1. Error en la colocación de índices

∇^μ no es una notación válida sin contexto. En realidad, significa $g^{\mu\rho}\nabla_\rho$, por lo que

$$\nabla^\mu V_\nu = g^{\mu\rho}\nabla_\rho V_\nu = g^{\mu\rho}\left(\partial_\rho V_\nu - \Gamma^\lambda_{\rho\nu}V_\lambda\right)$$

2. Derivada covariante

(a) En coordenadas cartesianas, el espacio es plano y la métrica es constante. Además, los símbolos de Christoffel se anulan

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = 0$$

Entonces, la derivada covariante es simplemente

$$\nabla_\nu V^\mu = \partial_\nu V^\mu = 0$$

(b) En coordenadas curvilíneas (por ejemplo, coordenadas polares), el mismo campo vectorial V^μ tiene componentes distintas debido al cambio de base. Aunque geométricamente representa el mismo campo, los símbolos de Christoffel ya no son cero.
La derivada covariante toma la forma

$$\nabla_\nu V^\mu = \partial_\nu V^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}V^\lambda = 0$$

ya que bajo una transformación de coordenadas, la derivada covariante se encuentra multiplicada por algunos factores. Pero si la derivada es cero en el sistema de coordenadas originales, quedará cero en cualquier otro sistema de coordenadas.
Por tanto, en general

$$\partial_\nu V^\mu = -\Gamma^\mu_{\nu\lambda}V^\lambda$$

(c) Para el vector $\vec{V} = \vec{e}_x = (1,0)$ sus derivadas en coordenadas cartesianas son obviamente nulas. Por lo tanto

$$\partial_\nu V^\mu = -\Gamma^\mu_{\nu\lambda}V^\lambda$$

En coordenadas polares

$$\vec{e}_x = \cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta$$

es decir $V^1 = \cos\theta$ y $V^2 = -\sin\theta/r$. si queremos que su norma sigue siendo 1. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\partial_r V^1 &= 0 \\
\partial_\theta V^1 &= -\sin\theta \\
\partial_r V^2 &= \sin\theta/r^2 \\
\partial_\theta V^2 &= -\cos\theta/r
\end{aligned}$$

Se puede comprobar que

$$\begin{aligned}
\partial_r V^1 &= -\Gamma^1_{1\lambda}V^\lambda = -\frac{1}{2}g^{11}\partial_\lambda g_{11}V^\lambda = 0 \\
\partial_\theta V^1 &= -\Gamma^1_{2\lambda}V^\lambda = \frac{1}{2}\partial_r g_{22}V^2 = -\sin\theta
\end{aligned}$$

$$\partial_r V^2 = -\Gamma^2_{1\lambda} V^\lambda = -\frac{1}{2} g^{22} \partial_r g_{22} V^2 = \sin\theta / r^2$$
$$\partial_\theta V^2 = -\Gamma^2_{2\lambda} V^\lambda = -\frac{1}{2} g^{22} \partial_r g_{22} V^1 = -\cos\theta / r$$

3. Determinante

$$\partial_\lambda \sqrt{-g} = \frac{1}{2\sqrt{-g}}\,\partial_\lambda(-g) = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\,\partial_\lambda g$$

Luego, sustituyendo la identidad para $\partial_\lambda g$:

$$\partial_\lambda \sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \cdot g \cdot g^{\mu\nu} \partial_\lambda g_{\mu\nu} = -\frac{\sqrt{-g}}{2}\, g^{\mu\nu} \partial_\lambda g_{\mu\nu}$$

Por otro lado

$$\Gamma^\mu_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\lambda g_{\nu\mu} - \partial_\nu g_{\mu\lambda}\right)$$

La primera y la tercera derivadas se cancelan al contraer μ con ν, quedando:

$$\Gamma^\mu_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\lambda g_{\nu\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\lambda g_{\mu\nu}$$

lo que nos permite concluir.

4. Divergencia

Tenemos

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu V^\mu &= \partial_\mu V^\mu + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} V^\lambda \\
&= \partial_\mu V^\mu + \left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\partial_\mu \sqrt{-g}\right) V^\mu \\
&= \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\sqrt{-g}\,\partial_\mu V^\mu + V^\mu\,\partial_\mu \sqrt{-g}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\partial_\mu \left(\sqrt{-g}\, V^\mu\right)
\end{aligned}$$

5. Contracción

$$A^{\mu\nu} B_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(A^{\mu\nu} B_{\mu\nu} + A^{\nu\mu} B_{\nu\mu}\right)$$

Como $A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu}$ y $B_{\nu\mu} = -B_{\mu\nu}$, entonces:

$$A^{\mu\nu} B_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(A^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - A^{\mu\nu} B_{\mu\nu}\right) = 0$$

6. Derivada covariante de un tensor $(0,2)$

Usando la regla de Leibniz:

$$\nabla_\lambda (A_{\mu\nu} B^\mu C^\nu) = (\nabla_\lambda A_{\mu\nu}) B^\mu C^\nu + A_{\mu\nu} (\nabla_\lambda B^\mu) C^\nu + A_{\mu\nu} B^\mu (\nabla_\lambda C^\nu)$$

$$= (\nabla_\lambda A_{\mu\nu})B^\mu C^\nu + A_{\mu\nu}(\partial_\lambda B^\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\rho}B^\rho)C^\nu + A_{\mu\nu}B^\mu(\partial_\lambda C^\nu + \Gamma^\nu_{\lambda\sigma}C^\sigma)$$

Por otro lado, si expandimos directamente la derivada parcial:

$$\partial_\lambda(A_{\mu\nu}B^\mu C^\nu) = (\partial_\lambda A_{\mu\nu})B^\mu C^\nu + A_{\mu\nu}\partial_\lambda B^\mu C^\nu + A_{\mu\nu}B^\mu\partial_\lambda C^\nu$$

Pero como $\partial_\lambda(A_{\mu\nu}B^\mu C^\nu) = \nabla_\lambda(A_{\mu\nu}B^\mu C^\nu)$. Comparando ambos lados y cancelando los términos comunes, obtenemos:

$$(\nabla_\lambda A_{\mu\nu})B^\mu C^\nu = (\partial_\lambda A_{\mu\nu})B^\mu C^\nu - A_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\mu}B^\mu C^\nu - A_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda\nu}B^\mu C^\nu$$

Factorizando $B^\mu C^\nu$

$$\nabla_\lambda A_{\mu\nu} = \partial_\lambda A_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\lambda\mu}A_{\rho\nu} - \Gamma^\sigma_{\lambda\nu}A_{\mu\sigma}$$