1. Transporte paralelo

La ecuación de transporte es

$$\frac{dV^\sigma}{d\tau} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}V^\nu = 0$$

y los símbolos de Christoffel son

$$\Gamma^\phi_{\theta\phi} = \Gamma^\phi_{\phi\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,, \quad \Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\cos\theta\sin\theta$$

lo que nos permite escribir

$$\frac{dV^\theta}{d\tau} - \cos\theta\sin\theta\frac{d\phi}{d\tau}V^\phi = 0$$
$$\frac{dV^\phi}{d\tau} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{d\theta}{d\tau}V^\phi + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{d\phi}{d\tau}V^\theta = 0$$

Cuando se transporta a lo largo de una curva θ constante, tenemos

$$\frac{d\phi}{d\tau} = 1\,, \quad \frac{d\theta}{d\tau} = 0$$

lo que nos da

$$\frac{dV^\theta}{d\tau} - \cos\theta\sin\theta V^\phi = 0$$
$$\frac{dV^\phi}{d\tau} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}V^\theta = 0$$

Como θ es constante, podemos integrar fácilmente estas ecuaciones.

$$V^\theta(\tau) = V^\theta(0)\cos\Big[\cos(\theta)\tau\Big] + V^\phi(0)\sin\theta\sin\Big[\cos(\theta)\tau\Big] \tag{1}$$
$$V^\phi(\tau) = V^\phi(0)\cos\Big[\cos(\theta)\tau\Big] - \frac{V^\theta(0)}{\sin\theta}\sin\Big[\cos(\theta)\tau\Big] \tag{2}$$

De forma similar, cuando se mueve a lo largo de una curva ϕ constante, tenemos

$$\frac{dV^\theta}{d\tau} = 0$$
$$\frac{dV^\phi}{d\tau} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}V^\phi = 0$$

lo que implica

$$V^\theta(\tau) = V^\theta(0) \tag{3}$$
$$V^\phi(\tau) = V^\phi(0)\frac{\sin\theta_0}{\sin\theta} \tag{4}$$

con θ_0 el ángulo inicial. Podemos ahorra aplicar estos resultados

1. En el primer movimiento, estaremos a θ constante. Usando (1,2) el vector final es

   $$V^\theta = 0\,, \quad V^\phi = 1$$

   El vector no ha cambiado

2. En el segundo movimiento, estaremos a ϕ constante, lo que implica a partir de (3,4)

$$V^\theta = 0\,, \quad V^\phi = \frac{1}{\sin \pi/3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

3. Para el tercer movimiento, estamos de nuevo a θ constante. Usando (1,2) obtenemos

$$V^\theta = -\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\,, \quad V^\phi = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

4. Finalmente en el último movimiento, usamos las ecuaciones (3,4)

$$V^\theta = -\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\,, \quad V^\phi = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

Se observa que el vector está todavía normalizado.

2. Transporte paralelo 2

1. Ver ejercicio previo

2. Siguiendo los resultados de (1,2) dele ejercicio previo, tenemos

$$\begin{aligned} V^\theta(\phi) &= \sin\theta_0 \sin\Big[\cos(\theta_0)\phi\Big] \\ V^\phi(\phi) &= \cos\Big[\cos(\theta_0)\phi\Big] \end{aligned}$$

3. El vector inicial es $V^a(0) = (0, 1)$ y el vector final (después de una vuelta completa $\phi = 2\pi$) es

$$V^a(2\pi) = (\sin\theta_0 \sin(2\pi\cos\theta_0), \cos(2\pi\cos\theta_0))$$

   El producto escalar entre los vectores inicial y final, usando la métrica de la esfera $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$, es

$$g_{ab}V^a(0)V^b(2\pi) = g_{\phi\phi}V^\phi(0)V^\phi(2\pi) = \sin^2\theta_0 \cdot 1 \cdot \cos(2\pi\cos\theta_0)$$

   La norma del vector transportado se conserva durante el transporte paralelo, y también es

$$\|V(0)\| = \|V(2\pi)\| = \sqrt{g_{ab}V^aV^b} = \sqrt{\sin^2\theta_0}$$

   Entonces, el coseno del ángulo α entre ambos vectores es

$$\cos\alpha = \frac{g_{ab}V^a(0)V^b(2\pi)}{\|V(0)\|\|V(2\pi)\|} = \frac{\sin^2\theta_0\cos(2\pi\cos\theta_0)}{\sin^2\theta_0} = \cos(2\pi\cos\theta_0)$$

   Por lo tanto, el ángulo entre el vector inicial y el final es

$$\alpha = \arccos(\cos(2\pi\cos\theta_0)) = |2\pi\cos\theta_0| \qquad \text{(módulo } 2\pi\text{)}$$

   Se está transportando un vector en la dirección ϕ positiva, es decir, hacia el este. Esto significa que la base de coordenadas ∂_ϕ gira 2π a medida que damos la vuelta al bucle. Por lo tanto, el cambio de ángulo es

$$\Delta\phi = 2\pi(1 - \cos\theta_0).$$

4. El cambio de dirección está asociado a la curvatura, pero en 2D la curvatura está asociada a lo que se llama la curvatura de Gauss (K)

$$R_{abcd} = K(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc})$$

y por lo tanto, tenemos

$$\Delta\phi = \int K \, dA$$

con A el area.

El paralelo $\theta = \theta_0$ encierra un casquete esférico de área

$$A = 2\pi\,(1 - \cos\theta_0)$$

Este valor es exactamente el ángulo en el que el vector se rota después del transporte paralelo, lo cual es coherente con la integral de la curvatura de Gauss sobre el área encerrada

$$\Delta\phi = \int_{\text{casquete}} K \, dA = A$$

ya que $K = 1/R^2 = 1$ y que el radio es $R = 1$.