1. El tensor de Riemann en dos dimensiones

1. En dos dimensiones, el tensor de Riemann tiene las simetrías

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\nu\mu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\rho} = R_{\rho\sigma\mu\nu}$$

y cumple la identidad de Bianchi. En 2D, el número de componentes independientes se reduce a uno solo. Hacer el mismo razonamiento que en clase. Por lo tanto, debe ser proporcional a la combinación

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} \propto g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}$$

ya que tienen las mismas simetrías.

Contrayendo con $g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}$, se obtiene que el coeficiente de proporcionalidad es $R/2$, con lo que se llega a

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{R}{2}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})$$

2. La métrica de la esfera de radio a es

$$g_{\theta\theta} = a^2, \qquad g_{\phi\phi} = a^2\sin^2\theta$$

Calculamos los símbolos de Christoffel no nulos

$$\begin{aligned}\Gamma^{\theta}_{\phi\phi} &= -\sin\theta\cos\theta,\\ \Gamma^{\phi}_{\theta\phi} &= \Gamma^{\phi}_{\phi\theta} = \cot\theta\end{aligned}$$

Luego, el único componente independiente del tensor de Riemann es

$$\begin{aligned}R_{\theta\phi\theta}{}^{\phi} &= \partial_\phi\Gamma^{\phi}_{\theta\theta} - \partial_\theta\Gamma^{\phi}_{\phi\theta} + \Gamma^{\mu}_{\theta\theta}\Gamma^{\phi}_{\phi\mu} - \Gamma^{\mu}_{\phi\theta}\Gamma^{\phi}_{\theta\mu}\\ &= -\partial_\theta\cot\theta - \cot^2\theta\\ &= 1\end{aligned}$$

El tensor de Ricci es

$$\begin{aligned}R_{\theta\theta} &= R_{\theta\mu\theta}{}^{\mu} = R_{\theta\phi\theta}{}^{\phi} = 1\\ R_{\theta\phi} &= R_{\phi\theta} = R_{\theta\mu\phi}{}^{\mu} = 0\\ R_{\phi\phi} &= R_{\phi\mu\phi}{}^{\mu} = R_{\phi\theta\phi}{}^{\theta} = g^{\theta\theta}R_{\phi\theta\phi\theta} = g^{\theta\theta}R_{\theta\phi\theta\phi} = g^{\theta\theta}g_{\phi\phi}R_{\theta\phi\theta}{}^{\phi} = \sin^2\theta\end{aligned}$$

y finalmente el escalar de Ricci

$$R = g^{\theta\theta}R_{\theta\theta} + g^{\phi\phi}R_{\phi\phi} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{2}{a^2}$$

Por otro lado, multiplicando por $g_{\phi\phi} = a^2\sin^2\theta$, el tensor de Riemann, se obtiene

$$R_{\theta\phi\theta\phi} = g_{\phi\mu}R_{\theta\phi\theta}{}^{\mu} = g_{\phi\phi}R_{\theta\phi\theta}{}^{\phi} = a^2\sin^2\theta$$

Entonces, podemos verificar la igualdad

$$\begin{aligned}R_{\theta\phi\theta\phi} &= \frac{R}{2}(g_{\theta\theta}g_{\phi\phi} - g^2_{\theta\phi})\\ &= \frac{1}{a^2}(a^2)(a^2\sin^2\theta) = a^2\sin^2\theta\end{aligned}$$

2. Geodésicas en la 2-esfera

1. El lagrangiano es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} R^2 \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\, \dot{\phi}^2 \right)$$

donde el punto denota derivada respecto al parámetro afín. El factor $1/2$ es adicional con respecto a los apuntes pero obviamente no cambia el problema, solamente simplifica los factores 2 obtenidos por las derivadas.

2. Como ϕ es cíclica, su momento conjugado se conserva

$$p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = R^2 \sin^2\theta\, \dot{\phi} = \ell = \text{cte}$$

3. Un parámetro a lo largo de una geodésica es *afín* si la ecuación geodésica toma su forma estándar y sencilla

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0.$$

Un parámetro λ es afín si la ecuación anterior se cumple sin ningún término extra (como una fuerza efectiva). Esto sucede cuando

$$\lambda \mapsto s = a\lambda + b$$

es decir, una transformación lineal (afín) del parámetro. Por lo tanto, todos los parámetros afines están relacionados mediante un reescalamiento y un desplazamiento.

Si el parámetro no es afín, es decir, si $s = f(\lambda)$, entonces la ecuación de las geodésicas se transforma en

$$\begin{aligned}
\frac{dx^\mu}{d\lambda} &= f'(\lambda) \frac{dx^\mu}{ds}, \\
\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} &= f''(\lambda) \frac{dx^\mu}{ds} + f'(\lambda)^2 \frac{d^2 x^\mu}{ds^2}, \\
\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\rho}{ds} &= \frac{f''(\lambda)}{f'(\lambda)^2} \frac{dx^\mu}{ds}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si estamos siguiendo una geodésica, sabemos que la norma del vector tangente se conserva

$$\frac{d}{d\lambda} \left(g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \right) = 0$$

lo cual implica que

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = A$$

donde A es una constante. Como tenemos libertad de elegir otro parámetro afín, tomamos $s = \sqrt{A}\,\lambda$, lo que transforma la normalización en

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 1$$

Esta es la misma razón por la que, en el caso de una geodésica tipo tiempo, se suele escribir

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = -c^2$$

ya que en ese caso la norma es negativa y se fija a $-c^2$ (o simplemente a -1 en unidades naturales).

En conclusión, normalizando al parámetro de longitud de arco

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \Rightarrow \dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\phi}^2 = \frac{1}{R^2}$$

Sustituyendo la conservación de ℓ, se tiene

$$\dot{\theta}^2 + \frac{\ell^2}{R^4 \sin^2\theta} = \frac{1}{R^2}$$

Cambiando de variable a $\theta(\phi)$ mediante

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{d\phi}\frac{d\phi}{ds} = \dot{\phi}\theta'$$

se obtiene finalmente

$$\left(\frac{d\theta}{d\phi}\right)^2 = \left(\frac{1}{R^2\dot{\phi}^2} - \frac{\ell^2}{R^4\sin^2\theta\dot{\phi}^2}\right) = \sin^2\theta\frac{R^2\sin^2\theta - \ell^2}{\ell^2}$$

4. Podemos escribir la ecuación previa de la forma siguiente

$$d\phi = \frac{\ell}{\sin\theta\sqrt{R^2\sin^2\theta - \ell^2}}\,d\theta$$

Hemos considerado una sola raíz, la otra es equivalente a reemplazar ϕ por $-\phi$.

Sea $u = \cot\theta$; entonces $\sin\theta = 1/\sqrt{1+u^2}$ y $d\theta = -du/(1+u^2)$. Sustituyendo en nuestra ecuación, obtenemos

$$d\phi = -\frac{\ell}{\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\sqrt{\frac{R^2}{1+u^2} - \ell^2}}\,\frac{du}{1+u^2} = -\frac{\ell\,du}{\sqrt{R^2 - \ell^2\big(1+u^2\big)}} = -\frac{\ell}{\sqrt{R^2-\ell^2}}\frac{du}{\sqrt{1 - \frac{\ell^2}{R^2-\ell^2}u^2}}$$

lo que podemos integrar

$$\phi = -\arcsin\Big(\frac{\ell}{\sqrt{R^2-\ell^2}}u\Big) + \text{constante}$$

Tenemos

$$-\frac{\ell}{\sqrt{R^2-\ell^2}}\cot\theta = \sin\Big(\phi - \text{constante}\Big)$$

Obviamente podemos definir constante $= \phi_0 - \pi/2$

$$-\frac{\ell}{\sqrt{R^2-\ell^2}}\cot\theta = \cos(\phi - \phi_0)$$

y cuando $\phi = \phi_0$, tenemos $\theta = \theta_0$ es decir

$$-\frac{\ell}{\sqrt{R^2-\ell^2}} = \tan(\theta_0)$$

y finalmente

$$\frac{\cot\theta}{\cot\theta_0} = \cos(\phi - \phi_0)$$

Son sobre la esfera segmentos de círculos máximos, es decir, intersecciones de la esfera con planos que pasan por el centro.