.204)$$

entonces la métrica en coordenadas de Kruskal–Szekeres toma la forma

$$ds^2 = -\frac{r_s}{r} e^{-r/r_s} e^{-u/2r_s} du e^{v/2r_s} dv + r^2 d\Omega^2 \quad (9.205)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{r_s}{r} e^{-r/r_s} (2r_s dU) (2r_s dV) + r^2 d\Omega^2 \\ &= -\frac{4r_s^3}{r} e^{-r/r_s} dU dV + r^2 d\Omega^2 \end{aligned} \quad (9.206)$$

Para diagonalizar esta métrica, definimos

$$U = cT - X, \quad V = cT + X \quad (9.207)$$

lo que nos da

$$ds^2 = \frac{4r_s^3}{r} e^{-r/r_s} \left(-c^2 dT^2 + dX^2 \right) + r^2 d\Omega^2 \quad (9.208)$$

con

$$X = \frac{V-U}{2} = \frac{e^{v/2r_s} + e^{-u/2r_s}}{2} = \frac{e^{\frac{ct+r_*}{2r_s}} + e^{-\frac{ct-r_*}{2r_s}}}{2} = e^{r_*/2r_s} \cosh \left(\frac{ct}{2r_s} \right) \quad (9.209)$$

$$= \sqrt{\frac{r}{r_s} - 1} e^{r/2r_s} \cosh \left(\frac{ct}{2r_s} \right) \quad (9.210)$$

De forma similar

$$cT = \frac{V+U}{2} = e^{r_*/2r_s} \sinh \left(\frac{ct}{2r_s} \right) = \sqrt{\frac{r}{r_s} - 1} e^{r/2r_s} \sinh \left(\frac{ct}{2r_s} \right) \quad (9.211)$$

En estas coordenadas, $r = \text{constante}$, corresponde a hipérbolas

$$X^2 - c^2 T^2 = \text{constante} \quad (9.212)$$

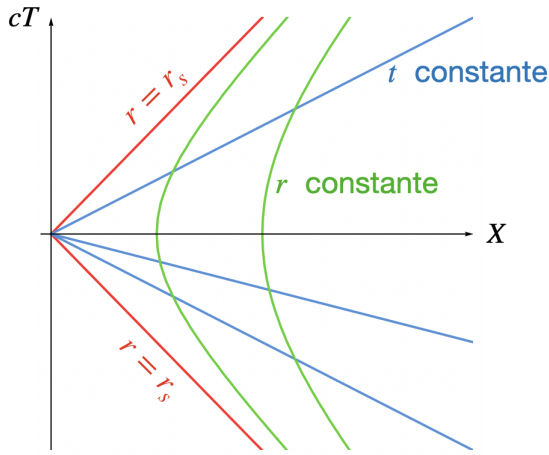
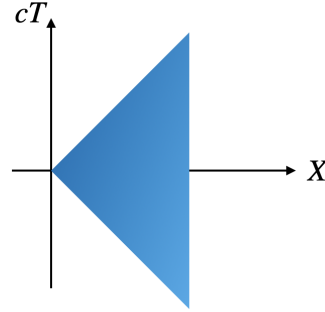
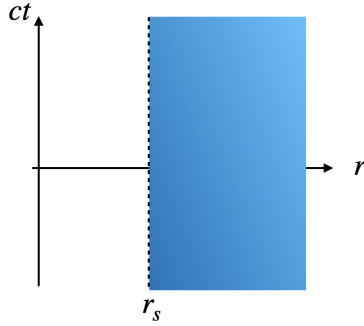
El espacio correspondiente a $r > r_s$ se transforma en las coordenadas de Kruskal–Szekeres como

$$-\infty < U < 0 \quad \text{y} \quad 0 < V < \infty \quad (9.213)$$

De manera equivalente, en las coordenadas simétricas (T, X) , esta región corresponde a

$$X > 0 \quad \text{y} \quad X^2 - c^2 T^2 > 0 \quad (9.214)$$

es decir, el exterior del agujero negro se encuentra en un cuarto del espacio en las coordenadas de Kruskal.



Las líneas con $r = \text{constante}$ se representan como hipérbolas

$$X^2 - c^2 T^2 = \text{constante} > 0$$

Las líneas con $t = \text{constante}$ se representan como rectas que pasan por el origen

$$\frac{X}{T} = \text{constante}$$

En conclusión, hemos definido en el plano (X, T) la región exterior del agujero negro, es decir, aquella para la cual $r > r_s$.

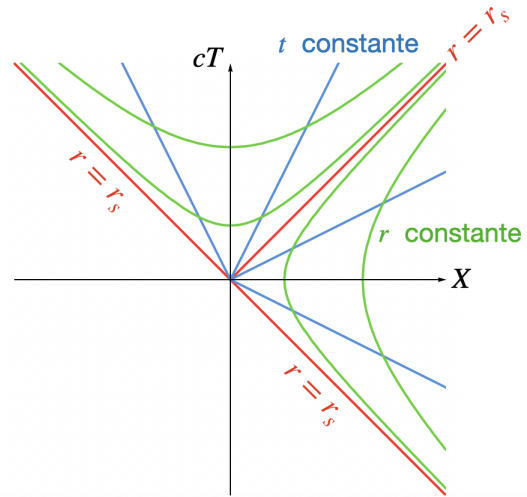
Para describir la parte interior del agujero negro, necesitamos un cambio de variables similar al utilizado anteriormente. En este caso, definimos

$$cT = \sqrt{1 - \frac{r}{r_s}} e^{r/2r_s} \cosh\left(\frac{ct}{2r_s}\right)$$

$$X = \sqrt{1 - \frac{r}{r_s}} e^{r/2r_s} \sinh\left(\frac{ct}{2r_s}\right)$$

En esta región, las curvas de $r = \text{constante}$ están dadas por

$$c^2 T^2 - X^2 = \text{constante} > 0$$



es decir, son parábolas. La singularidad en $r = 0$ se encuentra en

$$c^2T^2 - X^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad cT = \pm\sqrt{1 + X^2}, \quad (9.215)$$

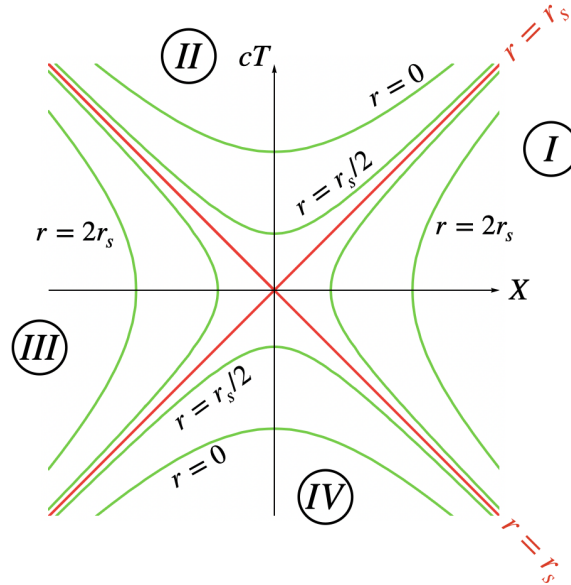
lo que representa dos soluciones simétricas. De manera similar, para cada valor de $r = \text{constante}$, existen dos curvas en el espacio de Kruskal–Szekeres. Todo el agujero negro se encuentra en la mitad del espacio en las coordenadas (T, X) . No hay ninguna razón para eliminar ninguna de las regiones; la única condición física es que $r \geq 0$.

(I) representa la parte exterior de la solución de Schwarzschild.

(II) representa la parte interior del agujero negro.

(III) representa la parte exterior de un nuevo espacio (un universo paralelo).

(IV) representa la parte interior de un nuevo espacio (universo paralelo).



La unión $(I) \cup (II)$ forma el agujero negro, mientras que $(III) \cup (IV)$ representa un **agujero blanco**. La unión total $(I) \cup (II) \cup (III) \cup (IV)$ es la **extensión máxima** de la solución de Schwarzschild. Por ejemplo:

- Una partícula que cae desde (I) hacia (II) corresponde a un objeto cayendo dentro del agujero negro.

- Una partícula que pasa de (IV) a (I) corresponde a un objeto saliendo de un agujero blanco.

El agujero blanco es el reverso temporal del agujero negro: todo puede salir de él, pero nada puede entrar.

9.3.6 Diagrama de Penrose

Una manera de visualizar globalmente este espacio es **compactificarlo**, es decir, transformar el espacio infinito en una región finita. Para ello, se hace el cambio

$$U = \tan \xi, \quad V = \tan \eta, \quad (9.216)$$

lo que transforma $\pm\infty$ en $\pm\frac{\pi}{2}$. Esto permite representar todo el espacio de manera finita en los llamados **diagramas de Penrose**. Recordando que

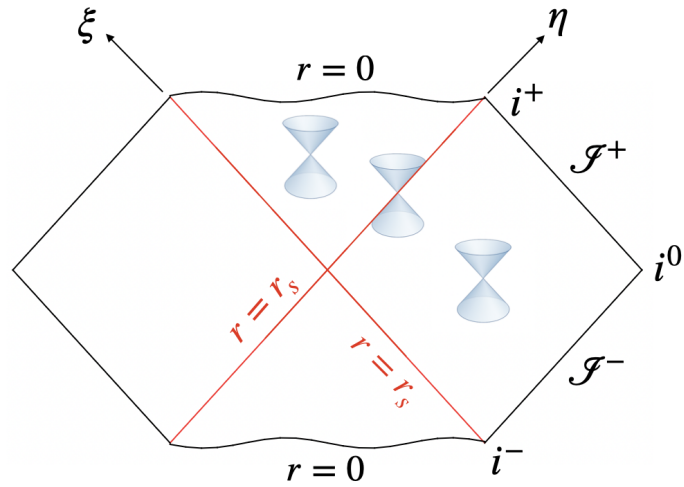
$$UV = \left(1 - \frac{r}{r_s}\right) e^{r/r_s} \quad (9.217)$$

obtenemos que cuando:

$$r = r_s \Rightarrow UV = 0 \Rightarrow \xi = 0 \text{ o } \eta = 0 \quad (9.218)$$

$$r = 0 \Rightarrow UV = 1 \Rightarrow \xi + \eta = \frac{\pi}{2} \quad (9.219)$$

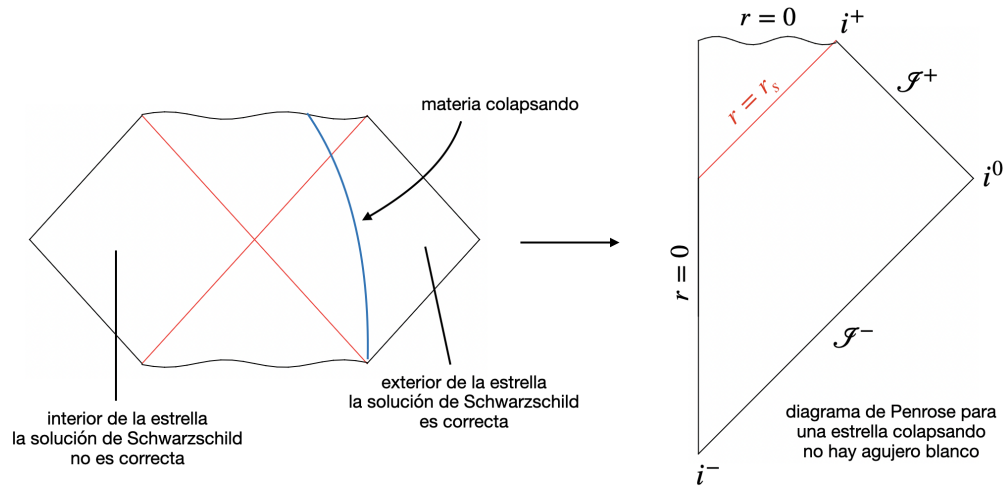
$$r = \infty \Rightarrow UV = -\infty \Rightarrow \xi = \pm\frac{\pi}{2} \text{ o } \eta = \pm\frac{\pi}{2} \quad (9.220)$$



Los puntos notables son

- i_+ : infinito futuro
- i_- : infinito pasado
- i_0 : infinito espacial
- $\mathcal{I}^+$: infinito nulo futuro
- $\mathcal{I}^-$: infinito nulo pasado

Este espacio no representa necesariamente algo físico, de hecho el espacio real proviene del colapso de una estrella. El diagrama de Penrose para una estrella colapsando no contiene agujero blanco.



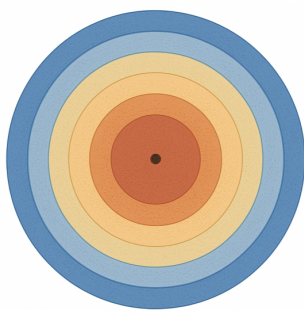
CAPÍTULO 5

Cosmología

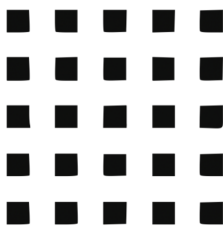
10. Espacio homogéneo e isótropo

Una de las ideas centrales en cosmología es el *principio cosmológico*. Es decir, que a escalas suficientemente grandes, el universo es **isótropo y homogéneo**.

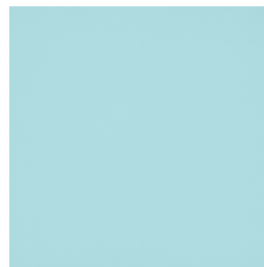
- **Universo isótropo pero no homogéneo:** el universo es isótropo sólo para el observador central.
- **Universo homogéneo pero no isótropo:** es homogéneo para cualquier observador en un nodo.
- **Universo homogéneo e isótropo:** estas condiciones deben cumplirse para cualquier observador, en cualquier punto y en cualquier época.



el universo es isótropo
para el observador central



el universo es homogéneo
en este caso es una invarianza discreta
y no continua



el universo es homogéneo
e isótropo

Por lo tanto, necesitamos construir un espacio que sea homogéneo e isótropo en cualquier momento t . Podemos de nuevo ocupar la ecuación de Killing con las simetrías que tenemos. Pero ahora el problema es suficientemente fácil para discutirlo de otra manera. La métrica más general compatible con estas simetrías es:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) ds_3^2 \quad (10.1)$$

donde $a(t)$ es el *factor de escala*, y ds_3^2 es la métrica espacial de un espacio homogéneo e isótropo. Supongamos que el factor dependiera también de x , es decir $a(t, x)$. Esto implicaría una dirección privilegiada, contradiciendo las simetrías. Por lo tanto, la forma escrita arriba es la más general compatible con el principio cosmológico. El término ds_3^2 describe un espacio con 6 simetrías (3 rotaciones y 3 traslaciones): un espacio *maximalmente simétrico* en 3D. Como en 4D los espacios maximalmente simétricos son Minkowski, dS y AdS, en 3D también tenemos tres posibilidades:

10.1 Espacio plano: $\mathbb{R}^3$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (10.2)$$

En coordenadas esféricas:

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad (10.3)$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi \quad (10.4)$$

$$z = r \cos \theta \quad (10.5)$$

obtenemos

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (10.6)$$

10.2 Espacio con curvatura positiva: 3-esfera

El segundo espacio se puede construir como la 3-esfera en 4 dimensiones. Es decir como subvariedad en $\mathbb{R}^4$:

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = R^2 \quad (10.7)$$

La esfera tiene una curvatura positiva, es decir que líneas paralelas convergen. Podemos definir $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ es decir que (10.7) se transforma en $w^2 = R^2 - r^2$. Pero, sabemos que para la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, la métrica es (10.6) y como

$$dw = -\frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr \quad (10.8)$$

La métrica inducida es

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2 \quad (10.9)$$

$$= dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + \frac{r^2}{R^2 - r^2} dr^2 \quad (10.10)$$

$$= \frac{R^2}{R^2 - r^2} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (10.11)$$

También se puede parametrizar como

$$x = R \sin \chi \sin \theta \cos \phi \quad (10.12)$$

$$y = R \sin \chi \sin \theta \sin \phi \quad (10.13)$$

$$z = R \sin \chi \cos \theta \quad (10.14)$$

$$w = R \cos \chi \quad (10.15)$$

y por lo tanto, con una métrica

$$ds^2 = R^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] \quad (10.16)$$

10.3 Espacio con curvatura negativa: hiperboloide

El último espacio es la hipérboloide $\mathbb{H}^3$, incluida en $\mathbb{R}^{1,3}$ (espacio de Minkowski) que podemos definir como superficie con ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 - w^2 = -R^2 \quad (10.17)$$

Este espacio tiene curvatura negativa, es decir que las líneas paralelas divergen. De nuevo, consideramos $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ es decir $w^2 = R^2 + r^2$. Por lo tanto, la métrica inducida es

$$ds^2 = -dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (10.18)$$

$$= -\frac{r^2 dr^2}{R^2 + r^2} + dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (10.19)$$

$$= \frac{R^2}{R^2 + r^2} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (10.20)$$

También se puede hacer el cambio $r = R \sinh x$, lo que lleva a

$$ds^2 = R^2 [d\chi^2 + \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] \quad (10.21)$$

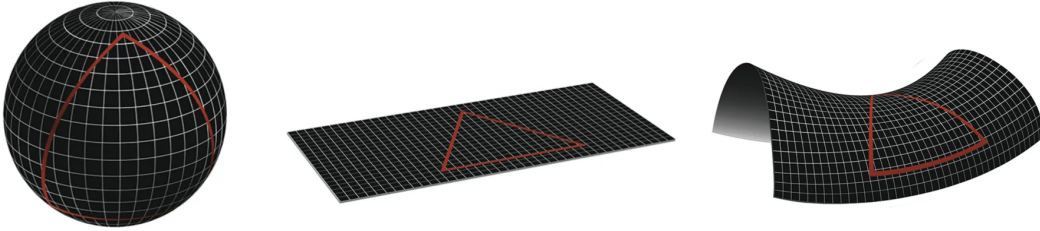
10.4 Métrica FLRW en coordenadas esféricas

En conclusión, en coordenadas esféricas podemos unificar las tres geometrías con

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - k \frac{r^2}{R^2}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (10.22)$$

donde

$$k = \begin{cases} +1 & \text{esférico} \\ 0 & \text{plano} \\ -1 & \text{hiperbólico} \end{cases}$$



La métrica completa en coordenadas (t, r, θ, ϕ) es

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - k \frac{r^2}{R^2}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (10.23)$$

Redefiniendo la coordenada r como $\bar{r} = \frac{r}{R}$, tenemos

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + R^2 a^2(t) \left[\frac{d\bar{r}^2}{1 - k \bar{r}^2} + \bar{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (10.24)$$

Redefiniendo además el factor de escala $\bar{a}(t) = Ra(t)$, llegamos a

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + \bar{a}^2(t) \left[\frac{d\bar{r}^2}{1 - k \bar{r}^2} + \bar{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (10.25)$$

Y finalmente, omitiendo las barras, tenemos

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (10.26)$$

Esta es la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). En este espacio, se produce un corrimiento al rojo (redshift) debido al factor de escala $a(t)$.

Lo podemos escribir también en coordenadas (t, χ, θ, ϕ)

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[d\chi^2 + S_k^2(\chi) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (10.27)$$

donde

$$S_k(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } k = +1 \\ x & \text{si } k = 0 \\ \sinh x & \text{si } k = -1 \end{cases}$$

10.5 Corrimiento al rojo en el espacio FLRW

Imaginamos que estamos en $r = 0$ y que recibimos a tiempo t_0 un fotón emitido desde r_1 en el tiempo t_1 . Como el fotón sigue una geodésica nula

$$ds^2 = 0 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \frac{dr^2}{1 - kr^2} \quad (10.28)$$

obtenemos

$$c \frac{dt}{a(t)} = - \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (10.29)$$

el signo significa que el fotón viene hacia nosotros, es decir cuando t aumenta r decrece

$$c \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = - \int_{r_1}^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (10.30)$$

Cuando se emite un segundo fotón en el tiempo $t_1 + \delta t_1$ y se recibe en $t_0 + \delta t_0$, tenemos

$$c \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (10.31)$$

La parte derecha no cambia ya que la fuente se encuentra en la misma posición r_1 aunque la distancia física a nosotros a cambiado. La diferencia entre (10.30,10.31) es

$$\int_{t_0 + \delta t_0}^{t_1 + \delta t_1} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{a(t)} = 0 \quad (10.32)$$

lo que implica

$$\frac{\delta t_1}{a(t_1)} = \frac{\delta t_0}{a(t_0)} \quad (10.33)$$

Sabemos que para una onda electromagnética, dos crestas están separadas por

$$\delta t_1 = \frac{\lambda_e}{c}, \quad \delta t_0 = \frac{\lambda_r}{c} \quad (10.34)$$

con λ_e la longitud de onda emitida y λ_r la longitud de onda recibida. Tenemos

$$\frac{\lambda_e}{a(t_1)} = \frac{\lambda_r}{a(t_0)} \quad (10.35)$$

la longitud de onda cambia, porque el factor de escala cambia

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} \quad (10.36)$$

Se define el redshift como

$$z = \frac{\lambda_r - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} - 1 \quad (10.37)$$

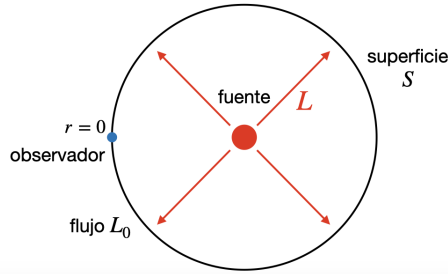
Usualmente se normaliza $a(t_0) = 1$, entonces

$$z = \frac{1}{a(t)} - 1 \quad (10.38)$$

o

$$1 + z = \frac{1}{a(t)} \quad (10.39)$$

10.6 Distancia luminosidad



En cosmología, para medir distancias y compararlas con nuestro modelo, necesitamos definir lo que se llama la **distancia de luminosidad**. Consideramos una fuente (por ejemplo, una estrella) que emite una luminosidad intrínseca L . El flujo observado (es decir, la luminosidad por unidad de superficie) es

$$F = \frac{L}{4\pi d_L^2}$$

donde d_L es la distancia de luminosidad. En un espacio plano sin expansión, d_L coincide con la distancia estándar euclídea. Imaginamos que esta fuente con luminosidad L se encuentra en la posición r y el observador en $r = 0$. La energía emitida durante un intervalo de tiempo Δt_e es ΔE_e , mientras que para el observador los parámetros son Δt_r y ΔE_r . La luminosidad recibidas e emitidas son

$$L_r = \frac{\Delta E_r}{\Delta t_r}, \quad L_e = \frac{\Delta E_e}{\Delta t_e} \quad (10.40)$$

Pero sabemos que

$$1 + z = \frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \frac{\nu_e}{\nu_r} = \frac{\Delta t_r}{\Delta t_e} = \frac{\Delta E_e}{\Delta E_r} \quad (10.41)$$

Entonces

$$L_e = L_r(1 + z)^2 \quad (10.42)$$

Es decir, si hay expansión del universo, se cumple $L_e > L_r$, lo cual significa que recibimos menos luz.

Sabemos que el flujo también se puede definir de manera intrínseca como:

$$F = \frac{L_e}{4\pi d_L^2} \quad (10.43)$$

pero para el observador, el flujo corresponde a la luminosidad recibida dividida por la superficie

$$F = \frac{L_r}{S} \quad (10.44)$$

La superficie total se define a partir de la métrica, más exactamente de la parte angular

$$a^2(t)S_k^2(\chi) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (10.45)$$

Tenemos

$$S = a^2(t)S_k^2(\chi)4\pi \quad (10.46)$$

pero como miramos esta superficie hoy, tenemos $a(t) = 1$, es decir

$$S = S_k^2(\chi)4\pi \quad (10.47)$$

Por ejemplo, para un universo plano, $S_k(\chi) = \chi$ es decir $S = 4\pi\chi^2$.

Entonces

$$\frac{L_e}{4\pi d_L^2} = \frac{L_r}{S} \quad (10.48)$$

lo que implica, usando (10.42,10.47)

$$d_L^2 = \frac{L_e}{L_r} \frac{S}{4\pi} = (1 + z)^2 S_k^2(\chi) \quad (10.49)$$

Es decir

$$d_L = (1 + z) S_k(\chi) \quad (10.50)$$

Además, sabemos que la métrica FLRW es

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[d\chi^2 + S_k^2(\chi) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (10.51)$$

Para una trayectoria radial ($d\theta = d\phi = 0$) de un fotón ($ds^2 = 0$)

$$0 = -c^2 dt^2 + a^2(t) d\chi^2 \Rightarrow d\chi = c \frac{dt}{a(t)} \quad (10.52)$$

es decir

$$\chi = \int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \quad (10.53)$$

En conclusión, la distancia luminosidad es

$$d_L = (1 + z) S_k \left(\int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \right) \quad (10.54)$$

con t_0 el tiempo hoy. Esta integral se puede escribir de otra forma. Sabemos que

$$1 + z = \frac{1}{a(t)} \Rightarrow dz = -\frac{\dot{a}}{a^2} dt \quad (10.55)$$

y definimos la función de Hubble como

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} \quad (10.56)$$

Entonces

$$dt = -\frac{dz}{(1 + z)H(z)} \quad (10.57)$$

lo que implica

$$\int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^z \frac{dz}{H(z)} \quad (10.58)$$

En conclusión, en función del redshift

$$d_L = (1 + z) S_k \left[\int_0^z \frac{dz}{H(z)} \right] \quad (10.59)$$

La parte derecha depende de la teoría (ecuación de Einstein), pero la parte izquierda se puede medir experimentalmente. Así, podemos comparar la teoría con observaciones.

10.7 Ecuación de Friedmann

Partimos de la métrica

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (10.60)$$

Los símbolos de Christoffel relevantes son²

$$\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{20}^2 = \Gamma_{03}^3 = \Gamma_{30}^3 = \frac{1}{c} \frac{\dot{a}}{a}, \quad \Gamma_{11}^0 = \frac{1}{c} \frac{a\dot{a}}{1 - kr^2}, \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{kr}{1 - kr^2} \quad (10.61)$$

$$\Gamma_{22}^1 = -r(1 - kr^2), \quad \Gamma_{33}^2 = -\cos \theta \sin \theta, \quad \Gamma_{33}^3 = -r(1 - kr^2) \sin^2 \theta \quad (10.62)$$

$$\Gamma_{22}^0 = \frac{1}{c} r^2 a \dot{a}, \quad \Gamma_{33}^0 = \frac{1}{c} r^2 a \dot{a} \sin^2 \theta, \quad \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad (10.63)$$

Y las componentes del tensor de Ricci son

$$R_{00} = -\frac{3}{c^2} \frac{\ddot{a}}{a}, \quad (10.64)$$

$$R_{11} = \frac{2k + 2\dot{a}^2/c^2 + a\ddot{a}/c^2}{1 - kr^2}, \quad (10.65)$$

$$R_{22} = r^2(2k + 2\dot{a}^2/c^2 + a\ddot{a}/c^2), \quad (10.66)$$

$$R_{33} = \sin^2 \theta R_{22} \quad (10.67)$$

De lo cual podemos obtener las componentes del tensor de Einstein

$$G_{00} = 3 \left(\frac{1}{c^2} \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right), \quad (10.68)$$

$$G_{11} = \frac{k + \dot{a}^2/c^2 + 2a\ddot{a}/c^2}{-1 + kr^2} \quad (10.69)$$

Consideramos un fluido perfecto (1.41)

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu} \quad (10.70)$$

Para un observador en reposo respecto al fluido, tenemos

$$u^\mu = (c, 0, 0, 0), \quad u_\mu = (-c, 0, 0, 0) \quad (10.71)$$

²Se considera $x^0 = ct$ y $g_{00} = -1$ y no otra convención $x^0 = t$ y $g_{00} = -c^2$.

Entonces

$$T_{00} = \rho c^2, \quad (10.72)$$

$$T_{11} = P \frac{a^2}{1 - kr^2}, \quad (10.73)$$

$$T_{22} = Pa^2 r^2, \quad (10.74)$$

$$T_{33} = Pa^2 r^2 \sin^2 \theta \quad (10.75)$$

Podemos ahora escribir la ecuación de Einstein

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (10.76)$$

Para la componente $(0, 0)$

$$3 \left(\frac{1}{c^2} \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) - \Lambda = \frac{8\pi G}{c^2} \rho \quad (10.77)$$

Usando la función de Hubble $H = \dot{a}/a$, la primera ecuación de Friedmann es

$$3H^2 = 8\pi G \rho + \Lambda c^2 - 3 \frac{kc^2}{a^2} \quad (10.78)$$

Para la componente $(1, 1)$, tenemos

$$-\frac{k}{a^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{2}{c^2} \frac{\ddot{a}}{a} + \Lambda = \frac{8\pi G}{c^4} P \quad (10.79)$$

$$-3H^2 - 2\dot{H} - \frac{kc^2}{a^2} + \Lambda c^2 = \frac{8\pi G}{c^2} P \quad (10.80)$$

Las ecuaciones con componentes $(2, 2)$ y $(3, 3)$ nos dan la misma segunda ecuación de Friedmann. Podemos obtener una tercera ecuación que no es nueva, sino una combinación de las dos anteriores. Tomando la derivada de la primera

$$6H\dot{H} - 6\frac{kc^2}{a^2}H = 8\pi G\dot{\rho} \quad (10.81)$$

Por otro lado, la suma de las dos ecuaciones de Friedmann da

$$-2\dot{H} + 2\frac{kc^2}{a^2} = 8\pi G \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) \quad (10.82)$$

multiplicando por $-3H$

$$6H\dot{H} - 6\frac{kc^2}{a^2}H = -3H8\pi G \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) \quad (10.83)$$

Comparando (10.81) y (10.83), se obtiene la ecuación de continuidad

$$\dot{\rho} + 3H\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) = 0 \quad (10.84)$$

También se puede obtener directamente de $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, más exactamente de $\nabla_\mu T^{\mu 0} = 0$. En las ecuaciones de Friedmann no se considera necesariamente un solo fluido. Para cada fluido i , se tiene

$$\dot{\rho}_i + 3H\left(\rho_i + \frac{P_i}{c^2}\right) = 0 \quad (10.85)$$

Y las ecuaciones de Friedmann se escriben entonces como

$$3H^2 - \Lambda c^2 + 3\frac{kc^2}{a^2} = 8\pi G \sum_i \rho_i \quad (10.86)$$

$$-3H^2 - 2\dot{H} - \frac{kc^2}{a^2} + \Lambda c^2 = \frac{8\pi G}{c^2} \sum_i P_i \quad (10.87)$$

Lo que podemos reescribir

$$3H^2 = 8\pi G \left(\sum_i \rho_i + \rho_\Lambda + \rho_k \right) \quad (10.88)$$

$$-3H^2 - 2\dot{H} = \frac{8\pi G}{c^2} \left(\sum_i P_i + P_\Lambda + P_k \right) \quad (10.89)$$

donde se define

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}, \quad P_\Lambda = -c^2 \rho_\Lambda \quad (10.90)$$

$$\rho_k = -3\frac{kc^2}{8\pi G a^2}, \quad P_k = -\frac{c^2}{3} \rho_k \quad (10.91)$$

Es decir, la constante cosmológica y la curvatura del espacio pueden ser descrito como fluidos efectivos con ecuación de estado

$$P_\Lambda = -c^2 \rho_\Lambda, \quad P_k = -\frac{c^2}{3} \rho_k \quad (10.92)$$

Nota que para estos dos "fluidos", la presión es negativa. Para los otros fluidos típicos, tenemos un fluido de bariones o de fotones. Las ecuaciones de estado son $P_m = 0$ para la materia o polvo, ya que las galaxias, materia oscura y visible... se mueven con la expansión sin otra interacción que la gravedad y con muy baja velocidad. Para los

fotones, que tienen alta velocidad, se produce presión. La ecuación de estado se calcula en física estadística; para un gas de fotones, se tiene

$$P_r = \frac{c^2}{3}\rho_r \quad (10.93)$$

Entonces

$$3H^2 = 8\pi G(\rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda + \rho_k) \quad (10.94)$$

$$-2\dot{H} - 3H^2 = 8\pi G\left(\frac{\rho_r}{3} - \rho_\Lambda - \frac{1}{3}\rho_k\right) \quad (10.95)$$

Se asume que cada fluido satisface su ecuación de continuidad. Es decir para la materia, tenemos

$$0 = \dot{\rho}_m + 3H\left(\rho_m + \frac{P_m}{c^2}\right) \quad (10.96)$$

$$= \dot{\rho}_m + 3H\rho_m \quad (10.97)$$

es decir

$$\frac{\dot{\rho}_m}{\rho_m} = -3H = -3\frac{\dot{a}}{a} \quad (10.98)$$

lo que implica

$$\rho_m = \rho_{m,0}a^{-3} \quad (10.99)$$

La densidad de energía de la materia disminuye como el volumen a^3 , ya que tenemos dilución. Para la radiación, tenemos

$$\dot{\rho}_r + 3H\left(\rho_r + \frac{P_r}{c^2}\right) = \dot{\rho}_r + 4H\rho_r = 0 \quad (10.100)$$

es decir

$$\frac{\dot{\rho}_r}{\rho_r} = -4H = -4\frac{\dot{a}}{a} \quad (10.101)$$

lo que nos da

$$\rho_r = \rho_{r,0}a^{-4} \quad (10.102)$$

Tenemos un factor de dilución por el volumen a^3 , pero también los fotones pierden energía debido al corrimiento al rojo, con $1 + z = 1/a$. Para la constante cosmológica,

$$\dot{\rho}_\Lambda + 3H\left(\rho_\Lambda + \frac{P_\Lambda}{c^2}\right) = \dot{\rho}_\Lambda = 0 \quad (10.103)$$

es decir que $\dot{\rho}_\Lambda$ es constante lo que es consistente ya que

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \quad (10.104)$$

Finalmente, para la curvatura del espacio

$$\dot{\rho}_k + 3H\left(\rho_k + \frac{P_k}{c^2}\right) = \dot{\rho}_k + 2H\rho_k = 0 \quad (10.105)$$

es decir

$$\rho_k = \rho_{k,0}a^{-2} \quad (10.106)$$

Lo que de nuevo es consistente ya que

$$\rho_k = -\frac{3kc^2}{8\pi Ga^2} \quad (10.107)$$

Entonces la primera ecuación de Friedmann se puede escribir como

$$3H^2 = 8\pi G [\rho_{m,0}a^{-3} + \rho_{r,0}a^{-4} + \rho_{\Lambda,0} + \rho_{k,0}a^{-2}] \quad (10.108)$$

Lo que equivale a una ecuación diferencial de primer orden:

$$\frac{\dot{a}}{a} = \pm \sqrt{\frac{8\pi G}{3} (\rho_{m,0}a^{-3} + \rho_{r,0}a^{-4} + \rho_{\Lambda,0} + \rho_{k,0}a^{-2})} \quad (10.109)$$

La raíz positiva ($\dot{a} > 0$) corresponde a un universo en expansión; la negativa, a uno en colapso. Esta ecuación puede resolverse numéricamente para obtener $a(t)$, y por tanto $H(t)$. Esto depende de parámetros libres como $\rho_{m,0}$, $\rho_{r,0}$, $\rho_{\Lambda,0}$, $\rho_{k,0}$. Pero podemos usar otra estrategia, en la cual expresamos las evoluciones en función del redshift y no del tiempo. Evaluando la ecuación de Friedmann hoy ($a(t_0) = 1$), obtenemos

$$3H_0^2 = 8\pi G(\rho_{m,0} + \rho_{r,0} + \rho_{\Lambda,0} + \rho_{k,0}) \quad (10.110)$$

También, definimos los parámetros de densidad

$$\Omega_{i,0} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_{i,0} \quad (10.111)$$

lo que transforma la ec.(10.110)

$$\Omega_{m,0} + \Omega_{r,0} + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0} = 1 \quad (10.112)$$

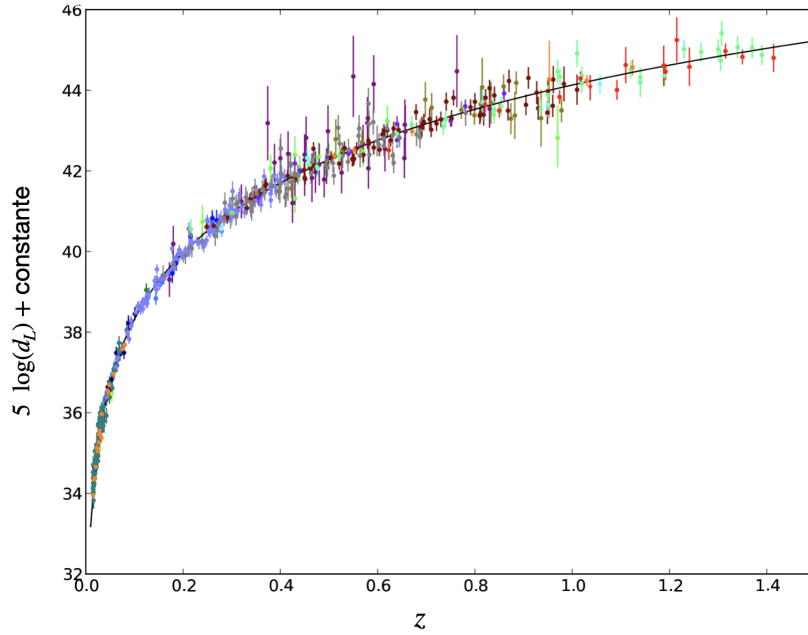
La ecuación de Friedmann (10.108) se reescribe como

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_{m,0}a^{-3} + \Omega_{r,0}a^{-4} + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0}a^{-2} \quad (10.113)$$

Y usando $1 + z = 1/a$, obtenemos

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0}(1+z)^2 \quad (10.114)$$

Esta expresión para $H(z)$ permite calcular $d_L(z)$ y compararlo con los datos observacionales.



Por ejemplo, se obtiene

$$\Omega_{m,0} \simeq 0.30, \quad \Omega_{\Lambda,0} \simeq 0.70, \quad \Omega_{k,0} \simeq 0, \quad \Omega_{r,0} \simeq 0 \quad (10.115)$$

Finalmente, de estos parámetros podemos obtener la edad del universo (10.57)

$$T = \int_0^{t_0} dt = \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)H(z)} \simeq 13.8 \times 10^9 \text{ años} \quad (10.116)$$

con $H_0 \simeq 68 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

CAPÍTULO 6

Ondas gravitacionales

11. Teoría linealizada

Para definir las ondas gravitacionales, consideramos una perturbación del espacio. Las fluctuaciones alrededor de un espacio estático describen ondas gravitacionales. Por eso, tomamos el espacio de Minkowski y una perturbación $h_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (11.1)$$

Para calcular los símbolos de Christoffel, necesitamos el inverso de la métrica $g^{\mu\nu}$. Por definición

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu \quad (11.2)$$

Definimos

$$g_{\alpha\nu} = \eta_{\alpha\nu} + h_{\alpha\nu}, \quad g^{\mu\alpha} = \eta^{\mu\alpha} + \text{algo}^{\mu\alpha} \quad (11.3)$$

Entonces

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = (\eta^{\mu\alpha} + \text{algo}^{\mu\alpha})(\eta_{\alpha\nu} + h_{\alpha\nu}) = \delta_\nu^\mu \quad (11.4)$$

Expandiendo al primer orden, obtenemos

$$\eta^{\mu\alpha} h_{\alpha\nu} + \text{algo}^{\mu\alpha} \eta_{\alpha\nu} = 0 \quad (11.5)$$

es decir

$$h^\mu{}_\nu + \text{algo}^\mu{}_\nu = 0 \quad (11.6)$$

o bajando/subiendo el índice con la métrica $\eta_{\mu\nu}$ ya que es de orden 0

$$\text{algo}^{\mu\nu} = -h^{\mu\nu} \quad (11.7)$$

es decir

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \quad (11.8)$$

Al segundo orden, el procedimiento es similar

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + \text{algo}^{\mu\nu} \quad (11.9)$$

Usando la relación definiendo el inverso (11.2)

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu = (\eta^{\mu\alpha} - h^{\mu\alpha} + \text{algo}^{\mu\alpha})(\eta_{\alpha\nu} + h_{\alpha\nu}) \quad (11.10)$$

$$= \delta_\nu^\mu - h^\mu{}_\nu + h^\mu{}_\nu - h^{\mu\alpha} h_{\alpha\nu} + \text{algo}^\mu{}_\nu + \mathcal{O}(h^3) \quad (11.11)$$

lo que nos permite obtener $\text{algo}^\mu{}_\nu$ y en conclusión

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + h^{\mu\alpha} h_\alpha{}^\nu + \dots \quad (11.12)$$

En esta sección, estaremos interesado a la perturbación al primer orden, de lo cual podemos obtener los símbolos de Christoffel al primer orden

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda} (\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \quad (11.13)$$

$$\simeq \frac{1}{2} (\eta^{\sigma\lambda} - h^{\sigma\lambda}) (\partial_\mu h_{\nu\lambda} + \partial_\nu h_{\lambda\mu} - \partial_\lambda h_{\mu\nu}) \quad (11.14)$$

$$\simeq \frac{1}{2} \eta^{\sigma\lambda} (\partial_\mu h_{\nu\lambda} + \partial_\nu h_{\lambda\mu} - \partial_\lambda h_{\mu\nu}) \quad (11.15)$$

$$= \frac{1}{2} (\partial_\mu h^\sigma{}_\nu + \partial_\nu h^\sigma{}_\mu - \partial^\sigma h_{\mu\nu}) \quad (11.16)$$

No hemos considerado el termino de orden 0

$$\frac{1}{2} \eta^{\sigma\lambda} (\partial_\mu \eta_{\nu\lambda} + \partial_\nu \eta_{\lambda\mu} - \partial_\lambda \eta_{\mu\nu}) \quad (11.17)$$

ya que trabajaremos con coordenadas cartesianas y por lo tanto ese termino es nulo. De forma similar, el tensor de Ricci es

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\mu \Gamma_{\alpha\nu}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta - \Gamma_{\alpha\nu}^\beta \Gamma_{\beta\mu}^\alpha \quad (11.18)$$

los dos últimos términos son de segundo orden y

$$\Gamma_{\alpha\nu}^\alpha = \frac{1}{2} \partial_\nu h^\alpha{}_\alpha \equiv \frac{1}{2} \partial_\nu h \quad (11.19)$$

donde hemos definido $h^\mu{}_\mu = h$. Por lo tanto, tenemos

$$R_{\mu\nu} \simeq \frac{1}{2}(\partial_{\alpha\mu}h^\alpha{}_\nu + \partial_{\alpha\nu}h^\alpha{}_\mu - \square h_{\mu\nu} - \partial_{\mu\nu}h) \quad (11.20)$$

De lo cual, podemos definir la curvatura escalar

$$R \simeq \eta^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = \partial_{\alpha\beta}h^{\alpha\beta} - \square h \quad (11.21)$$

y finalmente el tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \quad (11.22)$$

$$\simeq \frac{1}{2}(\partial_{\mu\alpha}h^\alpha{}_\nu + \partial_{\nu\alpha}h^\alpha{}_\mu - \partial_{\mu\nu}h - \square h_{\mu\nu}) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(\partial_{\alpha\beta}h^{\alpha\beta} - \square h) \quad (11.23)$$

Podemos eliminar de esta expresión, h usando el cambio de variables

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \quad (11.24)$$

lo que implica

$$\bar{h} = h - 2h = -h \quad (11.25)$$

y por lo tanto

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h} \quad (11.26)$$

El tensor de Einstein en función de $\bar{h}_{\mu\nu}$ es

$$G_{\mu\nu} \simeq \frac{1}{2}(\partial_{\mu\alpha}\bar{h}^\alpha{}_\nu + \partial_{\nu\alpha}\bar{h}^\alpha{}_\mu - \square\bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial_{\alpha\beta}\bar{h}^{\alpha\beta}) \quad (11.27)$$

Finalmente, la ecuación de campo al primer orden de perturbaciones es

$$\square\bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\partial_{\alpha\beta}\bar{h}^{\alpha\beta} - \partial_{\mu\alpha}\bar{h}^\alpha{}_\nu - \partial_{\nu\alpha}\bar{h}^\alpha{}_\mu = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (11.28)$$

11.1 Gauge

Esta ecuación puede ser simplificada si cambiamos de coordenadas. Podemos hacer una transformación

$$x^\mu \longmapsto x'^\mu, \quad (11.29)$$

pero para que sea consistente con nuestra expansión al primer orden, la transformación tiene que ser lineal

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}, \quad \text{con } \xi^{\mu} \text{ pequeño.} \quad (11.30)$$

Bajo esta transformación, la métrica se transforma como

$$g'_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} \quad (11.31)$$

y también

$$x^{\mu} = x'^{\mu} - \xi^{\mu} \quad (11.32)$$

lo que nos da

$$g'_{\mu\nu} \simeq (\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) \frac{\partial(x'^{\alpha} - \xi^{\alpha})}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial(x'^{\beta} - \xi^{\beta})}{\partial x'^{\nu}} \quad (11.33)$$

$$= (\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) \left(\delta_{\mu}^{\alpha} - \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \right) \left(\delta_{\nu}^{\beta} - \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} \right) \quad (11.34)$$

$$\simeq \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \delta_{\nu}^{\beta} - \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} \delta_{\mu}^{\alpha} \quad (11.35)$$

$$= \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - \frac{\partial \xi_{\nu}}{\partial x'^{\mu}} - \frac{\partial \xi_{\mu}}{\partial x'^{\nu}} \quad (11.36)$$

pero al primer orden

$$\frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \simeq \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \left(\delta_{\mu}^{\sigma} - \frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \right) \simeq \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \quad (11.37)$$

por lo tanto

$$g'_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - \frac{\partial \xi_{\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \xi_{\mu}}{\partial x^{\nu}} \quad (11.38)$$

$$\equiv \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - \partial_{\mu} \xi_{\nu} - \partial_{\nu} \xi_{\mu} \quad (11.39)$$

Por lo tanto, si definimos la perturbación en las nuevas coordenadas como

$$g'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu}, \quad (11.40)$$

entonces, bajo una transformación infinitesimal, la perturbación se transforma como

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_{\mu} \xi_{\nu} - \partial_{\nu} \xi_{\mu} \quad (11.41)$$

Es muy parecido al campo electromagnético, donde uno puede hacer una transformación del 4-potencial

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \psi \quad (11.42)$$

sin cambiar el campo eléctrico $\mathbf{E}$ ni el campo magnético $\mathbf{B}$. Esto se llama una *transformación de gauge*. De manera similar, tenemos una transformación para la perturbación métrica (11.41) que no cambia los tensores de Riemann, Ricci, ni el escalar de Ricci.

Nota que podemos interpretar esta teoría linealizada como una teoría de campo (campo h) sobre el espacio de Minkowski, donde el potencial $h_{\mu\nu}$ juega un rol análogo al de A_μ en el electromagnetismo.

Al igual que en el caso electromagnético, podemos elegir ξ^μ como queramos. En ese caso, se dice que *fijamos el gauge*. Hemos cambiado de perspectiva: seguimos trabajando con las mismas coordenadas x^μ , pero hemos redefinido el tensor $h_{\mu\nu} \mapsto h'_{\mu\nu}$. Es similar a pasar de una transformación pasiva a una activa.

Por ejemplo, podemos trabajar en el **gauge de Hilbert**

$$\partial_\mu \bar{h}^\mu{}_\nu = 0, \quad (11.43)$$

lo cual es análogo al **gauge de Lorenz** en electromagnetismo

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (11.44)$$

Pero porque podemos elegir este gauge. A partir de la transformación

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu \quad (11.45)$$

podemos obtener la transformación de la traza

$$h' = \eta^{\mu\nu} h'_{\mu\nu} = h - 2\partial_\mu \xi^\mu \quad (11.46)$$

Entonces, la perturbación reducida $\bar{h}_{\mu\nu}$ transformada es

$$\bar{h}'_{\mu\nu} = h'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h' \quad (11.47)$$

$$= (h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} (h - 2\partial_\alpha \xi^\alpha) \quad (11.48)$$

$$= h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu + \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \xi^\alpha \quad (11.49)$$

$$= \bar{h}_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu + \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \xi^\alpha \quad (11.50)$$

Ahora, derivando

$$\partial^\mu \bar{h}'_{\mu\nu} = \partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} - \square \xi_\nu \quad (11.51)$$

Entonces, siempre podemos elegir el campo ξ^μ de tal manera que

$$\square \xi_\nu = \partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} \quad (11.52)$$

Esto nos permite fijar el gauge de Hilbert

$$\partial^\mu \bar{h}'_{\mu\nu} = 0 \quad (11.53)$$

La condición que hemos definido no fija totalmente el gauge. De hecho, podemos elegir ξ_ν de tal manera que

$$\square \xi_\nu = \partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu}. \quad (11.54)$$

Pero todavía podemos agregar una transformación adicional a ξ_ν del tipo Ψ_ν , con

$$\square \Psi_\nu = 0. \quad (11.55)$$

Es decir, en lugar de considerar sólo la transformación ξ_ν , consideramos $\xi_\nu + \Psi_\nu$. Como $\square \Psi_\nu = 0$, se sigue que

$$\square(\xi_\nu + \Psi_\nu) = \partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu}, \quad (11.56)$$

por lo tanto, se mantiene la condición de Hilbert. Esto implica que aún tenemos una libertad residual de gauge tal que $\square \Psi_\nu = 0$. Para fijar completamente el gauge, debemos imponer condiciones adicionales sobre Ψ_ν , lo que vamos a ver más tarde.

Considerando el gauge (11.43) la ec.(11.28) se reduce a

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (11.57)$$

Es decir una ecuación de onda con fuente $T_{\mu\nu}$ y velocidad c . En el vacío, tenemos

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0, \quad \partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{el gauge}) \quad (11.58)$$

11.2 Onda progresiva

Buscamos una solución tipo onda progresiva

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha} \quad (11.59)$$

donde $A_{\mu\nu}$ es una constante (tensor de polarización) y k_α el vector de onda. La ecuación $\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0$ implica que

$$k^\alpha k_\alpha = 0 \quad (11.60)$$

es decir, la onda es de tipo nulo, se propaga a la velocidad de la luz. Para una propagación en la dirección z , tenemos

$$k^\alpha = \left(\frac{\omega}{c}, 0, 0, k_z \right) \quad (11.61)$$

y la condición $k^\alpha k_\alpha = 0$ implica

$$-\frac{\omega^2}{c^2} + k_z^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_z = \pm \frac{\omega}{c} \quad (11.62)$$

Por lo tanto, el término de fase es

$$ik_\alpha x^\alpha = i \left(\frac{\omega}{c} ct \pm \frac{\omega}{c} z \right) = i\omega \left(t \pm \frac{z}{c} \right) \quad (11.63)$$

lo cual describe una onda que se propaga en la dirección $+z$ o $-z$. La condición de Hilbert $\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$ implica

$$A_{\mu\nu} k^\mu = 0 \quad (11.64)$$

Por ejemplo, para $\nu = 0$ se tiene

$$A_{00}k^0 + A_{10}k^1 + A_{20}k^2 + A_{30}k^3 = 0 \quad (11.65)$$

Esto implica que los coeficientes $A_{\mu\nu}$ no son independientes. Como $A_{\mu\nu}$ es un tensor simétrico, tiene inicialmente 10 componentes independientes, pero la condición de Hilbert nos da 4 relaciones. Por lo tanto, quedan sólo 6 componentes independientes.

Como lo hemos visto, podemos hacer una transformación adicional tal que $\square\Psi^\nu = 0$. Sea

$$\Psi^\nu = B^\nu e^{ik_\alpha x^\alpha} \quad (11.66)$$

Entonces

$$\square\Psi^\nu = -k^\alpha k_\alpha \Psi^\nu = 0, \quad \text{ya que } k^\alpha k_\alpha = 0 \quad (11.67)$$

Como hemos visto, bajo esta transformación el campo perturbado se transforma como

$$\bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \partial_\mu \Psi_\nu - \partial_\nu \Psi_\mu + \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \Psi^\alpha \quad (11.68)$$

Sustituyendo explícitamente $\Psi^\nu = B^\nu e^{ik_\alpha x^\alpha}$

$$\bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \partial_\mu (B_\nu e^{ik_\alpha x^\alpha}) - \partial_\nu (B_\mu e^{ik_\alpha x^\alpha}) + \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha (B^\alpha e^{ik_\sigma x^\sigma}) \quad (11.69)$$

$$= A_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha} - iB_\nu k_\mu e^{ik_\alpha x^\alpha} - iB_\mu k_\nu e^{ik_\alpha x^\alpha} + i\eta_{\mu\nu} B^\alpha k_\alpha e^{ik_\alpha x^\alpha} \quad (11.70)$$

por lo que

$$A'_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} - ik_\mu B_\nu - ik_\nu B_\mu + i\eta_{\mu\nu} k_\alpha B^\alpha \quad (11.71)$$

Podemos elegir B_μ de tal forma que

$$\eta^{\mu\nu} A'_{\mu\nu} = 0, \quad A'_{0i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (11.72)$$

Estas condiciones se traducen en el sistema

$$\eta^{\mu\nu} A_{\mu\nu} + 2ik^\mu B_\mu = 0 \quad (11.73)$$

$$A_{0i} - iB_0 k_i - iB_i k_0 = 0 \quad (11.74)$$

Este sistema lineal puede escribirse como:

$$\begin{pmatrix} k^0 & k^1 & k^2 & k^3 \\ k^1 & -k^0 & 0 & 0 \\ k^2 & 0 & -k^0 & 0 \\ k^3 & 0 & 0 & -k^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2}\eta^{\mu\nu} A_{\mu\nu} \\ -iA_{01} \\ -iA_{02} \\ -iA_{03} \end{pmatrix} \quad (11.75)$$

Este sistema tiene solución única si el determinante es distinto de cero. Se verifica que

$$\det = -(k^0)^2 [(k^0)^2 + (k^1)^2 + (k^2)^2 + (k^3)^2] \neq 0. \quad (11.76)$$

Por lo tanto, existe una transformación tal que

$$\eta^{\mu\nu} A'_{\mu\nu} = 0, \quad A'_{0i} = 0. \quad (11.77)$$

Esta transformación fija completamente el gauge y se llama **gauge TT** (Transverso-sin Traza), es decir

- Transverso: $A_{0i} = 0$
- Sin traza: $\eta^{\mu\nu} A_{\mu\nu} = 0$

Sabemos que $A_{0i} = 0$ y que $A_{\mu\nu} k^\nu = 0$. Para $\mu = 0$ se tiene

$$A_{00}k^0 + A_{01}k^1 + A_{02}k^2 + A_{03}k^3 = 0 \quad (11.78)$$

Pero como $A_{0i} = 0$, esto implica

$$A_{00}k^0 = 0 \Rightarrow A_{00} = 0 \quad (11.79)$$

Por lo tanto

$$A_{0\mu} = 0 \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \quad (11.80)$$

Esto implica que para $\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}e^{ik_\alpha x^\alpha}$, tenemos

$$\bar{h}_{0\mu} = 0 \quad (11.81)$$

y como $\eta^{\mu\nu} A_{\mu\nu} = 0$

$$\bar{h} = 0 \quad (11.82)$$

Recordando que

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{h}\eta_{\mu\nu}, \quad \text{y que } h = -\bar{h} \quad (11.83)$$

obtenemos

$$h = 0, \quad h_{0\mu} = 0 \quad (11.84)$$

Consideramos una onda con fase $i\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)$ es decir propagando hacia z creciente. Entonces

$$k_\mu = \left(\frac{\omega}{c}, 0, 0, -\frac{\omega}{c}\right) \quad (11.85)$$

La condición de Hilbert, $A_{\mu\nu}k^\nu = 0$ implica

$$A_{\mu 0} - A_{\mu z} = 0 \quad (11.86)$$

Pero ya que $A_{\mu 0} = 0$, se deduce

$$A_{\mu z} = 0 \quad (11.87)$$

Por lo tanto, los únicos componentes no nulos son

$$A_{xx}, \quad A_{yy}, \quad A_{xy} \quad (11.88)$$

Además la condición sin traza implica

$$A_{xx} + A_{yy} = 0 \quad (11.89)$$

Definimos

$$A_{xx} = a_+, \quad A_{xy} = a_\times \quad (11.90)$$

Entonces

$$h_{xx}(t, z) = a_+ \cos[\omega(t - z/c)] \quad \text{modo } + \quad (11.91)$$

$$h_{xy}(t, z) = a_\times \cos[\omega(t - z/c)] \quad \text{modo } \times \quad (11.92)$$

Nota que habíamos considerado nuestra perturbación como una exponencial compleja, lo cual es un *ansatz* matemático para buscar soluciones más fácilmente. Sin embargo, físicamente, la perturbación del campo gravitacional debe ser real, por lo tanto, al final tomamos la parte real de la expresión compleja

$$h_{\mu\nu}(x) = \Re \{ A_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha} \} \quad (11.93)$$

Se denotan usualmente como

$$h_+(t, z) = a_+ \cos[\omega(t - z/c)], \quad (11.94)$$

$$h_\times(t, z) = a_\times \cos[\omega(t - z/c)]. \quad (11.95)$$

En conclusión, tenemos

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_+ & a_\times & 0 \\ 0 & a_\times & -a_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cos[\omega(t - z/c)] \quad (11.96)$$

donde $(h_+, h_\times)$ representan los dos modos de polarización de la onda gravitacional. El tensor $h_{\mu\nu}$ tiene 10 componentes. El gauge de Hilbert fija 4 condiciones y el gauge TT fija otras 4, dejando 2 componentes independientes: son los dos grados de libertad del campo gravitacional.

11.3 Efecto sobre la distancia

En el gauge TT, tenemos la métrica

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + (\delta_{ij} + h_{ij}^{TT}) dx^i dx^j, \quad (11.97)$$

donde h_{ij}^{TT} es transverso y sin traza, $h_{ij}^{TT} \delta^{ij} = 0$. Sea una partícula libre, que satisface la ecuación de geodésica. Inicialmente, antes de que la onda pase, la partícula está en reposo:

$$x^i = 0, \quad x^0 = ct \quad (11.98)$$

En presencia de la onda gravitacional, la ecuación de geodésica es

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \quad (11.99)$$

A primer orden, los símbolos de Christoffel relevantes son

$$\Gamma_{ij}^0 = \frac{1}{2c} \frac{\partial h_{ij}^{TT}}{\partial t} \quad (11.100)$$

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{1}{2c} \frac{\partial h_j^{iTT}}{\partial t} \quad (11.101)$$

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} (\partial_j h_k^{iTT} + \partial_k h_j^{iTT} - \partial^i h_{jk}^{TT}) \quad (11.102)$$

Pero para partículas inicialmente en reposo, $dx^i/d\tau = 0$ al inicio, y entonces al primer orden obtenemos

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} \simeq 0 \quad (11.103)$$

Por lo tanto, la partícula permanece en su posición original. No hay desplazamiento observable de una sola partícula. Pero como lo vamos a ver, es sólo un efecto del sistema de coordenadas. Para detectar un efecto físico, necesitamos al menos dos partículas y medir la distancia entre ellas. Sea A en $x_A^i = (0, 0, 0)$ y B en $x_B^i = (x, y, z)$, ambos en el mismo instante t . Entonces, la distancia cuadrada es

$$L^2 = g_{\mu\nu} (x_B^\mu - x_A^\mu) (x_B^\nu - x_A^\nu) \quad (11.104)$$

$$= g_{ij} (x_B^i - x_A^i) (x_B^j - x_A^j) \quad (\text{porque } x_A^0 = x_B^0 = ct) \quad (11.105)$$

$$= g_{ij} x_B^i x_B^j \quad (\text{porque } x_A^i = 0) \quad (11.106)$$

$$= (\delta_{ij} + h_{ij}^{TT}) x_B^i x_B^j \quad (11.107)$$

$$= L_0^2 (\delta_{ij} + h_{ij}^{TT}) n^i n^j \quad (11.108)$$

$$= L_0^2 (1 + h_{ij}^{TT} n^i n^j) \quad (\text{porque } n^i n_i = 1) \quad (11.109)$$

donde $n^i = x_B^i/L_0$ es el vector unitario en la dirección de separación. Tenemos al primer orden

$$L \simeq L_0 \left(1 + \frac{1}{2} h_{ij}^{TT} n^i n^j \right) \quad (11.110)$$

Entonces, el cambio relativo de longitud es

$$\frac{\Delta L}{L_0} \simeq \frac{1}{2} h_{ij}^{TT} n^i n^j \quad (11.111)$$

Este es el efecto medible del paso de una onda gravitacional: un cambio oscilante en la distancia entre dos partículas inicialmente en reposo. Podemos concluir que sí existe un desplazamiento físico, pero que se necesita observar al menos dos partículas para detectarlo.

11.4 Polarizaciones

Considerando dos geodésicas cercanas, para la primera tenemos

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \quad (11.112)$$

y para la segunda

$$\frac{d^2(x^\mu + \delta x^\mu)}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x + \delta x) \frac{d(x^\alpha + \delta x^\alpha)}{d\tau} \frac{d(x^\beta + \delta x^\beta)}{d\tau} = 0 \quad (11.113)$$

Restando ambas ecuaciones y considerando que δx^μ es pequeño, obtenemos la ecuación de desviación geodésica

$$\frac{d^2 \delta x^\mu}{d\tau^2} + \delta x^\nu \partial_\nu \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} + 2\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{d\delta x^\beta}{d\tau} = 0 \quad (11.114)$$

Esta expresión se puede reescribir elegantemente como

$$\frac{D^2 \delta x^\mu}{D\tau^2} = R_{\alpha\beta\gamma}^\mu \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} \delta x^\alpha \quad (11.115)$$

donde

$$\frac{D\delta x^\mu}{D\tau} = \frac{d\delta x^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \delta x^\beta \quad (11.116)$$

$$= \frac{dx^\alpha}{d\tau} \nabla_\alpha \delta x^\mu \quad (11.117)$$

es la derivada covariante de δx^μ a lo largo de la geodésica. Como las partículas desplazadas por la onda gravitacional se mueven de manera no relativista, tenemos

$$\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dx^0}{d\tau} \quad (11.118)$$

Además, estamos en una de las dos geodésicas (la de la partícula A), la cual se encuentra en movimiento libre, por lo tanto

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{D\delta x^\mu}{D\tau} = \frac{d\delta x^\mu}{d\tau} \quad (11.119)$$

Entonces

$$\frac{d^2 \delta x^i}{d\tau^2} = R_{\alpha 00}^i \frac{dx^0}{dz} \frac{dx^0}{d\tau} \delta x^\alpha = R_{j00}^i \delta x^j \quad (11.120)$$

donde

$$R_{j00}^i = -\partial_j \Gamma_{00}^i + \partial_0 \Gamma_{0j}^i = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_{ij}^{TT}}{\partial t^2} \quad (11.121)$$

Recordando que la métrica es

$$ds^2 = -dt^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (11.122)$$

tenemos que

$$dt^2 = d\tau^2 \left[1 + \delta_{ij} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} \right] \simeq d\tau^2 \quad (11.123)$$

por lo tanto, $dt \simeq d\tau$. Finalmente obtenemos

$$\frac{d^2 \delta x^i}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_{ij}^{TT}}{\partial t^2} \delta x^j \quad (11.124)$$

Sea $\delta x^j(t)$ la desviación con respecto a la primera geodésica. Esta desviación depende del tiempo y cambia a medida que pasa la onda gravitacional

$$\delta x^j(t) \simeq \delta x^j(0) + \text{términos de orden superior en } h_{ij}^{TT} \quad (11.125)$$

con $\delta x^j(0)$ el valor antes de que pasa la onda. Antes del paso de la onda, se tiene

$$\frac{d^2 \delta x^i}{dt^2} \simeq \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_{ij}^{TT}}{\partial t^2} \delta x^j(0) \quad (11.126)$$

es decir

$$\delta x^i(t) = \delta x^i(0) + \frac{1}{2} h_{ij}^{TT}(t, x^k) \delta x^j(0) \quad (11.127)$$

Como

$$h_{ij}^{TT}(t, x^k) \simeq h_{ij}^{TT}(t, 0) + \frac{\partial h_{ij}^{TT}}{\partial x^k} x^k + \dots \quad (11.128)$$

Y dado que

$$\left| \frac{\partial h_{ij}^{TT}}{\partial x^k} x^k \right| \simeq \left| h_{ij}^{TT} \frac{x^k}{\lambda} \right| \quad (11.129)$$

con λ la longitud de onda de la onda gravitacional. Entonces, en el límite $\lambda \gg x^k$ (longitud de onda mucho mayor que la distancia entre partículas), se puede aproximar

$$h_{ij}^{TT}(t, x^k) \simeq h_{ij}^{TT}(t, 0) \quad (11.130)$$

y así

$$\delta x^i(t) = \delta x^i(0) + \frac{1}{2} h_{ij}^{TT}(t, 0) \delta x^j(0) \quad (11.131)$$

Recordando que (11.96)

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_+ & a_\times & 0 \\ 0 & a_\times & -a_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cos[\omega(t - z/c)] \quad (11.132)$$

entonces se obtiene

$$\delta x(t) = \delta x_0 + \frac{1}{2}(a_+ \delta x_0 + a_\times \delta y_0) \cos \omega t \quad (11.133)$$

$$\delta y(t) = \delta y_0 + \frac{1}{2}(a_\times \delta x_0 - a_+ \delta y_0) \cos \omega t \quad (11.134)$$

$$\delta z(t) = \delta z_0 \quad (11.135)$$

En el caso $a_\times = 0$ (polarización +)

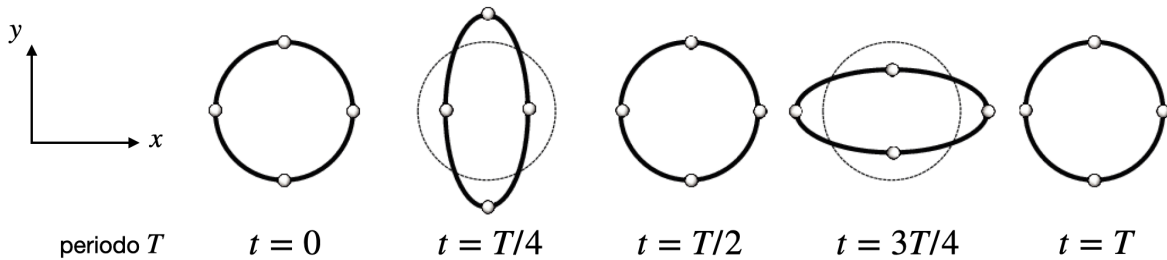
$$\delta x(t) = \delta x_0 + \frac{1}{2}a_+ \delta x_0 \cos \omega t \quad (11.136)$$

$$\delta y(t) = \delta y_0 - \frac{1}{2}a_+ \delta y_0 \cos \omega t \quad (11.137)$$

Si inicialmente las partículas están distribuidas sobre un anillo $\delta x_0^2 + \delta y_0^2 = R^2$, entonces

$$\left(\frac{\delta x(t)}{1 + \frac{1}{2}a_+ \cos \omega t} \right)^2 + \left(\frac{\delta y(t)}{1 - \frac{1}{2}a_+ \cos \omega t} \right)^2 = R^2, \quad (11.138)$$

lo que representa una vibración de los ejes del anillo, es la polarización lineal +.

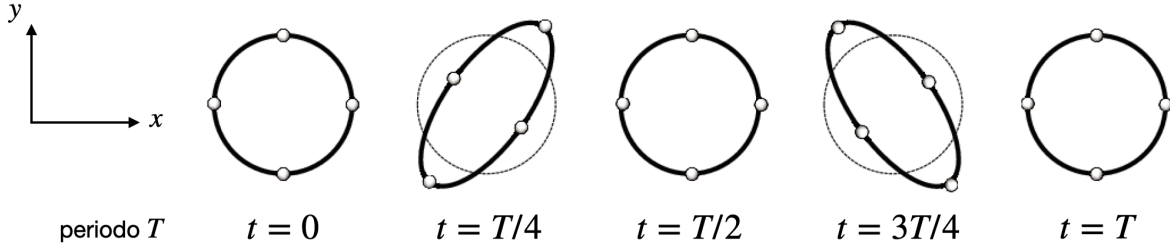


Para el caso $a_+ = 0$ (polarización $\times$), tenemos

$$\left(\frac{\delta x + \delta y}{\sqrt{2}(1 + \frac{a_\times}{2} \cos \omega t)} \right)^2 + \left(\frac{-\delta x + \delta y}{\sqrt{2}(1 - \frac{a_\times}{2} \cos \omega t)} \right)^2 = R^2 \quad (11.139)$$

que es la misma ecuación que (11.138) bajo una rotación de $\pi/4$ de los ejes

$$\delta x \mapsto \frac{\delta x + \delta y}{\sqrt{2}}, \quad \delta y \mapsto \frac{-\delta x + \delta y}{\sqrt{2}} \quad (11.140)$$



Nota, que la matriz de perturbación h_{ij}^{TT} es

$$h_{ij}^{TT} = \begin{pmatrix} a_+ & a_\times & 0 \\ a_\times & -a_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cos[\omega(t - z/c)] \quad (11.141)$$

Bajo una rotación por un ángulo θ alrededor del eje z

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11.142)$$

la perturbación se transforma como

$$h_{ij}^{TT} = R_{ik} R_{jl} h_{kl}^{TT} \quad (11.143)$$

Esto implica

$$a'_+ = a_+ \cos 2\theta - a_\times \sin 2\theta \quad (11.144)$$

$$a'_\times = a_+ \sin 2\theta + a_\times \cos 2\theta \quad (11.145)$$

Esta transformación muestra que el sistema es invariante bajo una rotación de $\theta = \pi$, lo que indica que en una teoría cuántica, la partícula asociada a la gravitación, el gravitón, tendrá espín $s = 2$.

11.5 Fórmula del cuadrupolo

Para describir la producción de ondas gravitacionales, consideramos la ecuación linealizada de Einstein en el gauge de Lorenz (11.57)

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (11.146)$$

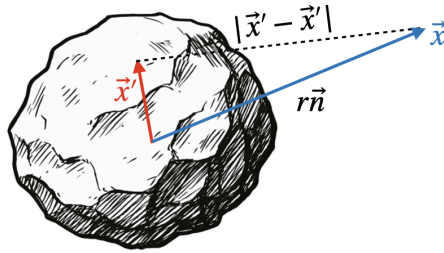
Esta ecuación puede utilizarse en el régimen en el cual el tensor energía-momento $T_{\mu\nu}$ es suficientemente pequeño, es decir, cuando el campo gravitacional es débil y la velocidad característica de las fuentes es pequeña en comparación con la velocidad de la luz. Para cuantificar cuándo esta aproximación es válida, se introduce el parámetro de compacidad definido por:

$$\Xi = \frac{GM}{c^2 R} \quad (11.147)$$

Este parámetro indica cuánto intensa es la gravedad de una fuente. Algunos ejemplos típicos son:

- Tierra: $\Xi \simeq 10^{-10}$
- Sol: $\Xi \simeq 10^{-6}$
- Estrella blanca: $\Xi \sim 10^{-4} - 10^{-3}$
- Estrella de neutrones: $\Xi \sim 0.2$
- Agujero negro: $\Xi \sim 0.5$

Como se ve, las ondas gravitacionales producidas por sistemas con $\Xi \ll 1$ pueden ser tratadas dentro del marco linealizado. En cambio, para objetos muy compactos como estrellas de neutrones o agujeros negros, es necesario un tratamiento más completo o numérico.



La solución general a la ecuación de campo linealizada (11.146) es

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = \frac{4G}{c^4} \int \frac{T_{\mu\nu} \left(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}, \mathbf{x}' \right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (11.148)$$

Recordamos que

$$\Delta \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = -4\pi \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (11.149)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \square \bar{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) &= \frac{4G}{c^4} \int \left[-\frac{1}{c^2} \frac{\partial_t^2 T_{\mu\nu} \left(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}, \mathbf{x}' \right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{\Delta T_{\mu\nu} \left(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}, \mathbf{x}' \right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right. \\ &\quad \left. + T_{\mu\nu} \left(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}, \mathbf{x}' \right) \Delta \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] d^3x' \end{aligned} \quad (11.150)$$

pero

$$-\frac{1}{c^2} \partial_t^2 T_{\mu\nu} \left(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}, \mathbf{x}' \right) + \Delta T_{\mu\nu} \left(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}, \mathbf{x}' \right) \quad (11.151)$$

$$= -\frac{1}{c^2} \partial_u^2 T_{\mu\nu}(u, \mathbf{x}') + \frac{1}{c^2} \partial_u^2 T_{\mu\nu}(u, \mathbf{x}') = 0 \quad (11.152)$$

Si el observador se encuentra muy lejos de la fuente, es decir, $|\mathbf{x}| \gg |\mathbf{x}'|$, entonces expandimos el denominador con $r = |\mathbf{x}|$ y $\mathbf{n} = \mathbf{x}/r$

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| &= r \left| \mathbf{n} - \frac{\mathbf{x}'}{r} \right| = r \sqrt{\left(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{x}'}{r} \right) \cdot \left(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{x}'}{r} \right)} \\ &= r \sqrt{1 - 2\mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{x}'}{r} + \left(\frac{\mathbf{x}'}{r} \right)^2} \simeq r \left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'}{r} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{|\mathbf{x}'|^2}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (11.153)$$

La métrica perturbada toma entonces la forma aproximada

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) \simeq \frac{4G}{c^4 r} \int T_{\mu\nu} \left(t - \frac{r}{c}, \mathbf{x}' \right) d^3x' \quad (11.154)$$

La conservación del tensor $T^{\mu\nu}$ al primer orden es

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (11.155)$$

Para $\nu = 0$

$$-\frac{1}{c} \partial_t T^{00} + \partial_i T^{0i} = 0 \quad (11.156)$$

y para $\nu = j$

$$-\frac{1}{c}\partial_t T^{0j} + \partial_i T^{ij} = 0 \quad (11.157)$$

Aplicando derivadas temporales a (11.156) y usando (11.157)

$$\frac{1}{c}\partial_t^2 T^{00} = \partial_i \partial_i T^{0i} = c \partial_i \partial_j T^{ij} \quad (11.158)$$

es decir

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 T^{00}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 T^{ij}}{\partial x^i \partial x^j} \quad (11.159)$$

Multiplicando (11.159) por $x^k x^p$ e integrando

$$\frac{1}{c^2} \int \frac{\partial^2 T^{00}}{\partial t^2} x^k x^p d^3 x = \int \frac{\partial^2 T^{ij}}{\partial x^i \partial x^j} x^k x^p d^3 x \quad (11.160)$$

Mediante integración por partes (ignorando los términos de borde)

$$\int \frac{\partial^2 T^{ij}}{\partial x^i \partial x^j} x^k x^p d^3 x = 2 \int T^{kp} d^3 x \quad (11.161)$$

Entonces se deduce

$$\frac{1}{c^2} \int \frac{\partial^2 T^{00}}{\partial t^2} x^k x^p d^3 x = 2 \int T^{kp} d^3 x \quad (11.162)$$

Además, como la derivada temporal es independiente de la variable de integración espacial, se puede sacar fuera de la integral

$$\frac{1}{c^2} \int \frac{\partial^2 T^{00}}{\partial t^2} x^k x^p d^3 x = \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \int T^{00}(t, \mathbf{x}) x^k x^p d^3 x \quad (11.163)$$

Finalmente, para fuentes no relativistas, se puede aproximar

$$T^{00} \simeq \rho c^2 \quad (11.164)$$

Y definimos el tensor de inercia

$$I^{kp}(t) = \int \rho(t, \mathbf{x}) x^k x^p d^3 x \quad (11.165)$$

entonces

$$\ddot{I}_{kp} = 2 \int T_{kp}(t, \mathbf{x}) d^3 x \quad (11.166)$$

Finalmente, insertando en la ecuación (11.154)

$$\bar{h}_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{2G}{c^4 r} \ddot{I}_{ij} \left(t - \frac{r}{c} \right) \quad (11.167)$$

Esta es la **fórmula del cuadrupolo** para ondas gravitacionales generadas por una fuente débil y no relativista.

Cuando tenemos una solución de onda en la dirección $\mathbf{n}$ en el gauge de Lorenz, podemos obtener la forma física medible en el gauge (TT) mediante el uso del *tensor de proyección*

$$P_{ij}(\mathbf{n}) = \delta_{ij} - n_i n_j \quad (11.168)$$

Este tensor proyecta cualquier vector o tensor sobre el subespacio ortogonal a $\mathbf{n}$. Sus propiedades fundamentales son

$$\text{Simétrico: } P_{ij} = P_{ji} \quad (11.169)$$

$$\text{Transversal: } n^i P_{ij} = 0 \quad (11.170)$$

$$\text{Proyector: } P_{ik} P_{kj} = P_{ij} \quad (11.171)$$

$$\text{Traza: } P_{ii} = 2 \quad (11.172)$$

A partir de P_{ij} , se define el **tensor de proyección TT** (llamado a veces Λ)

$$\Lambda_{ij,kl}(\mathbf{n}) = P_{ik} P_{jl} - \frac{1}{2} P_{ij} P_{kl} \quad (11.173)$$

Este tensor también es un proyector

$$\Lambda_{ij,kl} = \Lambda_{kl,ij}, \quad n^i \Lambda_{ij,kl} = n^k \Lambda_{ij,kl} = 0 \quad (11.174)$$

Por lo tanto, si tenemos una onda $\bar{h}_{ij}$ en el gauge de Lorenz, su proyección física en el gauge TT es

$$h_{ij}^{TT} = \Lambda_{ij,kl} \bar{h}_{kl} \quad (11.175)$$

Esta proyección garantiza que

$$n^i h_{ij}^{TT} = 0 \quad (\text{transversal}), \quad (11.176)$$

$$h_{ii}^{TT} = 0 \quad (\text{sin traza}) \quad (11.177)$$

Introduciendo el tensor de momento cuadrupolar como

$$Q_{ij}(t) = I_{ij}(t) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta^{kl} I_{kl}(t) \quad (11.178)$$

es decir

$$Q_{ij}(t) = \int \rho(t, \mathbf{x}) \left(x^i x^j - \frac{1}{3} \mathbf{x}^2 \delta_{ij} \right) d^3x \quad (11.179)$$

Es esta cantidad Q_{ij} la que aparece en la expansión multipolar del potencial gravitacional en el régimen cuasi-newtoniano, así que es medible

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = -\frac{GM}{r} + \frac{3G}{2r^3} Q_{ij}(t) n^i n^j + \dots \quad (11.180)$$

La proyección del tensor I_{ij} sobre el subespacio TT elimina automáticamente la traza, y por tanto

$$\Lambda_{ij,kl} I_{kl} = \Lambda_{ij,kl} Q_{kl} \quad (11.181)$$

La expresión final de la onda gravitacional observada en el gauge TT es

$$h_{ij}^{TT}(t, \mathbf{x}) = \frac{2G}{c^4 r} \Lambda_{ij,kl}(\mathbf{n}) \ddot{Q}_{kl} \left(t - \frac{r}{c} \right) \quad (11.182)$$

Esta es la **fórmula del cuadrupolo TT**, que da la parte físicamente observable de la radiación gravitacional.

11.6 Sistema binario

Consideramos un sistema binario compuesto por dos masas m_1 y m_2 , con vectores de posición $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ definidos respecto al centro de masa. Definimos

$$\text{Posición relativa: } \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad (11.183)$$

$$\text{Masa total: } m = m_1 + m_2 \quad (11.184)$$

$$\text{Masa reducida: } \eta = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \quad (11.185)$$

Las posiciones individuales en función de $\mathbf{r}$ son

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m} \mathbf{r} \quad (11.186)$$

Y las velocidades respectivas

$$\mathbf{v}_1 = \frac{m_2}{m} \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}_2 = -\frac{m_1}{m} \mathbf{v} \quad (11.187)$$

donde $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ es la velocidad relativa. El tensor de momento cuadrupolar del sistema es

$$I_{ij} = \int \rho(t, \mathbf{x}) x^i x^j d^3x = \sum_A m_A x_A^i x_A^j \quad (11.188)$$

$$= m_1 r_1^i r_1^j + m_2 r_2^i r_2^j = \frac{m_1 m_2}{m} r_i r_j \quad (11.189)$$

$$= \eta m r^i r^j \quad (11.190)$$

donde hemos usado que

$$r_1^i = \frac{m_2}{m} r^i, \quad r_2^i = -\frac{m_1}{m} r^i \quad (11.191)$$

Calculamos la derivada temporal segunda de I_{ij}

$$\ddot{I}_{ij} = \eta m (2v^i v^j + r^i a^j + a^i r^j) \quad (11.192)$$

donde la aceleración relativa se obtiene por la ley de Newton

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{Gm}{r^2} \mathbf{n}, \quad \text{con } \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (11.193)$$

Entonces

$$\ddot{I}_{ij} = \eta m \left[2v^i v^j - \frac{Gm}{r^2} (r^i n^j + n^i r^j) \right] \quad (11.194)$$

$$= 2\eta m \left[v^i v^j - \frac{Gm}{r} n^i n^j \right] \quad (11.195)$$

donde usamos $r^i = r n^i$. El potencial gravitacional creado por un sistema binario en movimiento no relativista a una distancia R es (11.167)

$$\bar{h}^{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{4G\eta m}{c^4 R} \left(v^i v^j - \frac{Gm}{r} n^i n^j \right) \quad (11.196)$$

Para órbitas elípticas, las coordenadas de la partícula reducida están dadas por las ecuaciones de Kepler. En coordenadas polares

$$r(\phi) = \frac{p}{1 + e \cos \phi}, \quad \dot{\phi} = \sqrt{\frac{Gm}{p^3}} (1 + e \cos \phi)^2 \quad (11.197)$$

donde p es el semilatus rectum, e es la excentricidad orbital y $0 \leq e < 1$ para órbitas elípticas. La relación entre el semieje mayor a y el semieje menor b es $e = b/a$. En el sistema orbital, definimos las siguientes bases

$$\mathbf{n} = (\cos \phi, \sin \phi, 0) \quad (11.198)$$

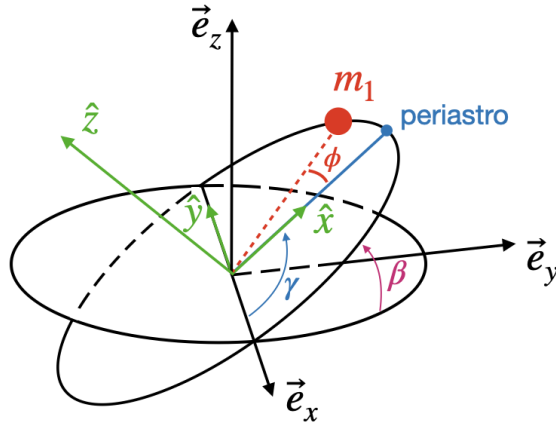
$$\boldsymbol{\lambda} = (-\sin \phi, \cos \phi, 0) \quad (11.199)$$

donde $\mathbf{n}$ apunta a lo largo del vector de separación y $\boldsymbol{\lambda}$ es perpendicular. La velocidad relativa puede escribirse como

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}(r\mathbf{n}) = \dot{r} \mathbf{n} + r\dot{\phi} \boldsymbol{\lambda} \quad (11.200)$$

El campo gravitacional emitido es, en el sistema orbital

$$h^{ij} = \frac{4G^2 m^2 \eta}{c^4 R p} \left[- (1 + e \cos \phi - e^2 \sin^2 \phi) n^i n^j + e \sin \phi (1 + e \cos \phi) (n^i \lambda^j + \lambda^i n^j) + (1 + e \cos \phi)^2 \lambda^i \lambda^j \right] \quad (11.201)$$



Para obtener las componentes físicas que ve el observador, transformamos al sistema $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, donde $\vec{e}_z$ apunta hacia el observador. La base del sistema del observador, orientado mediante los ángulos β (inclinación) y γ (fase ascendente), se define como

$$\mathbf{e}_x = (\cos \gamma, -\sin \gamma, 0) \quad (11.202)$$

$$\mathbf{e}_y = (\cos \beta \sin \gamma, \cos \beta \cos \gamma, -\sin \beta) \quad (11.203)$$

$$\mathbf{e}_z = (\sin \beta \sin \gamma, \sin \beta \cos \gamma, \cos \beta) \quad (11.204)$$

lo que implica, la transformación inversa, es decir las coordenadas $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$ en la base $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$

$$\hat{\mathbf{x}} = (\cos \gamma, \cos \beta \sin \gamma, \sin \beta \sin \gamma) \quad (11.205)$$

$$\hat{\mathbf{y}} = (-\sin \gamma, \cos \beta \cos \gamma, \sin \beta \cos \gamma) \quad (11.206)$$

$$\hat{\mathbf{z}} = (0, -\sin \beta, \cos \beta) \quad (11.207)$$

El vector de separación y su perpendicular en este sistema son

$$\mathbf{n} = \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi \hat{\mathbf{y}} = (\cos(\gamma + \phi), \cos \beta \sin(\gamma + \phi), \sin \beta \sin(\gamma + \phi)) \quad (11.208)$$

$$\mathbf{\lambda} = -\sin \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \phi \hat{\mathbf{y}} = (-\sin(\gamma + \phi), \cos \beta \cos(\gamma + \phi), \sin \beta \cos(\gamma + \phi)) \quad (11.209)$$

La proyección TT se realiza mediante el tensor

$$P^{ij} = \delta^{ij} - e_z^i e_z^j \quad (11.210)$$

El operador de proyección TT es

$$\Lambda_{kl}^{ij} = P_k^i P_l^j - \frac{1}{2} P^{ij} P_{kl} \quad (11.211)$$

Finalmente, el campo físico proyectado es

$$h_{ij}^{TT} = \Lambda_{kl}^{ij} h^{kl} \quad (11.212)$$

Las componentes físicas detectables de la onda gravitacional se extraen proyectando el campo h_{ij}^{TT} sobre la base del observador

$$\begin{aligned} h_+ \equiv h_{11}^{TT} &= \left(P_1^k P_1^l - \frac{1}{2} P_{11} P^{kl} \right) h_{kl} = \left(e_x^k e_x^l - \frac{1}{2} e_x^k e_x^l - \frac{1}{2} e_y^k e_y^l \right) h_{kl} \\ &= \frac{1}{2} (e_x^k e_x^l - e_y^k e_y^l) h_{kl} \end{aligned} \quad (11.213)$$

$$h_\times \equiv h_{12}^{TT} = \left(P_1^k P_2^l - \frac{1}{2} P_{12} P^{kl} \right) h_{kl} = e_x^k e_y^l h_{kl} = \frac{1}{2} (e_x^k e_x^l + e_y^k e_y^l) h_{kl} \quad (11.214)$$

Usando (11.201) y (11.208,11.209), la amplitud total se factoriza como

$$h_+ = h_0 H_+, \quad h_\times = h_0 H_\times \quad (11.215)$$

donde

$$h_0 = \frac{2G^2 m^2 \eta}{c^4 R p} \quad (11.216)$$

y las funciones angulares H_+ y $H_\times$ contienen la dependencia en los ángulos β , γ , la fase orbital ϕ , y la excentricidad e

$$\begin{aligned} H_+ = & - (1 + \cos^2 \beta) \left[\cos(2\phi + 2\gamma) + \frac{5}{4} e \cos(\phi + 2\gamma) + \frac{e}{4} \cos(3\phi + 2\gamma) + \frac{e^2}{2} \cos(2\gamma) \right] \\ & + \frac{e}{2} \sin^2 \beta \cos(\phi + \gamma) \end{aligned} \quad (11.217)$$

$$H_\times = -2 \cos \beta \left[\sin(2\phi + 2\gamma) + \frac{5}{4} e \sin(\phi + 2\gamma) + \frac{e}{4} \sin(3\phi + 2\gamma) + \frac{e^2}{2} \sin(2\gamma) \right] \quad (11.218)$$

La fase orbital $\phi(t)$ puede determinarse mediante la ecuación de Kepler (para órbitas elípticas)

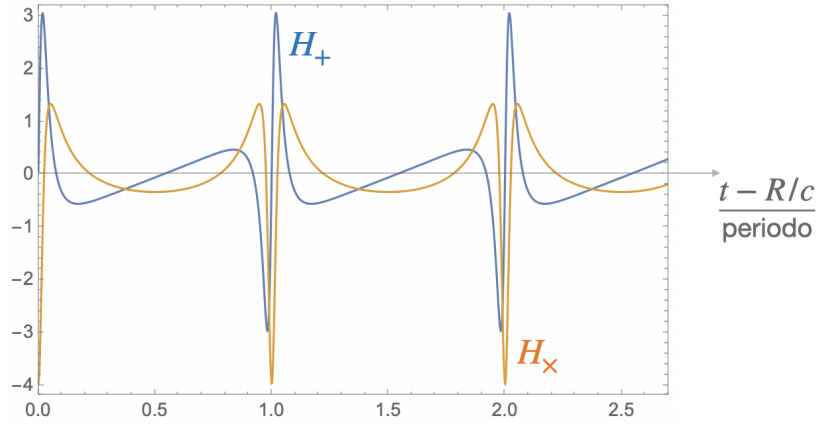
$$\dot{\phi}(t) = \sqrt{\frac{Gm}{p^3}} (1 + e \cos \phi)^2 \quad (11.219)$$

Esto permite reconstruir la forma de onda completa en función del tiempo, mediante la sustitución $\phi = \phi(t - R/c)$, es decir, evaluada en tiempo retardado.

Para un sistema binario con los siguientes parámetros

$$e = 0.7, \quad \beta = 30^\circ, \quad \gamma = 45^\circ,$$

la onda gravitacional se emite con mayor intensidad cerca del periastro, donde la separación es mínima y la velocidad orbital máxima. La señal es por tanto asimétrica, con picos agudos cerca del periastro, y decae suavemente en el resto de la órbita.



12. Radiación gravitacional

12.1 Energía

En relatividad general, definir una noción local de energía para el campo gravitacional no es sencillo. A diferencia del electromagnetismo, no existe un tensor de energía-momento del campo gravitacional bien definido que sea local, covariante y tensorial. Esto se debe a que, *localmente*, siempre se puede elegir un observador libre y un sistema de coordenadas donde la métrica sea la de Minkowski: $g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu}$. En ese marco, la curvatura y por tanto la *gravedad* desaparecen localmente, lo que sugiere que **no hay energía gravitacional bien definida de manera local**. En nuestro contexto, en el régimen de ondas gravitacionales débiles, podemos expandir las ecuaciones de Einstein en potencias de la perturbación $h_{\mu\nu}$

$$G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^{(1)} + G_{\mu\nu}^{(2)} + \dots \quad (12.1)$$

donde $G_{\mu\nu}^{(1)}$ es lineal en $h_{\mu\nu}$, $G_{\mu\nu}^{(2)}$ es cuadrático (y contiene la energía de la propia onda). La ecuación de Einstein se escribe

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{8\pi G}{c^4} (T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}) \quad (12.2)$$

donde $t_{\mu\nu}$ se interpreta como un **pseudo-tensor** de energía-momento del campo gravitacional, y está dado por

$$t_{\mu\nu} = -\frac{c^4}{8\pi G} G_{\mu\nu}^{(2)} + \dots \quad (12.3)$$

Esta estructura es análoga al electromagnetismo (cuadrático) donde el tensor de energía-momento tiene forma

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\alpha} F_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \quad (12.4)$$

En espacio plano ($\mathbb{R}^{1,3}$), se cumple

$$\partial^{\mu} t_{\mu\nu} = 0 \quad (12.5)$$

Sin embargo, $t_{\mu\nu}$ *no es un tensor verdadero* es decir que no se transforma covariantemente bajo cambios de coordenadas. Además contiene derivadas de segundo orden de $h_{\mu\nu}$, lo que introduce ambigüedades ya que una energía potencial no debería tener derivadas. Para resolver estas dificultades, se toma el promedio espacial (o temporal) de $G_{\mu\nu}^{(2)}$ sobre una región suficientemente grande comparada con la longitud de onda de la onda gravitacional

$$t_{\mu\nu} = -\frac{c^4}{8\pi G} \langle G_{\mu\nu}^{(2)} \rangle \quad (12.6)$$

Este procedimiento define una cantidad *efectiva* de energía-momento del campo gravitacional, válida en el régimen de ondas gravitacionales débiles en espacio casi plano. Al segundo orden en perturbaciones, tenemos

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu}^{(2)} = & \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu h^{\alpha\beta} + h^{\alpha\beta} \partial_{\mu\nu} h_{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta} \partial_{\nu\beta} h_{\alpha\mu} - h^{\alpha\beta} \partial_{\mu\beta} h_{\alpha\nu} + h^{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta} h_{\mu\nu} \right. \\
& + \partial^\beta h_\nu{}^\alpha \partial_\beta h_{\alpha\mu} - \partial^\beta h_\nu{}^\alpha \partial_\alpha h_{\beta\mu} - \partial_\beta h^{\alpha\beta} \partial_\nu h_{\alpha\mu} + \partial_\beta h^{\alpha\beta} \partial_\alpha h_{\mu\nu} - \partial_\beta h^{\alpha\beta} \partial_\mu h_{\alpha\nu} \\
& \left. - \frac{1}{2} \partial^\alpha h \partial_\alpha h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial^\alpha h \partial_\nu h_{\alpha\mu} + \frac{1}{2} \partial^\alpha h \partial_\mu h_{\alpha\nu} \right] \quad (12.7)
\end{aligned}$$

Como no tenemos una dirección privilegiada

$$\langle \partial_\mu V \rangle = 0 \quad (12.8)$$

Por lo tanto

$$\langle \partial_\mu (VW) \rangle = \langle (\partial_\mu V)W \rangle + \langle V \partial_\mu W \rangle = 0 \quad (12.9)$$

lo que implica

$$\langle (\partial_\mu V)W \rangle = -\langle V \partial_\mu W \rangle \quad (12.10)$$

Usando esta condición, el gauge de Lorenz $\partial^\mu h_{\mu\nu} = 0$ y la condición TT, $h = 0$, $\square h_{\mu\nu} = 0$ obtenemos

$$\langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle = -\frac{1}{4} \langle \partial_\rho h_{\alpha\beta} \partial^\rho h^{\alpha\beta} \rangle \quad (12.11)$$

De forma igual, obtenemos $\langle R^{(2)} \rangle = 0$. Entonces la expresión para la densidad de energía-momento gravitacional es

$$t_{\mu\nu} = \frac{c^4}{32\pi G} \langle \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu h^{\alpha\beta} \rangle \quad (12.12)$$

Ante una transformación de coordenadas infinitesimal

$$h_{\mu\nu} \mapsto h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu \quad (12.13)$$

obtenemos

$$t_{\mu\nu} \mapsto \frac{c^4}{32\pi G} \langle (\partial_\mu h_{\alpha\beta} - \partial_{\mu\alpha} \xi_\beta - \partial_{\mu\beta} \xi_\alpha) \partial_\nu h^{\alpha\beta} + (\partial_\nu h_{\alpha\beta} - \partial_{\nu\alpha} \xi_\beta - \partial_{\nu\beta} \xi_\alpha) \partial_\mu h^{\alpha\beta} \rangle \quad (12.14)$$

$$\mapsto t_{\mu\nu} - \frac{c^4}{32\pi G} \langle \partial_{\mu\alpha} \xi_\beta \partial_\nu h^{\alpha\beta} + \partial_{\mu\beta} \xi_\alpha \partial_\nu h^{\alpha\beta} + \partial_{\nu\alpha} \xi_\beta \partial_\mu h^{\alpha\beta} + \partial_{\nu\beta} \xi_\alpha \partial_\mu h^{\alpha\beta} \rangle \quad (12.15)$$

$$\mapsto t_{\mu\nu} \quad (12.16)$$

es decir que $t_{\mu\nu}$ es invariante bajo transformaciones lineales de coordenadas. En el gauge TT tenemos

$$t_{\mu\nu} = \frac{c^4}{32\pi G} \left\langle \partial_\mu h_{\alpha\beta}^{TT} \partial_\nu h_{TT}^{\alpha\beta} \right\rangle \quad (12.17)$$

Entonces la densidad de energía queda

$$t_{00} = \frac{c^2}{32\pi G} \left\langle \dot{h}_{ij}^{TT} \dot{h}_{ij}^{TT} \right\rangle \quad (12.18)$$

Usando la descomposición en polarizaciones h_+ y $h_\times$, tenemos

$$t_{00} = \frac{c^2}{16\pi G} \left\langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \right\rangle \quad (12.19)$$

12.2 Flujo de energía

Se puede, de manera similar, definir el flujo de energía. Sabemos que $\partial_\mu t^{\mu\nu} = 0$, por lo tanto para $\nu = 0$

$$\partial_\mu t^{\mu 0} = 0 \quad (12.20)$$

Integrando sobre un cierto volumen V

$$\int d^3x (\partial_0 t^{00} + \partial_i t^{i0}) = 0 \quad (12.21)$$

La energía gravitacional contenida en el volumen V es

$$E_V = \int_V d^3x t^{00} \quad (12.22)$$

y su variación temporal es

$$\frac{1}{c} \frac{dE_V}{dt} = \int_V d^3x \partial_0 t^{00} = - \int_V d^3x \partial_i t^{i0} = - \int_S dA n_i t^{i0} \quad (12.23)$$

con $dA = r^2 d\Omega$. Como $\hat{n} = \hat{r}$

$$\frac{dE_V}{dt} = -c \int_S dA t^{0r} \quad (12.24)$$

donde el flujo energético radial es (12.17)

$$t^{0r} = \frac{c^4}{32\pi G} \left\langle \partial^0 h_{ij}^{TT} \partial^r h_{ij}^{TT} \right\rangle \quad (12.25)$$

Recordando que $h_{ij}^{TT}(t, r)$ tiene la forma

$$h_{ij}^{TT}(t, r) = \frac{1}{r} f_{ij} \left(t - \frac{r}{c} \right) \quad (12.26)$$

por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial r} h_{ij}^{TT}(t, r) = -\frac{1}{r^2} f_{ij} \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial f_{ij}(t - r/c)}{\partial r} \quad (12.27)$$

$$= -\frac{1}{r^2} f_{ij} \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{1}{rc} \frac{\partial f_{ij}(t - r/c)}{\partial t} \quad (12.28)$$

$$= -\frac{1}{rc} \frac{\partial f_{ij}(t - r/c)}{\partial t} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad (12.29)$$

$$= -\frac{1}{c} \frac{\partial h_{ij}^{TT}(t, r)}{\partial t} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad (12.30)$$

$$= -\partial_0 h_{ij}^{TT}(t, r) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad (12.31)$$

$$= \partial^0 h_{ij}^{TT}(t, r) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad (12.32)$$

lo que implica

$$t^{0r} = \frac{c^4}{32\pi G} \langle \partial^0 h_{ij}^{TT} \partial^0 h_{ij}^{TT} \rangle = t^{00} \quad (12.33)$$

lo que nos muestra que (12.24)

$$\frac{dE_V}{dt} = -c \int_S dA t^{00} < 0 \quad (12.34)$$

Por lo tanto, tenemos una pérdida de energía por parte del sistema. También podemos obtener la potencia total radiada integrando sobre la esfera la energía que se recibe, es decir, $\dot{E} = -\dot{E}_V$, lo que corresponde a la energía perdida.

$$P \equiv \frac{dE}{dt} = c \int_S dA t^{00} = \frac{c^3 r^2}{32\pi G} \int d\Omega \langle \dot{h}_{ij}^{TT} \dot{h}_{ij}^{TT} \rangle \quad (12.35)$$

Esta integral parece ser difícil, pero usando la expresión cuadrupolar (11.182)

$$h_{ij}^{TT}(t, \mathbf{x}) = \frac{2G}{c^4 r} \Lambda_{ij,kl}(\mathbf{n}) \ddot{Q}_{kl} \left(t - \frac{r}{c} \right) \quad (12.36)$$

lo que implica

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c^3 r^2}{32\pi G} \langle \dot{h}_{ij}^{TT} \dot{h}_{ij}^{TT} \rangle \quad (12.37)$$

$$= \frac{G}{8\pi c^5} \Lambda_{ij,kl}(\mathbf{n}) \Lambda_{ij,mn}(\mathbf{n}) \left\langle \ddot{Q}_{kl} \left(t - \frac{r}{c} \right) \ddot{Q}_{mn} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right\rangle \quad (12.38)$$

La integral es más facil, ya que la parte promediada no depende de los ángulos

$$P = \frac{G}{8\pi c^5} \left\langle \ddot{Q}_{kl} \left(t - \frac{r}{c} \right) \ddot{Q}_{mn} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right\rangle \int d\Omega \Lambda_{ij,kl}(\mathbf{n}) \Lambda_{ij,mn}(\mathbf{n}) \quad (12.39)$$

Para integrar en ángulos se usa

$$\int d\Omega n_i n_j = \frac{4\pi}{3} \delta_{ij}, \quad (12.40)$$

$$\int d\Omega n_i n_j n_k n_l = \frac{4\pi}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (12.41)$$

lo que permite obtener

$$\int d\Omega \Lambda_{ij,kl}(\mathbf{n}) \Lambda_{ij,mn}(\mathbf{n}) = \int d\Omega \Lambda_{kl,mn}(\mathbf{n}) = \frac{2\pi}{15} (11\delta_{kl} \delta_{mn} - 4\delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{kn} \delta_{ml}) \quad (12.42)$$

lo que permite obtener el resultado final

$$P = \frac{G}{5c^5} \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{ij} \rangle \quad (12.43)$$

Lo que corresponde a un resultado obtenido por Einstein en el año 1916.

12.3 Hulse y Taylor

Queremos aplicar este resultado a un sistema binario, compuesto por dos estrellas que consideraremos puntuales y sin rotación sobre sí mismas, ya que se encuentran suficientemente alejadas entre sí. Usando la relación entre el tensor de inercia y momento cuadrupolar (11.178)

$$Q_{ij} \equiv I_{ij} - \frac{1}{3} I_{kk} \delta_{ij} \quad (12.44)$$

obtenemos

$$\ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{ij} = \ddot{I}_{ij} \ddot{I}_{ij} - \frac{2}{3} (\ddot{I}_{kk})^2 + \frac{1}{3} (\ddot{I}_{kk})^2 = \ddot{I}_{ij} \ddot{I}_{ij} - \frac{1}{3} (\ddot{I}_{kk})^2 \quad (12.45)$$

es decir

$$P = \frac{G}{5c^5} \left\langle \ddot{I}_{ij} \ddot{I}_{ij} - \frac{1}{3} (\ddot{I}_{kk})^2 \right\rangle \quad (12.46)$$

Para el sistema binario

$$I_{ij} = \sum_A m_A x_A^i x_A^j = \eta m r_i r_j = \eta m r^2 n_i n_j \quad (12.47)$$

y con $\mathbf{n} = (\cos \phi, \sin \phi, 0)$, obtenemos

$$I_{11} = \eta m r^2 \cos^2 \phi \quad (12.48)$$

$$I_{12} = \eta m r^2 \cos \phi \sin \phi \quad (12.49)$$

$$I_{22} = \eta m r^2 \sin^2 \phi \quad (12.50)$$

pero sabemos que $r = p/1 + e \cos \phi$, lo que implica que

$$r^2 = \left(\frac{p}{1 + e \cos \phi} \right)^2 = \frac{a^2(1 - e^2)^2}{(1 + e \cos \phi)^2} \quad (12.51)$$

es decir

$$I_{11} = \eta m a^2 (1 - e^2)^2 \frac{\cos^2 \phi}{(1 + e \cos \phi)^2} \quad (12.52)$$

$$I_{12} = \eta m a^2 (1 - e^2)^2 \frac{\cos \phi \sin \phi}{(1 + e \cos \phi)^2} \quad (12.53)$$

$$I_{22} = \eta m a^2 (1 - e^2)^2 \frac{\sin^2 \phi}{(1 + e \cos \phi)^2} \quad (12.54)$$

y

$$\dot{\phi} = \sqrt{\frac{Gm}{p^3}} (1 + e \cos \phi)^2 = \sqrt{\frac{Gm}{a^3}} (1 - e^2)^{-3/2} (1 + e \cos \phi)^2 \quad (12.55)$$

lo que implica

$$\ddot{I}_{11} = \sqrt{\frac{4G^3\eta^2m^5}{a^5(1-e^2)^5}} (1 + e \cos \phi)^2 [2 \sin 2\phi + 3e \sin \phi \cos^2 \phi] \quad (12.56)$$

$$\ddot{I}_{12} = \sqrt{\frac{4G^3\eta^2m^5}{a^5(1-e^2)^5}} (1 + e \cos \phi)^2 [-2 \cos 2\phi + e \cos \phi (1 - 3 \cos^2 \phi)] \quad (12.57)$$

$$\ddot{I}_{22} = \sqrt{\frac{4G^3\eta^2m^5}{a^5(1-e^2)^5}} (1 + e \cos \phi)^2 [-2 \sin 2\phi - e \sin \phi (1 + 3 \cos^2 \phi)] \quad (12.58)$$

lo que nos permite obtener

$$P = \frac{G}{5c^5} \left[\ddot{I}_{11}^2 + \ddot{I}_{22}^2 + 2 \ddot{I}_{12}^2 - \frac{1}{3} (\ddot{I}_{11} + \ddot{I}_{22})^2 \right] \quad (12.59)$$

$$= \frac{8G^4}{15c^5} \frac{\eta^2 m^5}{a^5(1-e^2)^5} (1 + e \cos \phi)^4 [12(1 + e \cos \phi)^2 + e^2 \sin^2 \phi] \quad (12.60)$$

Como vimos antes, tenemos que tomar un promedio. Una buena manera de hacerlo es introducir el período de la órbita

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T P dt = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} P \frac{d\phi}{\dot{\phi}} = \frac{1}{T} \sqrt{\frac{a^3}{Gm}} (1 - e^2)^{3/2} \int_0^{2\pi} d\phi (1 + e \cos \phi)^{-2} P(\phi) \quad (12.61)$$

La tercera ley de Kepler dice que

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{Gm} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{Gm}} \quad (12.62)$$

Por lo tanto, el promedio de la potencia es

$$\bar{P} = (1 - e^2)^{3/2} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} (1 + e \cos \phi)^{-2} P(\phi) \quad (12.63)$$

Este calculo fue hecho por **Peters y Mathews** en el año 1963 y encontraron que

$$\bar{P} = \frac{32G^4\eta^2m^5}{5c^5a^5} f(e), \quad \text{con } f(e) = \frac{1}{(1 - e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4 \right) \quad (12.64)$$

De acuerdo con las leyes de Kepler, la energía determina el período de una órbita. Partimos de

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \text{con } \omega^2 = \frac{Gm}{a^3}, \quad \text{y } a = \frac{Gm\eta}{2|E|} \quad (12.65)$$

Sustituyendo a en T

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{Gm}} \left(\frac{Gm\eta}{2} \right)^{3/2} (-E)^{-3/2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} Gm\eta^{3/2} (-E)^{-3/2} \quad (12.66)$$

Derivando logarítmicamente

$$\frac{\dot{T}}{T} = -\frac{3}{2} \frac{\dot{E}}{E} = \frac{3}{2} \frac{P}{E} = -\frac{3}{2} \frac{32G^4\eta^2m^5}{5c^5a^5} \frac{2a}{Gm\eta} f(e) \quad (12.67)$$

$$= -\frac{96G^3\eta m^2}{5c^5} \left(\frac{\omega^2}{Gm} \right)^{4/3} f(e) = -\frac{96G^{5/3}\eta m^{2/3}}{5c^5} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^{8/3} f(e) \quad (12.68)$$

Nota que esta fórmula puede usarse para verificar si la constante de gravitación varía con el tiempo, es decir, si $G = G(t)$ afecta a T . Definimos la constante

$$\alpha = -\frac{96G^{5/3}\eta m^{2/3}}{5c^5} (2\pi)^{8/3} f(e) \quad (12.69)$$

Entonces la evolución temporal del período es $\dot{T}T^{5/3} = \alpha$ que podemos integrar

$$T^{8/3} = \frac{8}{3}\alpha t + T_0^{8/3} \Rightarrow T = T_0 \left(1 + \frac{8\alpha}{3T_0^{8/3}}t \right)^{3/8} \quad (12.70)$$

Si $\alpha \ll 1$, se puede aproximar

$$T \approx T_0 \left(1 + \frac{\alpha}{T_0^{8/3}}t \right) \Rightarrow \Delta T = \frac{\alpha}{T_0^{5/3}}t \quad (12.71)$$

Hulse y Taylor consideraron un sistema con los siguientes parámetros

$$m_1 = 1.387 M_\odot \quad a = 1.95 \times 10^9 \text{ m} \quad (12.72)$$

$$m_2 = 2.8283 M_\odot \quad e = 0.617 \quad (12.73)$$

A partir de estos valores se obtiene $\alpha \simeq -6.16 \times 10^{-5} \text{ s}^{5/3}$ y con un periodo de $T_0 = 27933.3 \text{ s}$ se obtiene

$$\Delta T \simeq 76 \mu\text{s} \quad \text{por año} \quad (12.74)$$

Este sistema binario presenta una periodicidad que disminuye en aproximadamente $76 \mu\text{s}$ cada año. Por este resultado, de detección indirecta de ondas gravitacionales, Hulse y Taylor recibieron el Premio Nobel de Física en el año 1993.

12.4 Amplitud de onda

Considerando una aproximación para la amplitud h , se tiene

$$\langle \dot{h}_+^2 \rangle = \langle \dot{h}_\times^2 \rangle \simeq (2\pi f h)^2 \quad (12.75)$$

donde f es la frecuencia de la onda y h su amplitud. La energía por unidad de área y por unidad de tiempo (flujo) es (12.35)

$$F = \frac{dE}{dAdt} = \frac{c^3}{16\pi G} \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \rangle \simeq \frac{c^3\pi}{2G} f^2 h^2 \quad (12.76)$$

Durante un tiempo τ , la energía total emitida es $\Delta E = 4\pi r^2 F \tau$ es decir

$$h = \sqrt{\frac{\Delta E}{mc^2}} \sqrt{\frac{Gm}{2\pi^2 r^2 \tau f^2 c}} \quad (12.77)$$

Definiendo el parámetro de eficiencia $\varepsilon = \sqrt{\frac{\Delta E}{mc^2}}$, se obtiene

$$h = \sqrt{\frac{GM_\odot}{2\pi^2 c}} \sqrt{\frac{m}{M_\odot}} \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \frac{1}{f} \sqrt{\varepsilon} \quad (12.78)$$

Expresado numéricamente

$$h = 1.5 \times 10^{-19} \sqrt{\frac{m}{M_{\odot}}} \left(\frac{1 \text{ Mpc}}{r} \right) \left(\frac{1 \text{ kHz}}{f} \right) \sqrt{\frac{1 \text{ ms}}{\tau}} \sqrt{\varepsilon} \quad (12.79)$$

Si el sistema emite toda su energía en ondas gravitacionales: $\varepsilon = 1$. Si no: $\varepsilon < 1$. Algunos valores típicos es por ejemplo para estrellas de neutrones, se suele tomar $f = 1 \text{ kHz}$, $\tau = 1 \text{ ms}$.

Fuente periódica	f (Hz)	Distancia	Amplitud en la Tierra
Sistema binario	10^{-4}	10 pc	10^{-20}
Nova	$10^{-2} \rightarrow 1$	500 pc	10^{-22}
Rotación de estrella de neutrones	60	2 kpc	$< 10^{-24}$
Formación de agujero negro $\sim 10^4 M_{\odot}$	0.1	3 Gpc	10^{-19}
Supernova	10^3	10 kpc	10^{-18}