1. Transporte paralelo

Considera la 2-esfera unitaria con la métrica

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2$$

Definimos el siguiente camino cerrado que comienza y termina en el punto $A = (\theta = \pi/2, \phi = 0)$:

1. Moverse a lo largo del ecuador $\theta = \pi/2$ desde $\phi = 0$ hasta $\phi = \pi/4$ (punto B).
2. Subir por el meridiano $\phi = \pi/4$ desde $\theta = \pi/2$ hasta $\theta = \pi/3$ (punto C).
3. Moverse hacia el oeste a lo largo del paralelo $\theta = \pi/3$ desde $\phi = \pi/4$ hasta $\phi = 0$ (punto D).
4. Bajar por el meridiano $\phi = 0$ desde $\theta = \pi/3$ hasta $\theta = \pi/2$ (regreso al punto A).

Sea V^μ un vector tangente a la esfera en A, inicialmente:

$$V^\theta = 0, \quad V^\phi = 1.$$

2. Transporte paralelo 2

Consideremos la 2-esfera unitaria S^2, con coordenadas esféricas (θ, ϕ) y métrica inducida

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2$$

Sea un vector tangente $V^a(\phi)$ que es transportado paralelamente a lo largo de un círculo de latitud constante $\theta = \theta_0$, con $\phi \in [0, 2\pi]$.

1. Escriba las ecuaciones explícitas que satisfacen $V^\theta(\phi)$ y $V^\phi(\phi)$.
2. Resuelva el sistema con la condición inicial $V^a(0) = (0, 1)$, es decir, el vector inicialmente apunta en la dirección creciente de ϕ.
3. Calcule el ángulo entre el vector inicial y el final luego de una vuelta completa.
4. Verifique que la rotación del vector es $\Delta\phi = 2\pi(1 - \cos\theta_0)$, e interprete este resultado geométricamente.