1. Vector tangente como derivada direccional

Sea $f(x,y) = x^2y + \sin(xy)$, y consideramos el vector en el punto $p = (1,\pi)$:

$$\mathbf{v} = 2\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}.$$

Calcular $v(f)$

2. Vector vs. campo vectorial

Sea

$$\mathbf{V}(x,y) = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}.$$

(a) Encuentra $\mathbf{V}$ en el punto $p = (2,3)$.

(b) Aplica $\mathbf{V}(p)$ a la función $f(x,y) = x^2 + y^2$.

3. Campo vectorial actuando sobre una función

Sea $f(x,y) = e^{xy}$ y $\mathbf{V}(x,y) = y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$.

(a) Calcula $\mathbf{V}(f)$.

(b) Evalúalo en el punto $(1,2)$.

4. Conmutador de campos vectoriales

Sean

$$\mathbf{X} = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad \mathbf{Y} = x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Calcula $\mathbf{X}(\mathbf{Y}(f)) - \mathbf{Y}(\mathbf{X}(f))$ para una función suave $f(x,y)$.

5. Covectores (vectores del espacio cotangente)

Sea df el diferencial de $f(x,y) = x^2y + y^3$.

(a) Escribe df como combinación lineal de dx y dy.

(b) Aplica df al vector $\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial y}$ en el punto $(1,1)$.

6. Evaluar un covector sobre distintos vectores

Sea $\omega = 3dx - dy$. Calcula $\omega(\mathbf{v})$ para los siguientes vectores en $\mathbb{R}^2$:

(a) $\mathbf{v}_1 = \frac{\partial}{\partial x}$

(b) $\mathbf{v}_2 = \frac{\partial}{\partial y}$

(c) $\mathbf{v}_3 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$