1. El tensor de Riemann en dos dimensiones

En dos dimensiones, el tensor de Riemann tiene menos componentes independientes que en dimensiones superiores.

1. Demuestre que en 2 dimensiones el tensor de Riemann se puede expresar completamente en función del escalar de curvatura R, es decir, que existe la relación

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{R}{2}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})$$

2. Verifique esta identidad mediante un cálculo directo para la esfera de radio a, con métrica en coordenadas esféricas dada por

$$ds^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$$

2. Geodésicas en la 2-esfera

Considere la 2-esfera de radio a, con métrica en coordenadas esféricas dada por

$$ds^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$$

1. Escriba el lagrangiano correspondiente a las ecuaciones de geodésicas.
2. Muestre que hay una constante de movimiento asociada a la coordenada cíclica ϕ, y obtenga su expresión.
3. Usando la reparametrización de la curva en longitud de arco s, encuentre la ecuación que describe la trayectoria $\theta(\phi)$ de una geodésica.
4. Demuestre que las geodésicas son soluciones de la ecuación

$$\frac{\cot\theta}{\cot\theta_0} = \cos(\phi - \phi_0)$$