1. Error en la colocación de índices

Una persona que no ha aprendido sobre los índices escribe:

$$\nabla^\mu V_\nu = \partial^\mu V_\nu - \Gamma^\mu_{\nu\lambda} V^\lambda$$

Corrige esta expresión

2. Derivada covariante

Sea V^μ un campo vectorial en el espacio-tiempo de Minkowski, expresado en coordenadas cartesianas, tal que

$$\partial_\nu V^\mu = 0$$

(a) Calcula la derivada covariante $\nabla_\nu V^\mu$ en coordenadas cartesianas. ¿Cuál es su valor?
(b) Ahora considera el mismo campo en coordenadas curvilíneas (por ejemplo, coordenadas polares o esféricas). Calcula $\nabla_\nu V^\mu$ nuevamente.
¿La derivada parcial sigue siendo cero? Obtener una relación entre la derivada parcial y la conexión.
(c) Usar este resultado para el vector constante $\vec{e}_x$ en coordenadas cartesianas y obtener sus derivadas parciales en coordenadas polares.

3. Determinante

Asumiendo una fórmula que vamos a ver en clase

$$\partial_\lambda g = g\, g^{\mu\nu}\, \partial_\lambda g_{\mu\nu}$$

donde $g = \det(g_{\mu\nu})$, demostrar que

$$\Gamma^\mu_{\mu\lambda} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\, \partial_\lambda \sqrt{-g}$$

4. Divergencia

Sea V^μ un campo vectorial definido en una variedad con métrica $g_{\mu\nu}$, conexión compatible con la métrica y libre de torsión. Demuestra que:

$$\nabla_\mu V^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}}\, \partial_\mu \left(\sqrt{-g}\, V^\mu\right)$$

donde $g = \det(g_{\mu\nu})$.

5. Contracción

Sea $A^{\mu\nu}$ un tensor simétrico, es decir $A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu}$, y $B_{\mu\nu}$ un tensor antisimétrico, $B_{\mu\nu} = -B_{\nu\mu}$. Demuestra que:

$$A^{\mu\nu} B_{\mu\nu} = 0$$

6. Derivada covariante de un tensor $(0, 2)$

Sea $A_{\mu\nu}B^{\mu}C^{\nu}$ un escalar construido a partir de un tensor covariante $A_{\mu\nu}$, y dos vectores contravariantes B^{μ} y C^{ν}. Sabiendo que la derivada covariante de un vector contravariante es:

$$\nabla_{\lambda}B^{\mu} = \partial_{\lambda}B^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\rho}B^{\rho} \quad \text{y} \quad \nabla_{\lambda}C^{\nu} = \partial_{\lambda}C^{\nu} + \Gamma^{\nu}_{\lambda\sigma}C^{\sigma}$$

y que la derivada covariante de un escalar es simplemente su derivada parcial:

$$\nabla_{\lambda}(A_{\mu\nu}B^{\mu}C^{\nu}) = \partial_{\lambda}(A_{\mu\nu}B^{\mu}C^{\nu})$$

obtén una expresión para $\nabla_{\lambda}A_{\mu\nu}$.