

# Mecánica de Fluidos

---

**Radouane Gannouji**

*Instituto de Física,  
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso,  
Avenida Universidad 330,  
Curauma, Valparaíso, Chile*

*<https://www.fis.ucv.cl/rgannouji>  
[radouane.gannouji@pucv.cl](mailto:radouane.gannouji@pucv.cl)*

Estos apuntes de clase de la carrera en Oceanografía están basando en varios libros:

- Fluid Mechanics, "*Pijush K. Kundu, Ira M. Cohen, David R Dowling*"

Un excelente libro, un poco más avanzado que otros, pero con un real rigor matemático en la derivación de las expresiones

- Incompressible Flow, "*Ronald L. Panton*"

El libro está bien escrito, es fácil de leer y fácil de ver cómo se aplica cada tema. Pero falta un poco de rigor en las ecuaciones que uno puede encontrar en el libro previo.

- Turbulent Flows, "*Stephen B. Pope*"

Un excelente libro sobre la turbulencia, más específico que los otros libros.

- Introduction to Geophysical Fluid Dynamics: Physical and Numerical Aspects, "*Benoit Cushman-Roisin, Jean-Marie Beckers*"

Un excelente libro sobre la aplicación de la mecánica de fluidos a los océanos y la atmósfera.

---

## Contenido

<b>I</b>	<b>Fundamentos de física</b>	<b>4</b>
<b>1.</b>	<b>Mecánica newtoniana</b>	<b>4</b>
1.1	Unidades y dimensiones	4
1.2	Escalares y vectores	5
1.3	Cinética: descripción del movimiento	5
1.4	Leyes del movimiento de Newton	5
1.5	Fuerzas comunes en mecánica	6
1.6	Trabajo, energía	6
1.7	Momento lineal	7
<b>2.</b>	<b>Termodinámica</b>	<b>8</b>
2.1	Sistemas y variables termodinámicas	8
2.2	Primera Ley de la termodinámica	9
2.3	Segunda Ley de la termodinámica	10
2.4	Tercera Ley de la termodinámica	10
<b>II</b>	<b>Fundamentos de la matemática</b>	<b>11</b>
<b>3.</b>	<b>Cálculo vectorial</b>	<b>11</b>
3.1	Vectores y campos vectoriales	11
3.2	Teoremas fundamentales	13
<b>4.</b>	<b>Tensores</b>	<b>14</b>
<b>5.</b>	<b>Ecuaciones diferenciales</b>	<b>16</b>
5.1	Tipos de ecuaciones diferenciales	16
5.2	Métodos de resolución	16
5.2.1	Ecuación Diferencial de Primer Orden	16
5.2.2	Ecuación Diferencial de Segundo Orden con Coeficientes Constantes	17
<b>6.</b>	<b>El teorema de transporte de Reynolds</b>	<b>18</b>

<b>III</b>	<b>Fundamentos de mecánica de fluidos</b>	<b>21</b>
<b>7.</b>	<b>Propiedades y descripción de los fluidos</b>	<b>21</b>
7.1	Definición de un fluido	21
7.2	Descripción euleriana y lagrangiana	23
7.3	Tensor tensión	26
<b>8.</b>	<b>Las ecuaciones fundamentales de los fluidos</b>	<b>33</b>
8.1	La ecuación de conservación de la masa	33
8.2	La ecuación del momento lineal	35
8.3	La ecuación de conservación de la energía	37
<b>IV</b>	<b>Flujo incompresible</b>	<b>40</b>
<b>9.</b>	<b>Estática de los fluidos</b>	<b>41</b>
9.1	Líquido en un campo gravitatorio	42
9.2	Gas en un campo gravitatorio	42
9.3	Principio de Arquímedes	43
<b>10.</b>	<b>Flujo permanente (o estacionario)</b>	<b>45</b>
10.1	Teorema de Bernoulli	45
10.2	Teorema de Torricelli	46
10.3	Efecto Venturi	47
10.4	Tubo de Pitot	48
<b>11.</b>	<b>Flujo irrotacional</b>	<b>50</b>
11.1	Condiciones de borde	52
11.2	Flujo alrededor de una esfera	53
11.3	Paradoja de d'Alembert	55
11.4	Flujo alrededor de un disco girando	55
11.5	Efecto Magnus	57
11.6	Transformación conforme	58
<b>12.</b>	<b>Ondas</b>	<b>68</b>
12.1	Oscilación y propagación	68
12.2	Onda sonoras	70
12.3	Olas	73

<b>13. Viscosidad</b>	<b>82</b>
13.1 Flujo de Couette	84
13.2 Flujo de Poiseuille	86
13.3 Ecuaciones de Stokes	87
<b>14. Capa límite</b>	<b>93</b>
14.1 Capa límite de Blasius	96
14.2 Capa límite de Falkner-Skan	98
14.3 Separación de la capa límite	101
<b>15. Turbulencia</b>	<b>104</b>
15.1 Cascada de energía	105
15.1.1 Ecuación de la cascada de energía	107
15.2 Ecuaciones RANS	110

---

# Fundamentos de física

## 1. Mecánica newtoniana

La mecánica clásica es una de las ramas más antiguas y fundamentales de la física, dedicada a comprender las leyes del movimiento y las fuerzas que influyen en los cuerpos. El desarrollo de esta disciplina comenzó con los trabajos de Isaac Newton en el siglo XVII, cuyas leyes del movimiento y de la gravitación universal proporcionaron un marco teórico que permitió entender el comportamiento de los objetos en el espacio y el tiempo. A pesar de los avances modernos, la mecánica clásica sigue siendo esencial para una amplia variedad de aplicaciones, desde la ingeniería hasta la astronomía.

### 1.1 Unidades y dimensiones

Para describir fenómenos físicos de manera precisa, es crucial utilizar un sistema de unidades coherente. El Sistema Internacional de unidades (SI) es el más empleado en la actualidad y se basa en siete unidades fundamentales. En el contexto de la mecánica, las unidades más relevantes son el metro, el kilogramo y el segundo. El metro es la unidad de longitud, originalmente definida a partir del meridiano terrestre y ahora basada en la velocidad de la luz. El kilogramo es la unidad de masa, definida en términos de constantes físicas fundamentales. El segundo, por su parte, es la unidad de tiempo, y se basa en la frecuencia de transición de los átomos de cesio.

Además de estas unidades fundamentales, en mecánica utilizamos varias magnitudes derivadas, como la velocidad, que se mide en metros por segundo  $ms^{-1}$ , y la aceleración, medida en metros por segundo al cuadrado  $ms^{-2}$ .

## 1.2 Escalares y vectores

En la mecánica clásica, distinguimos entre magnitudes escalares y vectoriales. Las magnitudes escalares tienen únicamente magnitud (o tamaño) y no poseen dirección; ejemplos comunes incluyen la temperatura y la masa. Por otro lado, las magnitudes vectoriales, como la velocidad, la aceleración y la fuerza, se caracterizan por tener tanto magnitud como dirección. Los vectores se representan mediante flechas en diagramas o mediante símbolos como  $\vec{v}$  en ecuaciones. Para sumar vectores, se utiliza gráficamente la regla del paralelogramo o algebraicamente a través de sus componentes. Más adelante, introduciremos también otro tipo de objeto, que es el tensor, sabiendo que los escalares y los vectores son casos particulares de los tensores.

## 1.3 Cinética: descripción del movimiento

La cinética se ocupa de cómo se mueven los objetos y se centra en las variables de posición, velocidad y aceleración, que describen el estado de movimiento de un cuerpo. La posición de un objeto se define mediante un vector que indica su localización en un sistema de coordenadas. Por ejemplo, en un sistema de coordenadas cartesianas, la posición de un objeto en dos dimensiones se describe con  $(x, y)$ .

La velocidad es una magnitud vectorial que indica la tasa de cambio de la posición respecto al tiempo. Se calcula dividiendo el cambio de posición por el intervalo de tiempo, expresándose matemáticamente como  $\vec{v} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$ . La velocidad instantánea, por su parte, es la derivada de la posición con respecto al tiempo

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (1.1)$$

Usaremos en estos apuntes, ambas notaciones para los vectores,  $\mathbf{v} = \vec{v}$ .

La aceleración describe la tasa de cambio de la velocidad respecto al tiempo y se expresa como

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (1.2)$$

Este objeto es especialmente relevante para entender cómo varía el movimiento de un objeto bajo la influencia de diferentes fuerzas.

## 1.4 Leyes del movimiento de Newton

Las leyes de Newton son el fundamento de la mecánica clásica y describen la relación entre el movimiento de un cuerpo y las fuerzas que actúan sobre él. La primera ley, conocida como la ley de la inercia, establece que un objeto en reposo permanecerá en reposo, y un objeto en movimiento continuará moviéndose a velocidad constante,

a menos que una fuerza externa actúe sobre él. Esto implica que la velocidad de un objeto no cambia si la fuerza neta que actúa sobre él es cero.

La segunda ley de Newton establece que la aceleración de un objeto es directamente proporcional a la fuerza neta que actúa sobre él e inversamente proporcional a su masa. Esta relación se expresa con la ecuación

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{1.3}$$

donde  $\mathbf{F}$  es la fuerza neta,  $m$  es la masa del objeto y  $\mathbf{a}$  es la aceleración. Esta ley es esencial para resolver problemas de dinámica, en los que se analiza cómo las fuerzas afectan el movimiento de los objetos.

La tercera ley de Newton indica que para cada acción, hay una reacción igual y opuesta. Esto significa que si un objeto  $A$  ejerce una fuerza sobre un objeto  $B$ , entonces el objeto  $B$  ejercerá una fuerza de igual magnitud pero en la dirección opuesta sobre el objeto  $A$ . Esta ley explica muchas interacciones cotidianas, como el impulso que sentimos al caminar o la propulsión de un cohete.

### 1.5 Fuerzas comunes en mecánica

En la mecánica clásica, se identifican varias fuerzas fundamentales que describen las interacciones entre los objetos. La gravedad es una fuerza de atracción que actúa entre dos masas, y cerca de la superficie de la Tierra, todos los objetos experimentan una aceleración gravitatoria de aproximadamente  $9.8 \text{ ms}^{-2}$ .

La fuerza normal es la fuerza ejercida por una superficie para sostener el peso de un objeto en contacto con ella. Esta fuerza es perpendicular a la superficie y evita que los objetos se hundan en ella.

La fricción es una fuerza que se opone al movimiento relativo de dos superficies en contacto. Existen dos tipos principales de fricción: la fricción estática, que actúa sobre objetos en reposo, y la fricción cinética, que actúa sobre objetos en movimiento. La fricción es fundamental para la vida diaria, ya que sin ella, no podríamos caminar ni conducir.

### 1.6 Trabajo, energía

El concepto de trabajo en física se refiere al proceso de transferir energía mediante una fuerza que actúa a lo largo de un desplazamiento. Matemáticamente, el trabajo se define como el producto de la fuerza aplicada y el desplazamiento en la dirección de la fuerza, expresado como

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d} = Fd \cos \theta \tag{1.4}$$

donde  $W$  es el trabajo,  $\mathbf{F}$  es la fuerza,  $\mathbf{d}$  es el desplazamiento y  $\theta$  es el ángulo entre la fuerza y el desplazamiento.

La energía cinética es la energía que posee un objeto debido a su movimiento y se calcula como

$$K = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 \quad (1.5)$$

donde  $m$  es la masa del objeto y  $\mathbf{v}$  es su velocidad. La energía potencial, por otro lado, es la energía almacenada en un objeto debido a su posición en un campo de fuerzas, como el campo gravitatorio. La energía potencial gravitacional se expresa, a baja altura como

$$U = mgh \quad (1.6)$$

donde  $m$  es la masa,  $g$  es la aceleración debida a la gravedad y  $h$  es la altura sobre una referencia.

El principio de conservación de la energía establece que, en un sistema aislado, la energía total se conserva. Esto significa que la energía puede transformarse de una forma a otra, pero la cantidad total de energía permanece constante

$$E = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + U = \text{constante} \quad (1.7)$$

## 1.7 Momento lineal

El momento lineal, o impulso, es una medida de la cantidad de movimiento que tiene un objeto y se define como el producto de su masa y su velocidad

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (1.8)$$

Con el momento lineal podemos generalizar la ley (1.3)

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (1.9)$$

En caso de tener una masa constante, recubrimos la ley (1.3). De esta relación se obtiene que en ausencia de fuerzas externas, el momento total de un sistema de partículas permanece constante

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{0} \quad (1.10)$$

Es el principio de conservación del momento.

## 2. Termodinámica

La termodinámica es una rama que estudia los procesos de transferencia de energía y las transformaciones que esta experimenta, especialmente en forma de calor y trabajo. Se centra en el comportamiento de sistemas macroscópicos, es decir, aquellos formados por un gran número de partículas. A través de la termodinámica, podemos comprender fenómenos naturales y tecnológicos que van desde el funcionamiento de los motores hasta los procesos meteorológicos.

### 2.1 Sistemas y variables termodinámicas

En termodinámica, un sistema es cualquier porción del universo que elegimos estudiar. Todo lo que no es parte del sistema se considera el entorno. Los sistemas pueden ser abiertos, cerrados o aislados, dependiendo de si intercambian masa o energía con su entorno.

Desafortunadamente, la descripción microscópica de un estado de la materia puede ser muy difícil o imposible. Por esa razón, lo estudiaremos al nivel macroscópico con nociones emergentes, es decir nociones que no tienen sentido al nivel microscópico pero que aparecen como promedio al nivel macroscópico. Por ejemplo, cada partícula o molécula del fluido tiene una energía cinética, el promedio de todas estas energías microscópicas da noción a la temperatura. De la misma forma, podemos definir otras nociones emergentes como la presión que describe la fuerza media por unidad de superficie, el volumen, la densidad de masa . . .

Las propiedades macroscópicas de un sistema no son independientes porque son manifestaciones diferentes de los estados microscópicos subyacentes del sistema. El estado de un sistema se describe completamente especificando un conjunto de variables de estado, pero no todas las combinaciones de estas variables son posibles. Por ejemplo, en un gas ideal, la presión, el volumen y la temperatura están interrelacionados a través de la ley de los gases ideales. El cambio de una de estas variables afecta necesariamente a las demás para mantener la relación. Por esa razón, cuando se describe un sistema en equilibrio termodinámico tenemos una ecuación de estado que relaciona las cantidades macroscópicas emergentes. En estas situaciones, no tenemos un flujo de calor en el fluido, es decir que la temperatura es uniforme. Según el sistema y las simplificaciones que hacemos para describirlo, obtenemos diferentes ecuaciones de estado. Por ejemplo, podemos modelizar un gas por muchas partículas puntuales que se mueven aleatoriamente y que no están sujetas a interacciones entre partículas. Obviamente es un caso muy simplificado que llamamos gas ideal, por lo cual las variables de estado se

relacionan entre si según la ley de los gases ideales

$$PV = nRT \quad (2.1)$$

con  $P$  la presión,  $V$  el volumen del gas,  $T$  la temperatura y  $n$  la cantidad de sustancia del gas. Esta última cantidad se define como  $N/N_A$  con  $N$  el número de entidades elementales presentes, es decir que si tenemos un gas de protones, es el número de protones, si tenemos un gas de moléculas tal que  $H_2O$ ,  $N$  es el número de estas moléculas. Por otro lado  $N_A$  es una constante llamada constante de Avogadro,  $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ . Finalmente tenemos  $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ , la constante de los gases ideales.

Obviamente esta idealización puede ser modificada usando modelos menos simple. Por ejemplo, podemos imaginar que los elementos fundamentales de nuestro gas tienen un tamaño e una cierta interacción entre ellas. En este caso, obtenemos la ecuación de estado de Van der Waals

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = nRT \quad (2.2)$$

con  $(a, b)$  constantes que representan esta complejidad adicional y se ajustan según el gas estudiado. Para  $a = 0$  y  $b = 0$ , obtenemos el gas ideal.

Para describir el comportamiento de los sólidos a alta presión, podemos usar la ecuación de estado de Murnaghan

$$P = \frac{B}{B'} \left[ \left( \frac{V}{V_0} \right)^{-B'} - 1 \right] \quad (2.3)$$

con constantes  $(B, B', V_0)$ . Se usa como en geofísica para estudiar el interior de la Tierra o en ciencia de los materiales para experimentos de alta presión.

## 2.2 Primera Ley de la termodinámica

La primera ley de la termodinámica es una formulación del principio de conservación de la energía, adaptada para sistemas termodinámicos. Establece que la energía interna de un sistema puede cambiar mediante la transferencia de calor hacia el sistema o la realización de trabajo por el sistema. Matemáticamente, se expresa como:

$$\Delta U = W - Q \quad (2.4)$$

donde  $\Delta U$  es el cambio en la energía interna,  $Q$  es el calor perdido por el sistema y  $W$  es el trabajo realizado por las fuerzas sobre el sistema. Esta ley implica que la energía no se crea ni se destruye, sino que se transforma de una forma a otra.

### **2.3 Segunda Ley de la termodinámica**

La segunda ley de la termodinámica introduce el concepto de entropía, una medida del desorden o la aleatoriedad de un sistema. Esta ley establece que en cualquier proceso termodinámico espontáneo, la entropía total del sistema y su entorno siempre aumenta. Esto significa que los procesos naturales tienden a moverse hacia un estado de mayor desorden.

Una consecuencia importante de esta ley es la imposibilidad de construir una máquina térmica que, funcionando en un ciclo, convierta todo el calor absorbido en trabajo. Siempre habrá alguna pérdida de energía en forma de calor no utilizable.

### **2.4 Tercera Ley de la termodinámica**

La tercera ley de la termodinámica establece que al alcanzar el cero absoluto (0 Kelvin), la entropía de un cristal perfecto se aproxima a cero. Esto implica que no se puede alcanzar el cero absoluto mediante un número finito de pasos físicos, ya que requeriría la eliminación completa del desorden molecular.

# Fundamentos de la matemática

## 3. Cálculo vectorial

El cálculo vectorial es una herramienta matemática esencial para la mecánica de fluidos, ya que permite describir y analizar campos de velocidad, presión y otros parámetros importantes en la dinámica de fluidos. A continuación, se presentan los conceptos fundamentales del cálculo vectorial que son particularmente relevantes para el estudio de fluidos.

### 3.1 Vectores y campos vectoriales

En física, los vectores se utilizan para representar cantidades que tienen tanto magnitud como dirección, como la velocidad y la fuerza. Un campo vectorial asigna un vector a cada punto en un espacio. En mecánica de fluidos, los campos vectoriales describen cómo varían las propiedades del fluido en el espacio. Podemos por ejemplo, mencionar la velocidad, el campo gravitacional o eléctrico. Dentro de las operaciones básicas con vectores, podemos mencionar

- El producto punto  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  entre dos vectores se define como  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos \theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo entre  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ . Este producto da como resultado un escalar.
- El producto cruz  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  entre dos vectores produce un nuevo vector que es perpendicular a ambos. Su magnitud es  $|\mathbf{A}||\mathbf{B}| \sin \theta$ .

A partir de estas operaciones, podemos introducir 3 operadores conocidos como el gradiente, la divergencia y el rotacional. Estos operadores son esenciales para entender cómo cambian las propiedades de un fluido.

## Gradiente

El gradiente de un campo escalar  $\phi$  se denota por  $\nabla\phi$  y describe la tasa de cambio máxima de  $\phi$  en cada punto del espacio. Se define como:

$$\nabla\phi = \left( \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) \quad (3.1)$$

El gradiente es crucial para determinar la dirección y la magnitud del cambio de propiedades como la presión y la temperatura en un fluido.

## Divergencia

La divergencia de un campo vectorial  $\mathbf{F}$  se denota por  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  y mide la tasa de expansión o contracción de  $\mathbf{F}$  en un punto. Se define como:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (3.2)$$

En fluidos, la divergencia del campo de velocidad ( $\nabla \cdot \mathbf{u}$ ) indica la existencia de fuentes o sumideros en el fluido. Si  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , el flujo es incompresible. Introduciremos una notación que se utilizará a menudo en el futuro. Si llamamos,  $F_x = F_1$ ,  $F_y = F_2$  y  $F_z = F_3$  además de llamar  $x = x_1$ ,  $y = x_2$ ,  $z = x_3$ , la expresión de la divergencia se podrá escribir

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \quad (3.3)$$

Normalmente, utilizamos la notación de Einstein, para la que no se escribe el signo de la suma. En ese caso, entendemos que tenemos que hacer una suma sobre el índice  $i$  porque es un índice repetido

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \quad (3.4)$$

Por supuesto, al tratarse de un índice de suma, siempre podemos cambiarle el nombre

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \frac{\partial F_j}{\partial x_j} = \frac{\partial F_k}{\partial x_k} \quad (3.5)$$

Finalmente, usaremos también una última notación por la cual la derivada parcial se reescribe de la forma siguiente

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (3.6)$$

Por lo tanto, la divergencia se reescribe

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \partial_i F_i \quad (3.7)$$

## Rotacional

El rotacional de un campo vectorial  $\mathbf{F}$  se denota por  $\nabla \times \mathbf{F}$  y describe la tendencia de  $\mathbf{F}$  a rotar alrededor de un punto. Se define como:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \quad (3.8)$$

El rotacional es importante para analizar la vorticidad en fluidos, que describe la rotación local del fluido.

### 3.2 Teoremas fundamentales

Algunos teoremas importantes en cálculo vectorial son

#### Teorema de Gauss

El teorema de Gauss (o teorema de la divergencia) relaciona la integral de superficie de un campo vectorial con la integral de volumen de su divergencia:

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV \quad (3.9)$$

#### Teorema de Stokes

El teorema de Stokes relaciona la integral de superficie del rotacional de un campo vectorial con la integral de línea alrededor del borde de la superficie

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{A} \quad (3.10)$$

## 4. Tensores

En mecánica de fluidos, los tensores son herramientas matemáticas esenciales para describir propiedades que varían en diferentes direcciones y dimensiones, como el estrés, la deformación y el flujo. Los tensores cartesianos se utilizan para representar estas propiedades en un sistema de coordenadas cartesiano.

Un tensor es un objeto que generaliza las nociones de escalares y vectores a dimensiones superiores. Los tensores se pueden clasificar en diferentes órdenes:

- Tensores de orden 0: son simplemente escalares, como la densidad de un fluido.
- Tensores de orden 1: son vectores, como el campo de velocidad en un fluido.
- Tensores de orden 2: representan propiedades que tienen dirección y magnitud en dos dimensiones, como el tensor de esfuerzo (estrés) en un fluido.

Un tensor de orden 2 en un sistema de coordenadas cartesiano se puede representar mediante una matriz  $3 \times 3$ . Este tensor se denota comúnmente como  $\mathbf{T}$  y tiene la forma:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

donde  $T_{ij}$  son los componentes del tensor en las direcciones  $x_i$  y  $x_j$ . En mecánica de fluidos, el tensor de esfuerzo se utiliza para describir las fuerzas internas en el fluido.

Un tensor de orden 2 puede ser simétrico o antisimétrico. El tensor de esfuerzo en un fluido es generalmente simétrico, lo que significa que  $T_{ij} = T_{ji}$ . También podemos definir la traza de un tensor, es decir la suma de sus componentes diagonales. Para un tensor  $\mathbf{T}$ , la traza se define como

$$\text{Tr}(\mathbf{T}) = T_{11} + T_{22} + T_{33} = T_{ii} \quad (4.2)$$

En la última parte, hemos usado la notación de Einstein.

Un tensor interesante que ayuda en los cálculos es el de Kronecker, denotado como  $\delta_{ij}$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (4.3)$$

donde  $i$  y  $j$  son índices que pueden tomar valores que corresponden a las dimensiones del espacio. Por ejemplo, en un sistema de coordenadas tridimensional,  $i$  y  $j$  pueden ser

1, 2 o 3. En algunas situaciones, estudiaremos un problema en una o dos dimensiones también.

Se puede representar en notación matricial como la matriz identidad  $\mathbf{I}$ . En un sistema de coordenadas tridimensional, la matriz identidad se ve así:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

donde  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$  y  $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ .

Es un tensor que simplifica la manipulación de otros tensores mediante la contracción de índices. Por ejemplo

$$A_{ij}\delta_{jk} = A_{ik} \quad (4.5)$$

Tenemos una suma sobre el índice repetido  $j$ .

## 5. Ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones diferenciales van a ser fundamentales en la descripción de la dinámica del fluido. En esta sección, abordaremos los conceptos básicos de las ecuaciones diferenciales y su importancia en la mecánica de fluidos.

### 5.1 Tipos de ecuaciones diferenciales

Por un lado, tenemos las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) que involucran derivadas de una función respecto a una sola variable independiente. Generalmente se expresan en la forma:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots\right) = 0 \quad (5.1)$$

donde  $y$  es la función desconocida y  $x$  es la variable independiente. Un ejemplo simple es la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (5.2)$$

y por otro lado las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) que involucran derivadas de una función respecto a múltiples variables independientes. En mecánica de fluidos, las EDPs son cruciales para modelar fenómenos que dependen del tiempo y el espacio. Un ejemplo común es la ecuación de la difusión, o ecuación del calor

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (5.3)$$

donde  $T$  es la temperatura,  $t$  es el tiempo,  $x$  es la coordenada espacial, y  $\alpha$  es el coeficiente de difusión.

### 5.2 Métodos de resolución

En este curso, vamos a resolver principalmente EDO. Se presentan en esta sección ejemplos típicos para entender cómo resolver problemas prácticos en diversas aplicaciones.

#### 5.2.1 Ecuación Diferencial de Primer Orden

Consideremos la ecuación diferencial siguiente

$$\frac{dy}{dx} = y \quad (5.4)$$

Esta es una ecuación diferencial lineal de primer orden. Utilizaremos el método de separación de variables para resolverla.

Reescribimos la ecuación para separar las variables  $y$  y  $x$

$$\frac{dy}{y} = dx \quad (5.5)$$

Integramos ambos lados de la ecuación

$$\int \frac{1}{y} dy = \int dx \quad (5.6)$$

Las integrales resultantes son

$$\ln |y| = x + C \quad (5.7)$$

donde  $C$  es una constante de integración. Finalmente, despejamos  $y$  para obtener la solución general

$$|y| = e^{x+C} = e^C \cdot e^x \quad (5.8)$$

o denotando  $e^C$  como una nueva constante  $K$ , la solución final es

$$y = Ke^x \quad (5.9)$$

### 5.2.2 Ecuación Diferencial de Segundo Orden con Coeficientes Constantes

Consideremos la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0 \quad (5.10)$$

Esta es una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes. Buscaremos una solución de la siguiente forma  $e^{rx}$ , lo que nos permite obtener el polinomio característico asociado a la ecuación

$$r^2 - 5r + 6 = 0 \quad (5.11)$$

Resolvemos para  $r$

$$r = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \quad (5.12)$$

Obtenemos las raíces

$$r_1 = 3, \quad r_2 = 2 \quad (5.13)$$

La solución general para la ecuación diferencial es

$$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} \quad (5.14)$$

es decir

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{2x} \quad (5.15)$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes determinadas por las condiciones iniciales.

## 6. El teorema de transporte de Reynolds

Es un teorema que extiende el teorema de Leibniz a tres dimensiones. Mientras que el teorema de Leibniz aborda la variación temporal de una integral unidimensional de una función que depende del tiempo, así como la variación de los límites de integración cuando también dependen del tiempo, este teorema se aplica en el contexto tridimensional.

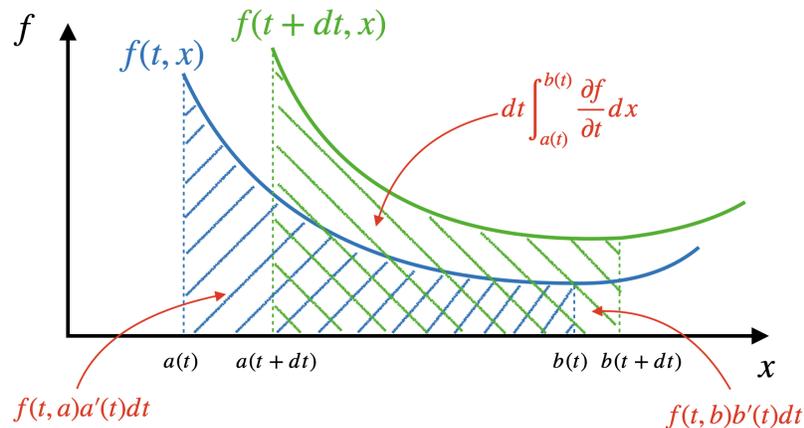
$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(t, x) dx \quad (6.1)$$

Si definimos la primitiva de  $f$  como  $F$ , esta derivada se transforma en

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(t, x) dx = \frac{d}{dt} \left( F(t, b(t)) - F(t, a(t)) \right) \quad (6.2)$$

$$= \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx + b'(t)F'(b(t)) - a'(t)F'(a(t)) \quad (6.3)$$

$$= \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx + b'(t)f(t, b) - a'(t)f(t, a) \quad (6.4)$$



Como se puede ver en el gráfico, tenemos bien el conjunto de 3 partes. De hecho,

queremos calcular

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(t, x) dx &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \left( \int_{a(t+dt)}^{b(t+dt)} f(t+dt, x) dx - \int_{a(t)}^{b(t)} f(t, x) dx \right) \\
&= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \left( \int_{a(t+dt)}^{a(t)} f(t+dt, x) dx + \int_{a(t)}^{b(t)} f(t+dt, x) dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{b(t)}^{b(t+dt)} f(t+dt, x) dx - \int_{a(t)}^{b(t)} f(t, x) dx \right) \\
&= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \left( \int_{a(t)}^{b(t)} (f(t+dt, x) - f(t, x)) dx + \int_{b(t)}^{b(t+dt)} f(t+dt, x) dx \right. \\
&\quad \left. - \int_{a(t)}^{a(t+dt)} f(t+dt, x) dx \right) \\
&= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \left( dt \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx + dt b'(t) f(t, b) - dt a'(t) f(t, a) \right) \\
&= \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx + b'(t) f(t, b) - a'(t) f(t, a)
\end{aligned}$$

Las 3 componentes son fácil obtener ya que corresponden solamente a una expansión en serie. Por ejemplo, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{a(t)}^{a(t+dt)} f(t+dt, x) dx &= F(t+dt, a(t+dt)) - F(t+dt, a(t)) \\
&\simeq F(t+dt, a(t) + dt a'(t)) - F(t+dt, a(t)) \\
&= dt a'(t) F'(t+dt, a(t)) + F(t+dt, a(t)) - F(t+dt, a(t)) \\
&= dt a'(t) F'(t+dt, a(t)) \\
&= dt a'(t) f(t+dt, a(t)) \\
&\simeq dt a'(t) f(t, a(t))
\end{aligned}$$

obviamente en este caso, era más simple ver gráficamente que esta integral corresponde a un rectángulo de altura  $f(t, a(t))$  y largo  $a(t+dt) - a(t) \simeq a'(t) dt$

Como lo hemos mencionado, el teorema de Reynolds corresponde a la generalización en 3 dimensiones. En este caso, tenemos una función  $f(t, \mathbf{x})$  integrado sobre un volumen  $V(t)$  que esta dentro de una superficie  $S(t)$ . Tenemos

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f(t, \mathbf{x}) d^3x = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \left( \int_{V(t+dt)} f(t+dt, \mathbf{x}) d^3x - \int_{V(t)} f(t, \mathbf{x}) d^3x \right)$$

Pero sabemos que

$$f(t + dt, \mathbf{x}) \simeq f(t, \mathbf{x}) + dt \frac{\partial f}{\partial t} \quad (6.5)$$

y definiremos  $V(t + dt) = V(t) + \Delta V(t)$ , lo que nos permite obtener

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} f(t, \mathbf{x}) d^3x &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \left( \int_{V(t)} \left( f(t + dt, \mathbf{x}) - f(t, \mathbf{x}) \right) d^3x + \int_{\Delta V(t)} f(t + dt, \mathbf{x}) d^3x \right) \\ &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \left( dt \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} d^3x + \int_{\Delta V(t)} f(t + dt, \mathbf{x}) d^3x \right) \\ &= \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} d^3x + \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \int_{\Delta V(t)} f(t + dt, \mathbf{x}) d^3x \\ &\simeq \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} d^3x + \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \int_{\Delta V(t)} f(t, \mathbf{x}) d^3x \end{aligned}$$

ya que  $\Delta V(t)$  es un termino infinitesimal, por lo tanto podemos aproximar  $f(t + dt, \mathbf{x})$  al orden 0 es decir  $f(t, \mathbf{x})$ .

Si consideramos que una porción de la superficie  $dS$  se desplaza a la velocidad  $\mathbf{v}(t)$ , el elemento de volumen de la figura será definido como

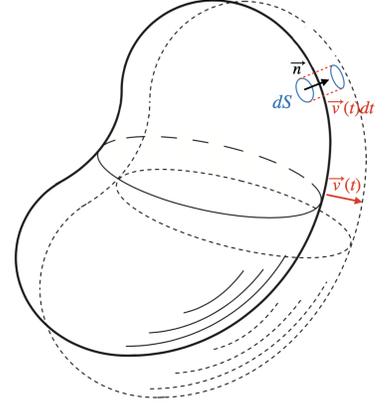
$$\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{n} dt dS$$

con  $\mathbf{n}$  el vector normal a la superficie (solo la velocidad normal cambia el volumen, la velocidad tangencial solamente gira el volumen), lo que nos permite obtener

$$\begin{aligned} \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \int_{\Delta V(t)} f(t, \mathbf{x}) d^3x &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \int_{S(t)} f(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{n} dt dS \\ &= \int_{S(t)} f(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{dS} \end{aligned}$$

con  $\mathbf{dS} = \mathbf{n} dS$ . En conclusión el teorema de transporte de Reynolds dice

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f(t, \mathbf{x}) d^3x = \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} d^3x + \int_{S(t)} f(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{dS} \quad (6.6)$$



# CAPÍTULO 3

## Fundamentos de mecánica de fluidos

### 7. Propiedades y descripción de los fluidos

#### 7.1 Definición de un fluido

Un fluido es cualquier sustancia que puede fluir y adoptar la forma de su recipiente<sup>1</sup>. Esta definición incluye tanto los líquidos como los gases. Los fluidos no tienen forma fija y se caracterizan por su capacidad para fluir y ajustarse a los límites de cualquier recipiente en el que se coloquen. A diferencia de los sólidos, que tienen una forma y un volumen definidos, los fluidos pueden deformarse fácilmente por fuerzas externas. Por ello, los fluidos no se describen a escala microscópica, sino a escala intermedia, y se describen, por tanto, como un medio continuo y no como un conjunto de partículas.

De hecho, un fluido está compuesto por un gran número de moléculas en constante movimiento que chocan entre sí, por lo que es por definición discontinuo en las escalas microscópicas. Cuando la densidad molecular del fluido y el tamaño de la región de interés son suficientemente grandes, las propiedades medias bastan para explicar los fenómenos macroscópicos y la estructura molecular discreta de la materia puede ignorarse y sustituirse por una distribución continua. Por ejemplo, en los límites del recipiente de un fluido se ejercen fuerzas debidas al bombardeo constante de las moléculas del fluido; la media estadística de estas fuerzas de colisión por unidad de superficie se denomina presión, una propiedad macroscópica. Mientras no nos interese la mecánica molecular del origen de la presión, podemos ignorar el movimiento molecular y pensar en la presión simplemente como la fuerza media por unidad de superficie ejercida por el fluido. Es un fenómeno emergente. En un medio continuo, las propiedades del

---

<sup>1</sup>Por esa razón Bruce Lee dijo "be water, my friend"

fluido como la temperatura, la densidad o la velocidad se definen en cada punto del espacio, y se sabe que estas propiedades son promedios adecuados de las características moleculares en una pequeña región que rodea el punto de interés. En resumen, tenemos diferentes estados de la materia:

Los líquidos tienen un volumen fijo pero no una forma fija; adoptan la forma de su recipiente. Las partículas en un líquido están muy juntas pero no en una posición fija, lo que les permite moverse unas junto a otras. Aunque las partículas se mueven más libremente que en los sólidos, siguen estando en estrecho contacto. Ejemplos de líquidos son el agua, el aceite y el alcohol.

Los gases, por otro lado, no tienen forma ni volumen fijos; se expanden para llenar la forma y el volumen de su recipiente. Las partículas en los gases están muy separadas y se mueven independientemente unas de otras. Se desplazan rápidamente en todas direcciones. Ejemplos comunes de gases incluyen el oxígeno, el nitrógeno y el dióxido de carbono.

En el caso de los sólidos, tienen forma y volumen fijos. Las partículas están organizadas en un patrón regular y repetitivo, y aunque vibran alrededor de posiciones fijas, no se mueven libremente. Ejemplos de sólidos son el hielo, el diamante y el hierro.

Además de estos tres estados de la materia, existen otros estados con comportamientos diferentes a nivel macroscópico, independientemente de sus propiedades microscópicas. Entre ellos se encuentra el plasma, que no tiene forma ni volumen fijos, similar a los gases. Está compuesto por electrones libres e iones, lo que lo hace conductor de electricidad. Las partículas en un plasma se mueven rápidamente y están influenciadas por campos eléctricos y magnéticos. Ejemplos de plasma incluyen el sol, los rayos y las luces fluorescentes.

El condensado de Bose-Einstein es otro estado que se manifiesta a temperaturas cercanas al cero absoluto. En este estado, las partículas ocupan el mismo espacio y estado cuántico, comportándose como una única entidad cuántica. Se mueven con extrema lentitud y exhiben características más similares a ondas que a partículas. Un ejemplo de esto es el rubidio-87 en su estado de condensado de Bose-Einstein.

Un superfluido es una fase de la materia con viscosidad cero, lo que le permite fluir sin disipar energía. Puede fluir a través de pequeños poros sin perder energía, como ocurre con el helio-3 y el helio-4 a temperaturas cercanas al cero absoluto.

El supersólido es una fase que combina propiedades de los sólidos y los superfluidos. Muestra orden cristalino como un sólido, pero puede fluir sin viscosidad como un superfluido. Un ejemplo es el helio-4 a temperaturas muy bajas y bajo condiciones específicas.

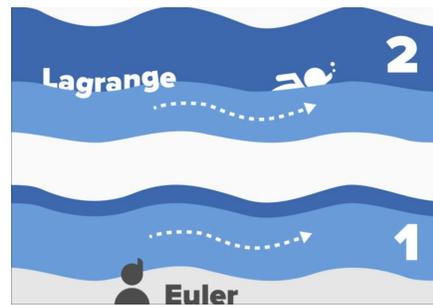
El plasma de quarks-gluones es un estado de alta energía donde los quarks y gluones, que normalmente están confinados dentro de los protones y neutrones, están libres. Este

estado se presenta a temperaturas y densidades extremadamente altas. Se cree que existió poco después del Big Bang y puede ser recreado en aceleradores de partículas.

Finalmente, la materia degenerada incluye la materia electrón-degenerada, encontrada en las enanas blancas, y la materia neutrón-degenerada, presente en las estrellas de neutrones. En este estado, las partículas se empaquetan densamente bajo una presión extrema, regida por principios de mecánica cuántica. Ejemplos de materia degenerada son el núcleo de las enanas blancas y las estrellas de neutrones.

## 7.2 Descripción euleriana y lagrangiana

La hipótesis del continuo nos permite utilizar el concepto simple de velocidad local del fluido, y ahora debemos considerar cómo se puede especificar todo el campo de flujo como un agregado de tales velocidades locales. Existen dos posibles formas de especificar el fluido. La primera, llamada de tipo euleriano. Puede considerarse que esta especificación euleriana proporciona una imagen de la distribución espacial de la velocidad del fluido (y de otras magnitudes del flujo, como la densidad y la presión) en cada instante del movimiento. La segunda especificación, llamada de tipo lagrangiano, usa las nociones deterministas de la mecánica newtoniana. Las variables de flujo como la velocidad se definen como funciones del tiempo y de las condiciones iniciales (condición inicial del centro de masa del volumen observado). Si nos enfocamos en una cantidad  $F$ , la descripción lagrangiana considerara



$$F(t, \mathbf{r}(t, \mathbf{r}_0, t_0))$$

con  $\mathbf{r}$  la posición de la partícula, lo que depende de la posición inicial  $\mathbf{r}_0$  y el tiempo inicial  $t_0$ . Por otro lado, la descripción euleriana considerara

$$F(t, x, y, z) \equiv F(t, \mathbf{x})$$

ya que observamos las cantidades en una posición fija  $\mathbf{x}$ . Cuando la partícula pasa por la posición  $\mathbf{x}$  que observamos en la descripción euleriana, deberíamos tener

$$F(t, \mathbf{x}) = F(t, \mathbf{r}(t, \mathbf{r}_0, t_0)) \tag{7.1}$$

lo que implica, usando la regla de la cadena

$$\frac{dF(t, \mathbf{x})}{dt} = \frac{\partial F(t, \mathbf{r}(t, \mathbf{r}_0, t_0))}{\partial t} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{\partial F(t, \mathbf{r}(t, \mathbf{r}_0, t_0))}{\partial \mathbf{r}} \quad (7.2)$$

$$= \frac{\partial F(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{\partial F(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \quad (7.3)$$

$$= \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla F \quad (7.4)$$

Esta última derivada se llama la derivada euleriana o derivada material y se denota  $D/Dt$

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla F \quad (7.5)$$

es la derivada que ocuparemos en este curso. De hecho, la descripción lagrangiana es casi imposible ocupar ya que seguir cada volumen de fluido durante su evolución puede rápidamente llevar a complicaciones importantes.

A estas descripciones lagrangianas y eulerianas podemos asociar líneas distintas que representan el fluido. En particular, podemos mencionar las líneas de corriente asociadas a la descripción euleriana y las líneas de trayectoria asociadas a la descripción lagrangiana.

Las líneas de corriente son curvas tangentes al vector velocidad del flujo en cada punto. Representan la dirección en la que se desplazará un elemento de fluido en un instante dado. Aunque las líneas de trayectoria son las trayectorias que siguen las partículas individuales de fluido a medida que se desplazan por el flujo. Muestran la trayectoria real seguida por una partícula específica durante un periodo de tiempo.

Puesto que las líneas de trayectoria representan el camino de una partícula dada, para obtener la posición dada la velocidad  $\mathbf{u}$  debemos resolver las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= u_x(t, x(t), y(t), z(t)) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= u_y(t, x(t), y(t), z(t)) \\ \frac{dz(t)}{dt} &= u_z(t, x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

con  $u_x$ ,  $u_y$  y  $u_z$  las componentes del vector velocidad. Por otro lado, las líneas de corriente son en todas partes tangentes al vector velocidad del fluido. Por lo tanto, debemos resolver esta misma ecuación a tiempo fijo. Lo mejor es de considerar un parámetro afín a lo largo de estas curvas que llamaremos  $s$  y por lo tanto considerar

que estas trayectorias son parametrizadas por  $s$ .

$$\begin{aligned}\frac{dx(s)}{ds} &= u_x(t, x(s), y(s), z(s)) \\ \frac{dy(s)}{ds} &= u_y(t, x(s), y(s), z(s)) \\ \frac{dz(s)}{ds} &= u_z(t, x(s), y(s), z(s))\end{aligned}$$

Como ejemplo, podemos considerar el siguiente vector velocidad en 2 dimensiones

$$u_x = yt, \quad u_y = 1$$

En el caso de las líneas de trayectoria, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= yt \\ \frac{dy}{dt} &= 1\end{aligned}$$

lo que implica  $y(t) = t + y_0$ . Usando esta ecuación en la primera, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (t + y_0)t = t^2 + y_0t \\ \Leftrightarrow x(t) &= \frac{1}{3}t^3 + \frac{y_0}{2}t^2 + x_0\end{aligned}$$

lo que implica

$$x = \frac{(y - y_0)^3}{3} + \frac{y_0(y - y_0)^2}{2} + x_0 \quad (7.6)$$

Estas curvas pueden ser dibujadas por diferentes valores de las condiciones iniciales  $x_0, y_0$ . Por otro lado, las líneas de corriente consideran el tiempo  $t$  fijo es decir

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= yt \\ \frac{dy}{ds} &= 1\end{aligned}$$

lo que implica  $y(s) = s + y_0$  aunque la otra ecuación es

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= (s + y_0)t = st + y_0t \\ \Leftrightarrow x(s) &= \frac{t}{2}s^2 + y_0ts + x_0\end{aligned}$$

lo que implica

$$x = \frac{t(y - y_0)^2}{2} + y_0 t(y - y_0) + x_0 \quad (7.7)$$

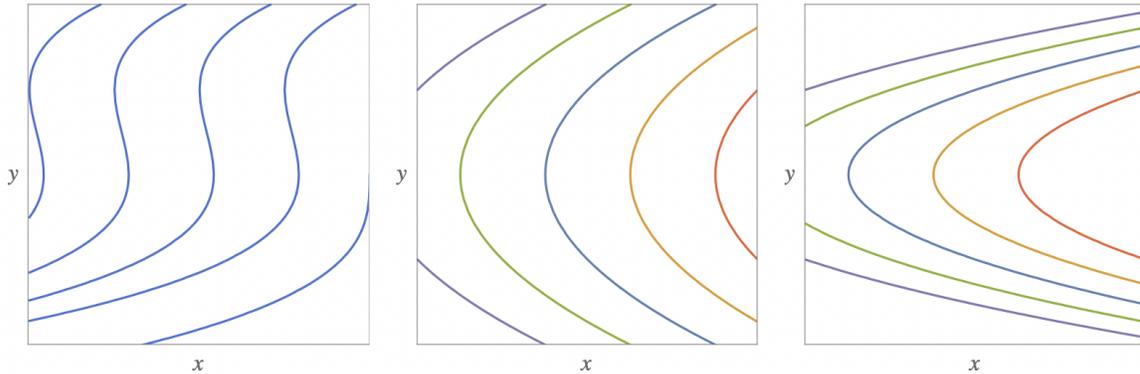


Figure 1: Líneas de trayectoria versus líneas de corriente para  $t = 1$  y  $t = 10$

Vemos que las líneas de corriente cambian en el tiempo porque la velocidad dependía del tiempo. En caso de tener un fluido con velocidad independiente del tiempo, es decir un fluido estacionario, las líneas de corriente estarían siempre idénticas e iguales a las líneas de trayectoria.

### 7.3 Tensor tensión

Esta sección es en realidad más genérica que la descripción de un fluido pero puede ser aplicado también a un sólido. En general, los fluidos están sometidos a dos tipos de fuerzas. El primer tipo es de largo alcance, es decir, disminuye con relativa lentitud a medida que aumenta la distancia entre los elementos que interactúan, y es capaz de penetrar completamente en el interior de un fluido. La gravedad es un ejemplo evidente de fuerza de largo alcance. Una consecuencia de la variación relativamente lenta de las fuerzas de largo alcance con la posición es que actúan por igual sobre todo el fluido contenido en un elemento de volumen suficientemente pequeño. En esta situación, la fuerza neta que actúa sobre el elemento es directamente proporcional a su volumen. Por esta razón, las fuerzas de largo alcance se denominan a menudo fuerzas de volumen. A continuación escribiremos la fuerza de volumen total que actúa en el tiempo  $t$  sobre el fluido contenido en un pequeño elemento de volumen de magnitud  $dV$ , centrado en un punto fijo cuyo vector de posición es  $\mathbf{r}$ , como

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{r}) dV \quad (7.8)$$

El segundo tipo de fuerza es de corto alcance, y se modela más convenientemente como transporte de momento dentro del fluido. Este transporte se debe generalmente a una combinación de fuerzas mutuas ejercidas por moléculas contiguas y flujos de momento causados por el movimiento molecular relativo. Nos vamos a enfocar en este segundo tipo de fuerzas en esta sección. Todas las fuerzas de cohesión, el hecho que cada molécula puede establecer enlaces con otras moléculas o fuerza de contacto son fuerzas de superficie. Las fuerzas de contacto no representan realmente un contacto pero la imposibilidad de cruzar una superficie porque esta superficie esta compuesta de átomos que tienen electrones que ejercen una repulsión con electrones de un objeto que quiere acercarse.

Consideremos una superficie imaginaria que pasa a través de un punto material interno y que divide el cuerpo continuo en dos segmentos. Sea  $\mathbf{n}$  el vector normal (saliente) a esta superficie y  $dS$  la superficie infinitesimal. Notamos la fuerza por unidad de superficie como  $\mathbf{T}$ , es decir

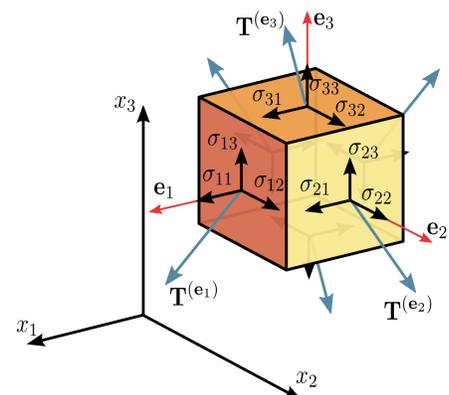
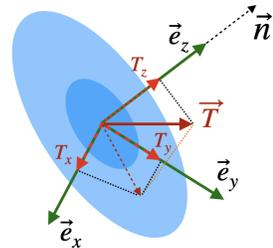
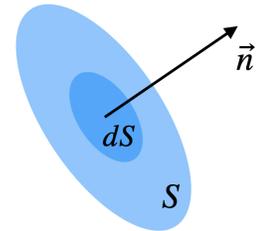
$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{F}}{dS}$$

o de forma equivalente la fuerza total sobre la superficie

$$\mathbf{F} = \int_S \mathbf{T} dS$$

El vector  $\mathbf{T}$  tiene 3 componentes como descrito en el imagen siguiente. Usualmente estas componentes del vector se separan en una parte normal a la superficie,  $T_z$ , la tensión normal aunque las componentes tangenciales se denominan tensión tangencial,  $T_x$  y  $T_y$ .

Si ahora estudiamos el efecto de estas fuerzas de superficie sobre un pequeño volumen, obtenemos una superficie en  $x$  constante, otra en  $y$  constante y la última en  $z$  constante. Para cada uno de estas superficie, podemos definir esta fuerza de superficie con 3 componentes. Por ejemplo en la dirección  $z$  o 3 como en la figura, tenemos la fuerza de superficie  $T^{(e_3)}$  que tiene 3 componentes que se llaman  $T_{31}$  en la dirección  $x$ ,  $T_{32}$  en la dirección  $y$ ,  $T_{33}$  en la dirección  $z$ . Esta última componente es la tensión normal. Según las notaciones, se escribe  $T$  o  $\sigma$



De forma similar, con las 2 otras superficie. Por lo tanto, tenemos 9 componentes que podemos representar como una matriz  $\sigma_{ij}$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

Esta matriz, se llama el tensor tensión o tensor de esfuerzos. En el caso de equilibrio, esta matriz es simétrica. Lo podemos demostrar pidiendo que el torque es nulo. Como hemos visto el tensor se representa como se ve en la gráfica lo que implica que si queremos calcular el momento de las fuerzas (torque) alrededor del eje paralelo a la dirección  $x$ , tenemos que considerar 4 términos. El torque infinitesimal se define como  $\mathbf{r} \times d\mathbf{F}$

Calculado a partir del centro  $O$  obtenemos que las fuerzas que contribuyen son las fuerzas definidas en el gráfico abajo. Las fuerzas son  $\sigma_{zy}(x, y, z = dz)dxdy$ ,  $-\sigma_{zy}(x, y, z = 0)dxdy$ ,  $\sigma_{yz}(x, y = dy, z)dxdz$  y  $-\sigma_{yz}(x, y = 0, z)dxdz$ . El signo aparece por la orientación de la superficie con la misma regla de que el vector normal está en la dirección saliente. En conclusión el torque total en la dirección  $x$  es

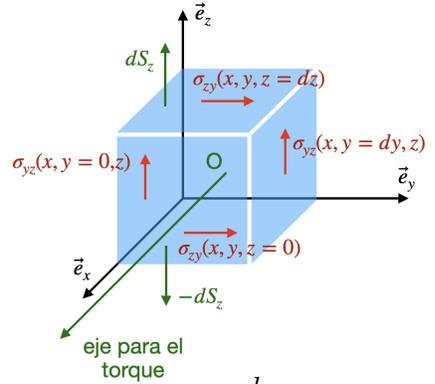
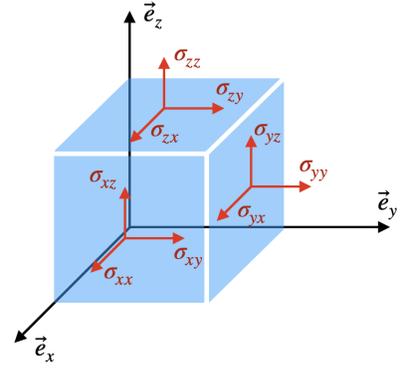
$$\begin{aligned} & -\sigma_{zy}(x, y, z = dz)dxdy \frac{dz}{2} - \sigma_{zy}(x, y, z = 0)dxdy \frac{dz}{2} + \sigma_{yz}(x, y = dy, z)dxdz \frac{dy}{2} \\ & + \sigma_{yz}(x, y = 0, z)dxdz \frac{dy}{2} \end{aligned}$$

Pero como nuestro cubo es muy pequeño, podemos hacer las aproximaciones siguientes

$$\begin{aligned} \sigma_{zy}(x, y, z = dz) & \simeq \sigma_{zy}(x, y, z = 0) \simeq \sigma_{zy}(x = 0, y = 0, z = 0) \\ \sigma_{yz}(x, y = dy, z) & \simeq \sigma_{yz}(x, y = 0, z) \simeq \sigma_{yz}(x = 0, y = 0, z = 0) \end{aligned}$$

lo que implica

$$\begin{aligned} & -\sigma_{zy}(0, 0, 0)dxdy \frac{dz}{2} - \sigma_{zy}(0, 0, 0)dxdy \frac{dz}{2} + \sigma_{yz}(0, 0, 0)dxdz \frac{dy}{2} + \sigma_{yz}(0, 0, 0)dxdz \frac{dy}{2} \\ & = dxdydz(\sigma_{yz} - \sigma_{zy}) \end{aligned}$$



Los signos vienen por el producto vectorial  $\mathbf{r} \times d\mathbf{F}$ . En conclusión, en situación de equilibrio, el torque es nulo, lo que implica  $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$ . De forma similar, con los otros torques, encontraremos que  $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$  y  $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ . Este resultado es muy genérico, no aplica solamente al estado de equilibrio. Un torque nulo implica conservación del momento angular, lo que corresponde a todos los fluidos físicos.

Una fuerza por superficie muy particular es la presión, actúa en la dirección opuesta al vector normal, es decir en la dirección entrante. Por lo tanto, se factoriza y obtenemos un segundo tensor llamado el tensor de esfuerzo viscoso,  $\tau_{ij}$

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (7.9)$$

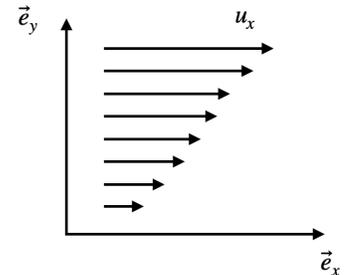
con  $\delta_{ij}$  la delta de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (7.10)$$

El tensor de esfuerzo viscoso representa la viscosidad del fluido, es decir algo relacionada con la fricción interna de un fluido, es no nulo cuando el fluido esta en movimiento. Cuando se intenta mover una capa del fluido más allá de otra, esta fricción interna resiste el movimiento. Por ejemplo, cuando agitamos miel, se nota que es más difícil mover la cuchara que cuando uno agita agua. La viscosidad es también un fenómeno emergente y no una propiedad fundamental de las partículas, aparece como un promedio de las interacciones entre las partículas, de las fuerzas de superficie previamente definidas.

Cuando un plano se desplaza respecto a otro plano, eso significa que estos planos tienen una velocidad distinta, por lo tanto aparece de forma natural la variación de la velocidad con respecto a la normal de estos planos  $\partial u_x / \partial y$  o de forma genérica el tensor de deformación

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \equiv \partial_j u_i$$



Es natural imaginar que el tensor de esfuerzo viscoso está relacionado a este tensor de deformación, lo cual puede ser escrito de forma matricial

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \partial_x u_x & \partial_y u_x & \partial_z u_x \\ \partial_x u_y & \partial_y u_y & \partial_z u_y \\ \partial_x u_z & \partial_y u_z & \partial_z u_z \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

Como cualquier tipo de matriz, puede ser descomponido en una parte simétrica y una parte antisimétrica.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = e_{ij} + \xi_{ij} \quad (7.12)$$

donde

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]$$

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]$$

La parte simétrica,  $e_{ij}$ , es la traza del tensor de esfuerzo viscoso, aunque la parte antisimétrica,  $\xi_{ij}$ , es la vorticidad  $\mathbf{w} \equiv \nabla \times \mathbf{u}$ . Nota que

$$\sum_{k=1}^3 e_{kk} = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right] = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \nabla \cdot \mathbf{u} = \text{div } \mathbf{u} \quad (7.13)$$

de donde se deduce que los elementos diagonales del tensor de deformación describen la tasa de estiramiento a lo largo de los ejes correspondientes.

En cuanto a la relación entre el tensor de esfuerzo viscoso,  $\tau_{ij}$ , y el tensor de deformación,  $\mathcal{T}_{ij}$ , hay una serie de propiedades que son importantes:

- Localidad: se dice que la relación entre  $\tau_{ij}$  y  $\mathcal{T}_{ij}$  es local si el tensor de esfuerzo viscoso sólo es función del tensor de deformaciones y de funciones de estado termodinámicas como la temperatura.
- Homogeneidad: se dice que la relación entre  $\tau_{ij}$  y  $\mathcal{T}_{ij}$  es homogénea si es la misma en todas partes. El tensor de esfuerzo viscoso puede depender del lugar  $\mathbf{x}$  sólo en la medida en que  $\mathcal{T}_{ij}$  o las funciones termodinámicas de estado dependan de  $\mathbf{x}$ . Esto distingue un fluido de un sólido, en el que el tensor de tensiones depende de la propia tensión.
- Isotropía: se dice que la relación entre  $\tau_{ij}$  y  $\mathcal{T}_{ij}$  es isotrópica si no tiene dirección preferente.
- Linealidad: se dice que la relación entre  $\tau_{ij}$  y  $\mathcal{T}_{ij}$  es lineal si la relación entre la tensión y la velocidad de deformación es lineal. Esto equivale a decir que  $\tau_{ij}$  no depende de  $\nabla^2 \mathbf{u}$  o de derivadas de orden superior.

Un fluido que es local, homogéneo e isótropo se denomina fluido de Stokes (Stokesian fluid). Un fluido de Stokes que es lineal se denomina fluido newtoniano. Los

experimentos han demostrado que la mayoría de los fluidos son newtonianos con buena aproximación<sup>2</sup>. Por lo tanto, en lo que sigue supondremos que nuestros fluidos son newtonianos, a menos que se especifique lo contrario. Para un fluido newtoniano se puede escribir una relación de proporcionalidad entre los 2 tensores

$$\tau_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 A_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \quad (7.14)$$

donde  $A_{ijkl}$  es un tensor de proporcionalidad de cuarto orden. El coeficiente tensorial  $A_{ijkl}$  adopta una forma simple cuando la estructura molecular del fluido es estadísticamente isótropa, es decir, cuando la tensión generada en un elemento del fluido por un gradiente de velocidad dado es independiente de la orientación del elemento. Todos los gases tienen una estructura isótropa, al igual que los líquidos simples, aunque las suspensiones y soluciones que contienen moléculas muy largas en forma de cadena pueden mostrar algunas preferencias direccionales debido a la alineación de estas moléculas de una manera que depende de la historia pasada del movimiento. Limitaremos la atención a los fluidos de estructura isotrópica, en cuyo caso  $A_{ijkl}$  es un tensor isotrópico, que tiene una forma en la que está ausente toda distinción direccional. Un tensor que tiene estas propiedades es el tensor de Kronecker, por lo tanto escribiremos que este tensor es proporcional

$$A_{ijkl} = \mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu' \delta_{il} \delta_{jk} + \mu'' \delta_{ij} \delta_{kl}, \quad (7.15)$$

donde  $\mu$ ,  $\mu'$  y  $\mu''$  son coeficientes, pero como  $\sigma_{ij}$  es simétrico, tenemos  $A_{ijkl} = A_{jikl}$  lo que implica  $\mu' = \mu$ . Este implica que el tensor  $A_{ijkl}$  es ahora simétrico en los índices  $(k, l)$ ,  $A_{ijkl} = A_{ijlk}$  lo que implica que

$$\sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 A_{ijkl} \xi_{kl} = 0 \quad (7.16)$$

ya que  $\xi_{kl}$  es antisimétrico. En conclusión, obtenemos

$$\tau_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \left( \mu \left( \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \right) + \mu'' \delta_{ij} \delta_{kl} \right) e_{kl} \quad (7.17)$$

$$= 2\mu e_{ij} + 3\mu'' \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 e_{kk} \quad (7.18)$$

$$= \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + 3\mu'' \nabla \cdot \mathbf{u} \delta_{ij} \quad (7.19)$$

---

<sup>2</sup>Algunos fluidos no newtoniano son por ejemplo la pasta de dientes, la pintura, la sangre, el champú ...

Es costumbre separarlo en una parte sin traza y una parte con traza

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + 3\mu'' \nabla \cdot \mathbf{u} \delta_{ij} \quad (7.20)$$

$$= \left( \frac{2}{3}\mu + 3\mu'' \right) \nabla \cdot \mathbf{u} \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} \delta_{ij} \right) \quad (7.21)$$

$$\equiv \zeta \nabla \cdot \mathbf{u} \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} \delta_{ij} \right) \quad (7.22)$$

con  $\zeta$  la viscosidad de volumen y  $\mu$  el coeficiente de viscosidad de corte. La viscosidad de volumen,  $\zeta$ , sólo es distinta de cero si el fluido tienen grados de libertad más allá de la posición y el momento, es decir, cuando son moléculas con grados de libertad rotacionales o vibracionales. Así, para un fluido de monoátomos,  $\zeta = 0$ . La viscosidad de volumen no juega ningún papel en los fluidos incompresibles. El único caso en que  $\zeta \neq 0$  es cuando un fluido formado por moléculas acaba de sufrir un gran cambio volumétrico, es decir, durante un choque. En resumen el tensor tensión, para un fluido newtoniano, se escribe

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} \delta_{ij} \right) + \zeta \nabla \cdot \mathbf{u} \delta_{ij} \quad (7.23)$$

## 8. Las ecuaciones fundamentales de los fluidos

### 8.1 La ecuación de conservación de la masa

Las ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos son las leyes de conservación, en particular la conservación de la masa y la conservación de la energía además de la ecuación de Newton o ecuación de conservación del momento lineal si no hay fuerzas. Para obtener estas ecuaciones, introducimos el concepto de volumen de materia  $V(t)$ . Este volumen se mueve y se deforma con el fluido tal que contiene siempre el mismo fluido. Ningún fluido entra o sale de este volumen. Eso implica que la superficie  $S(t)$  de este volumen, se mueve a la velocidad  $\mathbf{u}(t)$  del fluido. En este caso, la masa contenida dentro del volumen de materia es constante

$$\frac{d}{dt}m = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho(t, \mathbf{x}) d^3x = 0 \quad (8.1)$$

con  $\rho$  la densidad del fluido. Usando la ecuación de Reynolds, obtenemos

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho(t, \mathbf{x}) d^3x = \int_{V(t)} \frac{\partial \rho(t, \mathbf{x})}{\partial t} d^3x + \int_{S(t)} \rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{S} \quad (8.2)$$

Usando el teorema de la divergencia, obtenemos

$$\int_{S(t)} \rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{S} = \int_{V(t)} \nabla \cdot (\rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{u}(t, \mathbf{x})) d^3x \quad (8.3)$$

lo que implica

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho(t, \mathbf{x}) d^3x = \int_{V(t)} \left( \frac{\partial \rho(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{u}(t, \mathbf{x})) \right) d^3x = 0 \quad (8.4)$$

Como esta relación integral es para cualquier volumen  $V(t)$ , podemos concluir que la función dentro de la integral es nula

$$\frac{\partial \rho(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{u}(t, \mathbf{x})) = 0 \quad (8.5)$$

Es la ecuación de conservación de la masa o también llamada la ecuación de continuidad. Para simplificar las notaciones, olvidaremos las coordenadas de espacio y tiempo para escribir la ecuación

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (8.6)$$

Haciendo una expansión del segundo termino, obtenemos

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \rho \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho \quad (8.7)$$

es decir una ecuación de conservación de la masa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (8.8)$$

Reconocemos la derivada material

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (8.9)$$

La ecuación de conservación de la masa puede ser escrita en una de las dos formas. Esta última forma es útil cuando estudiamos un fluido incompresible, es decir  $\frac{D\rho}{Dt} = 0$  lo que implica  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ . Los fluidos con densidad constante  $\partial \rho / \partial t = 0$  son un caso particular de los fluidos incompresible,  $D\rho / Dt = 0$ .

Es interesante obtener una interpretación física de la divergencia de la velocidad

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \quad (8.10)$$

Consideramos un pequeño volumen que puede cambiar con tiempo pero con masa constante, es decir que  $\rho = m/V(t)$ , llamaremos este volumen, partícula de fluido

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\frac{m}{V(t)^2} \frac{DV(t)}{Dt} \quad (8.11)$$

lo que implica

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{V(t)} \frac{DV(t)}{Dt} \quad (8.12)$$

La divergencia de la velocidad del fluido representa la velocidad de dilatación de este volumen infinitesimal.

Si consideremos un flujo unidimensional uniforme descrito por el campo de velocidades siguiente

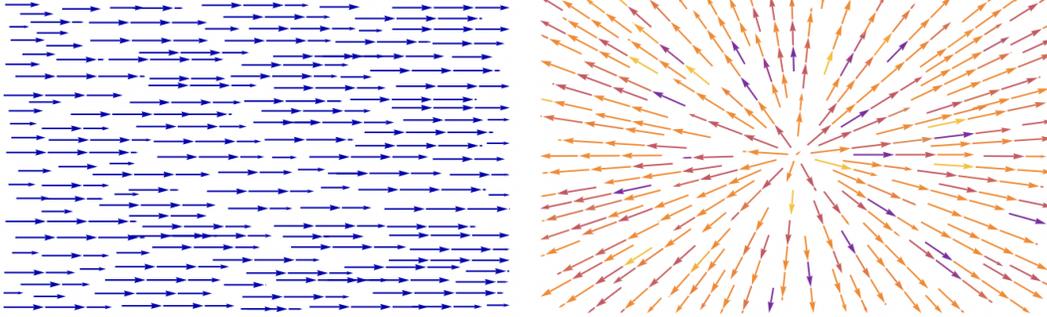
$$\mathbf{u}(t, x) = v \mathbf{e}_x \quad \text{con} \quad v = C^{te} \quad (8.13)$$

Las líneas de corriente son paralelas y el flujo tiene divergencia cero. Las partículas de fluido se mueven sin expandirse como se muestra en la figura

Como segundo ejemplo, podemos considerar el flujo descrito en coordenadas polares por el campo de velocidades siguiente

$$\mathbf{u}(t, x) = v \mathbf{u}_r \quad \text{con} \quad v = C^{te} \quad (8.14)$$

Las líneas de corriente son líneas rectas que emanan del centro y las partículas de fluido se mueven expandiéndose como se muestra en la figura, lo que demuestra que el flujo tiene divergencia positiva.



## 8.2 La ecuación del momento lineal

De forma similar, comenzamos con la ecuación de Newton escrita por un elemento de volumen  $V(t)$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{u} d^3x = \int_{V(t)} \mathbf{F}_V d^3x + \int_{S(t)} \mathbf{F}_S dS \quad (8.15)$$

con  $\mathbf{F}_V$  las fuerzas de volumen y  $\mathbf{F}_S$  las fuerzas de superficie. Las fuerzas de volumen estudiadas en este curso serán la fuerza de gravitación

$$\mathbf{F}_V = \rho \mathbf{g} \quad (8.16)$$

con  $\mathbf{g}$  el campo gravitacional producido por la Tierra. Por fluidos como un plasma, se podría introducir también las fuerzas electromagnéticas. La ecuación de Newton se escribe usando el teorema de Reynolds

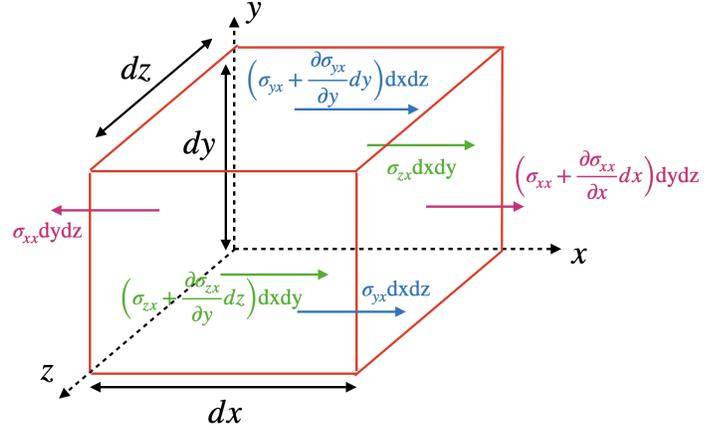
$$\int_{V(t)} \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} d^3x + \int_{S(t)} \rho \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_{V(t)} \rho \mathbf{g} d^3x + \int_{S(t)} \mathbf{F}_S dS \quad (8.17)$$

Finalmente, usando el teorema de la divergencia, obtenemos

$$\int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) d^3x + \int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \mathbf{u} u_j) d^3x = \int_{V(t)} \rho \mathbf{g} d^3x + \int_{S(t)} \mathbf{F}_S dS \quad (8.18)$$

Nos queda solamente expresar más explícitamente las fuerzas de superficie. Hemos introducido en el capítulo previo el tensor tensión, es decir los efectos de presión y viscosidad. Estas fuerzas constituyen las fuerzas de superficie.

Una vez establecido el tensor de tensiones y, por tanto, todas las fuerzas que actúan sobre la superficie de un elemento diferencial,  $dx dy dz$ , se puede evaluar la fuerza neta debida a la configuración general de tensiones y sustituirla en la ley de Newton. Lo más instructivo es evaluar por separado la fuerza total en cada una de las direcciones cartesianas. Todas las fuerzas en la dirección  $x$  se muestran en la figura y la suma de éstas fuerzas en la dirección  $x$  positiva es



$$\left\{ \sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} dy \right\} dx dz - \sigma_{yx} dx dz + \left\{ \sigma_{zx} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} dz \right\} dx dy - \sigma_{zx} dx dy + \left\{ \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right\} dy dz - \sigma_{xx} dy dz \quad (8.19)$$

y esto se convierte en

$$\left\{ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \right\} dx dy dz \quad (8.20)$$

Un análisis similar de la fuerza total en la dirección  $y$  da como resultado

$$\left\{ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} \right\} dx dy dz \quad (8.21)$$

y la fuerza total en la dirección  $z$  da como resultado

$$\left\{ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right\} dx dy dz \quad (8.22)$$

y por tanto el vector fuerza total que actúa sobre las superficies del volumen en la dirección "i" puede escribirse como

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} dx dy dz = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dx dy dz \quad (8.23)$$

En consecuencia, la ecuación (8.18) se escribe en componentes

$$\int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) d^3x + \int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) d^3x = \int_{V(t)} \rho g_i d^3x + \int_{V(t)} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} d^3x \quad (8.24)$$

es decir

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) = \rho g_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (8.25)$$

con  $\sigma_{ij}$  dado en el caso de un fluido newtoniano por la ec.(7.23)

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \mathbf{u} \delta_{ij} \right) + \zeta \operatorname{div} \mathbf{u} \delta_{ij} \quad (8.26)$$

lo que nos permite obtener la ecuación siguiente en el caso de un fluido newtoniano

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) = \rho g_i - \partial_i P + \partial_j \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \mathbf{u} \delta_{ij} \right) \right] + \partial_i (\zeta \operatorname{div} \mathbf{u}) \quad (8.27)$$

Usando la ecuación de conservación de la masa, obtenemos

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}(u_i) + \rho u_j \partial_j u_i = \rho g_i - \partial_i P + \partial_j \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \mathbf{u} \delta_{ij} \right) \right] + \partial_i (\zeta \operatorname{div} \mathbf{u}) \quad (8.28)$$

es decir la ecuación de Navier-Stokes

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho g_i - \partial_i P + \partial_j \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \mathbf{u} \delta_{ij} \right) \right] + \partial_i (\zeta \operatorname{div} \mathbf{u}) \quad (8.29)$$

### 8.3 La ecuación de conservación de la energía

De termodinámica, sabemos que por un sistema dado, la variación de la energía total del sistema es el resultado del trabajo de las fuerzas y del calor

$$dU = \delta W - \delta Q \quad (8.30)$$

con  $\delta W$  el trabajo producido por las fuerzas de volumen y de superficie sobre el fluido, aunque  $\delta Q$  es el calor transferido del fluido hacia el exterior (por eso hay un signo negativo). La energía se separa en una energía interna

$$\int_{V(t)} \rho e d^3x \quad (8.31)$$

con  $e$  la energía interna por unidad de masa, y la energía cinética

$$\int_{V(t)} \rho \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 d^3x \quad (8.32)$$

lo que nos permite escribir la segunda ley de la termodinámica

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \left( e + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) d^3x = \int_{V(t)} \mathbf{F}_V \cdot \mathbf{u} d^3x + \int_{S(t)} \mathbf{F}_S \cdot \mathbf{u} dS - \int_{S(t)} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS \quad (8.33)$$

donde en la parte derecha, tenemos el trabajo por las fuerzas de volumen,  $\mathbf{F}_V$ , y las fuerzas de superficie,  $\mathbf{F}_S$ , aunque el último termino corresponde al flujo de calor a través de la superficie  $S(t)$ . Este termino corresponde a los términos de conducción y de radiación. Para el trabajo, tenemos

$$\int_{V(t)} \mathbf{F}_V \cdot \mathbf{u} d^3x = \int_{V(t)} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} d^3x \quad (8.34)$$

para el termino de volumen, aunque la contribución del termino de superficie es

$$\int_{S(t)} \mathbf{F}_S \cdot \mathbf{u} dS = \int_{S(t)} n_i \sigma_{ij} u_j dS = \int_{V(t)} \partial_i (\sigma_{ij} u_j) d^3x \quad (8.35)$$

Finalmente, usando la ecuación de Reynolds para la parte derecha de la ec.(8.33), obtenemos

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \left( e + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) d^3x = \int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( e + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) \right] d^3x + \int_{S(t)} \rho \left( e + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \quad (8.36)$$

$$= \int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( e + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) \right] d^3x + \int_{V(t)} \partial_i \left[ \rho \left( e + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) u_i \right] d^3x \quad (8.37)$$

lo que nos permite obtener

$$\int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( e + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \rho \left( e + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) u_i \right] d^3x = \int_{V(t)} \left( \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} + \partial_i (\sigma_{ij} u_j) \right) d^3x - \int_{S(t)} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS \quad (8.38)$$

Finalmente usando de nuevo el teorema de la divergencia, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( e + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \rho \left( e + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) u_i \right] = \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} + \partial_i (\sigma_{ij} u_j) - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (8.39)$$

que podemos escribir usando la conservación de la masa

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( e + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) = \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} + \partial_i (\sigma_{ij} u_j) - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (8.40)$$

Esta ecuación puede ser simplificada, usando las ecuaciones de conservación de la masa y de Navier-Stokes. De hecho, multiplicando por la velocidad la ec.(8.25) y usando la ecuación de conservación de la masa, obtenemos

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) = \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} + u_i \partial_j \sigma_{ij} \quad (8.41)$$

De la diferencia entre las dos previas ecuaciones, obtenemos

$$\rho \frac{De}{Dt} = \partial_i (\sigma_{ij} u_j) - u_i \partial_j \sigma_{ij} - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (8.42)$$

$$= \sigma_{ij} \partial_j u_i - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (8.43)$$

$$= -P \operatorname{div} \mathbf{u} + \tau_{ij} \partial_j u_i - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (8.44)$$

En conclusión las tres ecuaciones fundamentales estudiadas en este curso son

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (8.45)$$

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho g_i - \partial_i P + \partial_j \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \mathbf{u} \delta_{ij} \right) \right] + \partial_i (\zeta \operatorname{div} \mathbf{u}) \quad (8.46)$$

$$\rho \frac{De}{Dt} = -P \operatorname{div} \mathbf{u} + \tau_{ij} \partial_j u_i - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (8.47)$$

Las fuerzas de volumen que aparecen en la ecuación de Navier-Stokes corresponden en nuestro caso a la fuerza de gravitación. Podríamos agregar también la fuerza electromagnética en caso de estudiar un plasma

$$\rho_e (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (8.48)$$

con  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  los campos eléctricos y magnéticos, y  $\rho_e$  la densidad de carga. Por otro lado, cuando trabajamos en un sistema de referencia no inercial, como la Tierra, se podrá considerar fuerzas inerciales

$$-\rho (\mathbf{a} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}) \quad (8.49)$$

con  $\mathbf{a}$  la aceleración y  $\boldsymbol{\Omega}$  la velocidad angular del sistema de referencia no inercial, en este caso de la Tierra.

# CAPÍTULO 4

## Flujo incompresible

Un fluido es incompresible cuando el volumen de sus partículas permanece constante durante el movimiento. Por tanto, se deforman sin que varíe su densidad. En este caso

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (8.50)$$

Cuando el fluido es compresible, se forma una onda de sonido. Por lo tanto, para quedarse en las condiciones de un fluido incompresible, debemos considerar fluidos con una velocidad mucho menor en comparación de la velocidad de sonido en el fluido. Por ejemplo, la velocidad de sonido en el aire es  $346 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  y en el agua es de  $1481 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

Es conveniente definir el número Mach ( $M$ ) como la velocidad del fluido sobre la velocidad de sonido. En este caso, el fluido se considera como incompresible cuando  $M < 0.3$ . Por ejemplo, para el aire, tenemos



En todo este capítulo, se considera un fluido incompresible lo que implica desde la

ecuación de conservación de la masa  $\text{div } \mathbf{u} = 0$  y

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \quad (8.51)$$

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho g_i - \partial_i P + \partial_j \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (8.52)$$

$$\rho \frac{De}{Dt} = \tau_{ij} \partial_j u_i - \text{div } \mathbf{q} \quad (8.53)$$

En consecuencia, según la relación (8.51), un fluido en flujo incompresible satisface la relación

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \oiint_{(S)} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (8.54)$$

la velocidad es conservadora del flujo. Consideramos un tubo de corriente, es decir todas las líneas de corriente que se encuentran en una curva cerrada  $\mathcal{C}$ . En este caso, la conservación del flujo de velocidad se expresa mediante

$$\iint_{(S_1)} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}_1 = \iint_{(S_2)} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}_2 \quad (8.55)$$

Si definimos la velocidad media en la sección  $S$  como  $\bar{u}$ , obtenemos

$$\bar{u}_1 S_1 = \bar{u}_2 S_2 \quad (8.56)$$

En otras palabras, en un tubo de corriente, el estrechamiento de las líneas de corriente provoca un aumento de la velocidad media.

## 9. Estática de los fluidos

En esta primera sección, consideramos un fluido que no sólo es incompresible, sino también estático, es decir, un fluido cuya velocidad es nula. En este caso, la viscosidad es nula porque aparece como la derivada de la velocidad. La única ecuación no trivial es la ecuación de Navier-Stokes reducida a

$$\rho \mathbf{g} - \nabla P = 0 \quad (9.1)$$

llamada la ecuación hidrostática.

## 9.1 Líquido en un campo gravitatorio

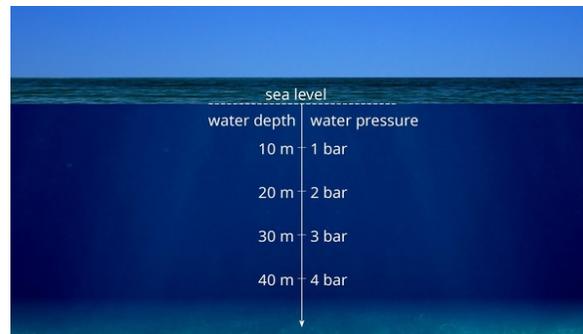
Consideremos un líquido en reposo en el campo gravitatorio y supongamos que sólo la dirección  $z$ , la altura, es relevante para nuestro problema. La ecuación se reduce a

$$\frac{dP}{dz} + \rho g = 0 \quad (9.2)$$

ya que  $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ . Como el fluido es estático, la densidad es constante, lo que nos permite integrar fácilmente esta ecuación

$$P(z) = P_0 - \rho g z \quad (9.3)$$

con  $P(0)$  la presión en  $z = 0$

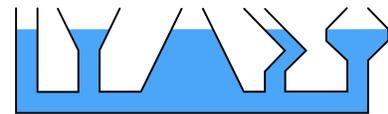


Si  $z = 0$  representa la superficie de un líquido, y  $P_0$  la presión en el aire, observamos que la presión aumenta a menudo que penetramos en el líquido, ya que  $z < 0$ . Considerando el agua que tiene una densidad de  $\rho \simeq 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ , y  $g \simeq 10 \text{ m.s}^{-2}$ , obtenemos

$$P(z) = P_0 - 10^4 z \text{ kg.m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} = P_0 - 10^4 z \text{ Pa} \quad (9.4)$$

Sabiendo que  $P_0 \simeq 10^5 \text{ Pa}$ , observamos que la presión dobla en  $z = -10 \text{ m}$ .

Como la presión depende solamente de la altura  $z$ , podemos deducir el principio de Pascal que dice que la presión es la misma en una altura dada de un líquido, lo que implica que si llenamos varios recipientes, unidos por su base y sometidos a la misma presión atmosférica, se equilibra a la misma altura en cada uno de ellos.



## 9.2 Gas en un campo gravitatorio

Dado que los gases son compresibles, necesitamos utilizar la ecuación sin asumir  $D\rho/Dt = 0$ . Pero como en este caso el gas es estático, tenemos  $\vec{u} = \vec{0}$  lo que implica  $D\rho/Dt = 0$ ,

es decir  $\partial\rho/\partial t = 0$ . Eso significa que la densidad depende solamente del espacio y no del tiempo  $\rho(\mathbf{x})$ .

Para resolver totalmente el problema, asumiremos que tenemos un gas perfecto con temperatura constante, es el modelo de atmósfera isotérmica. La ecuación de estado para un gas perfecto da

$$PV = NRT_0, \quad \text{con } T_0 \text{ constante} \quad (9.5)$$

usando la masa  $M$  de una sola molécula de gas, obtenemos  $\rho = MN/V$ , lo que nos permite escribir la ecuación de estado como

$$\rho = \frac{MP}{RT_0} \quad (9.6)$$

La ecuación de la hidrostática se convierte en

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{Mg}{RT_0}P \quad (9.7)$$

una ecuación diferencial lineal de orden uno cuya solución se escribe como

$$P(z) = P_0 e^{-z/H} \quad \text{con} \quad H = \frac{RT_0}{Mg} \quad (9.8)$$

donde  $P_0$  es la presión en  $z = 0$ . La presión, al igual que la densidad o la densidad de partículas, disminuye exponencialmente con la altitud  $z$ : es la fórmula barométrica. La cantidad  $H$  representa una distancia característica. Para el aire, si asumimos que esta compuesto por solamente nitrógeno de masa  $M \simeq 23 \cdot 10^{-27} \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ , obtenemos por  $T_0 = 300 \text{ K}$

$$H \simeq 11 \text{ km} \quad (9.9)$$

Más del 99% del gas se encuentra por debajo de la altitud  $z = 5H$ .

Como la distancia característica es en Km, la presión no cambia mucho por distancias del metro. En conclusión, la gravedad en un gas puede despreciarse a una escala de pocos metros.

### 9.3 Principio de Arquímedes

Si consideramos un sólido de volumen  $V$  inmerso en un fluido cualquiera en reposo en un campo de gravedad, la resultante de las fuerzas de presión se escribe como

$$\int_S -Pd\mathbf{S} = \int_V -\nabla P d^3x \quad (9.10)$$

Pero la ecuación hidrostática dice que

$$\nabla P = \rho \mathbf{g} \quad (9.11)$$

lo que implica que la fuerza total sobre el volumen es

$$\int_V -\rho \mathbf{g} d^3x = -\mathbf{g} \int_V \rho d^3x = -M \mathbf{g} \quad (9.12)$$

con  $M$  la masa del fluido contenida en el mismo volumen que el sólido. Esta fuerza, que se opone a la gravedad, se denomina principio de Arquímedes.

## 10. Flujo permanente (o estacionario)

Se dice que un flujo es permanente si el campo de velocidades, la presión y la densidad en cada punto no dependen del tiempo. En este caso las líneas de trayectoria y de corriente son idénticas.

En sentido estricto, un flujo estacionario es necesariamente laminar<sup>3</sup>, pero en un sentido más amplio los flujos turbulentos<sup>4</sup> se describen a veces como estacionarios en los que la media del vector velocidad (en una determinada escala temporal) permanece constante en todos los puntos (en una escala temporal mayor).

En el caso de un flujo estacionario, la ecuación de Navier-Stokes (8.52) se reduce a

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla u_i = \rho g_i - \partial_i P + \partial_j \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (10.1)$$

Obviamente la densidad es constante ya que

$$\frac{D\rho}{Dt} = \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0 \quad (10.2)$$

### 10.1 Teorema de Bernoulli

Para simplificar el problema, despreciaremos la viscosidad, lo que reduce la ecuación previa a

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla u_i = \rho g_i - \partial_i P \quad (10.3)$$

o de forma vectorial

$$\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \rho \mathbf{g} - \nabla P \quad (10.4)$$

Para integrar esta ecuación, podemos reescribir el primer término

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \nabla \frac{u^2}{2} + (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} \quad (10.5)$$

e integramos la ecuación a lo largo de una línea de corriente entre dos puntos  $A$  y  $B$ .

$$\begin{aligned} \rho \int_A^B \nabla \frac{u^2}{2} \cdot d\mathbf{l} + \rho \int_A^B (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} &= \rho \int_A^B \mathbf{g} \cdot d\mathbf{l} - \int_A^B \nabla P \cdot d\mathbf{l} \\ &= -\rho g(z(B) - z(A)) - (P(B) - P(A)) \end{aligned}$$

---

<sup>3</sup>Régimen de flujo en el que las distintas capas de un fluido se deslizan unas sobre otras sin mezclarse. Se trata de un flujo ordenado, denominado «laminar», en el que los hilos del fluido permanecen paralelos.

<sup>4</sup>Cuando la válvula está abierta al máximo, la velocidad del flujo varía erráticamente en el espacio y en el tiempo. En este caso, los hilos del flujo se entremezclan de forma compleja y caótica, lo que se conoce como flujo turbulento.

Los términos de la parte izquierda se integran fácilmente

$$\int_A^B \nabla \frac{u^2}{2} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{2}u^2(B) - \frac{1}{2}u^2(A) \quad (10.6)$$

aunque

$$\int_A^B (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (10.7)$$

ya que  $d\mathbf{l}$  es paralelo a la línea de corriente aunque  $(\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u}$  es ortogonal. Por lo tanto, el producto escalar es nulo. En resumen, obtenemos

$$\frac{1}{2}\rho u^2(B) - \frac{1}{2}\rho u^2(A) = -\rho g(z(B) - z(A)) - (P(B) - P(A)) \quad (10.8)$$

es decir

$$P(A) + \frac{1}{2}\rho u^2(A) + \rho g z(A) = P(B) + \frac{1}{2}\rho u^2(B) + \rho g z(B) \quad (10.9)$$

Para un flujo permanente incompresible, la cantidad

$$P + \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho g z = \text{constante} \quad (10.10)$$

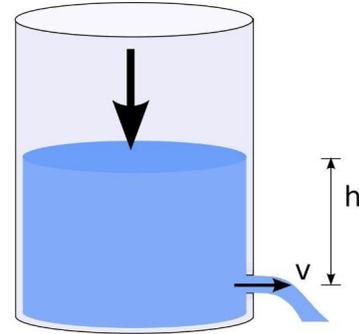
a lo largo de una línea de corriente. Es el teorema de Bernoulli (1738)

*De una línea de corriente a otra, lo que cambia es el valor de la constante.*

## 10.2 Teorema de Torricelli

Consideremos un volumen cilíndrico lleno de un líquido en el que se ha perforado un orificio. La fórmula de Torricelli relaciona la velocidad de flujo con la altura del líquido  $h$ . Se supone que el área de la sección transversal  $S$  del cilindro es muy grande comparada con el área de la sección transversal del orificio:  $s \ll S$ ;

El objetivo es calcular la velocidad de flujo  $v$  a la salida del orificio. Aplicando el teorema de Bernoulli a una línea de flujo se obtiene :



$$P_{\text{atm}} + \rho g h(t) + \frac{1}{2}\rho v^2(t, A) = P_{\text{atm}} + \frac{1}{2}\rho v^2(t, B) \quad (10.11)$$

Pero la ec.(8.56) implica que  $v(t, A)S = v(t, B)s$  por lo tanto

$$v(t, A) \ll v(t, B) \quad (10.12)$$

ya que  $s \ll S$ . Finalmente, obtenemos la fórmula de Torricelli

$$v(t, B) = \sqrt{2gh(t)} \quad (10.13)$$

Se nota que la velocidad tiene la misma expresión que la de la caída libre de un punto material en el campo de gravedad.

Para saber cómo cambia la altura del agua, tenemos que relacionar  $v$  con  $h(t)$  :

$$v(t, A) = \frac{sv(t, B)}{S} = \frac{s}{S}\sqrt{2gh} \quad (10.14)$$

Pero, tenemos

$$v(t, A) = -\frac{dh}{dt} \quad (10.15)$$

lo que nos da la ecuación para la altura

$$-\frac{dh}{dt} = \frac{s}{S}\sqrt{2gh} \quad (10.16)$$

Integrando esta ecuación se obtiene

$$h(t) = \left(\sqrt{h_0} - \frac{s}{S}\sqrt{\frac{g}{2}}t\right)^2 \quad \text{con} \quad h_0 = h(t=0) \quad (10.17)$$

o si queremos la velocidad en la salida

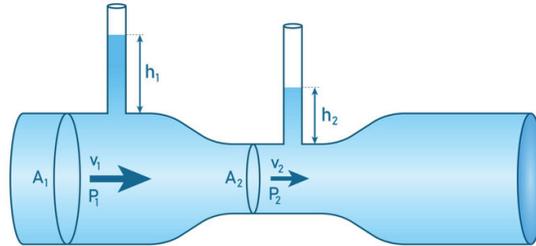
$$v(t, B) = \sqrt{2gh_0} - \frac{sg}{S}t \equiv v(0, B) - \frac{sg}{S}t \quad (10.18)$$

El tiempo de vaciado,  $\tau$ , se encuentra cuando  $h(\tau) = 0$ , es decir

$$\tau = \frac{S}{s}\sqrt{\frac{2h_0}{g}} \quad (10.19)$$

### 10.3 Efecto Venturi

En un tubo horizontal de sección variable  $S$ , el flujo de un fluido estacionario e incompresible va acompañado de una baja de presión allí donde existe una constricción: es el efecto Venturi.



A lo largo de un tubo horizontal, con líneas de corriente horizontal, es decir sin cambio de altura, el teorema de Bernoulli dice que

$$P + \frac{1}{2}\rho u^2 = \text{constante} \quad (10.20)$$

y la conservación de la masa implica que

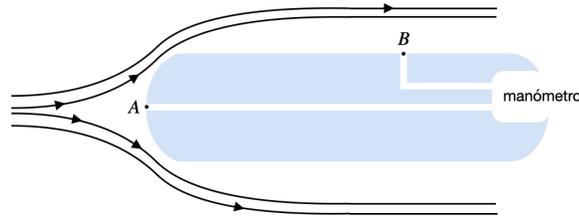
$$uS = \text{constante} \quad (10.21)$$

Así, la conservación del flujo impone un aumento de la velocidad en el tubo y la relación de Bernoulli impone una depresión en el mismo nivel.

Es la razón por la que una puerta se cierra de golpe cuando se encuentra poco abierta, o por la que uno se siente absorbido cuando pasa en auto cercano a un camión. . .

#### 10.4 Tubo de Pitot

El tubo de Pitot se utiliza para medir la velocidad de flujo de un gas subsónico ( $u \ll c_{\text{sonido}}$ ). En este caso puede considerarse incompresible. Se realiza una toma de presión en un tubo en los puntos  $A$  y  $B$ . El punto  $A$  es un punto de parada porque la velocidad es cero (no hay flujo en el orificio, es sólo una toma de presión). Lejos del tubo de Pitot se supone que el flujo es uniforme con velocidad  $u_\infty$  y presión  $P_0$ . En  $B$  la presión es  $P_0$  porque las leyes de la hidrostática se aplican en dirección perpendicular a un flujo incompresible paralelo permanente.



En  $A$  (punto de parada), utilizando la relación de Bernoulli, la presión es

$$P_A = P_0 + \frac{1}{2}\rho u_\infty^2 \quad (10.22)$$

En  $B$ ,  $P_B = P_0$ , por lo tanto

$$u_\infty = \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}} \quad (10.23)$$

con  $\Delta P = P_A - P_B$  la diferencia de presión medible con un manómetro. Los tubos de Pitot se utilizan comúnmente en los aviones para medir la velocidad del aire, lo cual es crucial para la navegación y el control de vuelo. Por ejemplo, el vuelo 447 de Air France en 2009, entre Río y París, se estrelló debido a cristales de hielo que obstruyeron los tubos de Pitot del avión, lo que provocó la desconexión del piloto automático.

## 11. Flujo irrotacional

Continuamos a trabajar con un fluido incompresible, es decir

$$\mathbf{div}(\mathbf{u}) \equiv \nabla \mathbf{u} = 0 \quad (11.1)$$

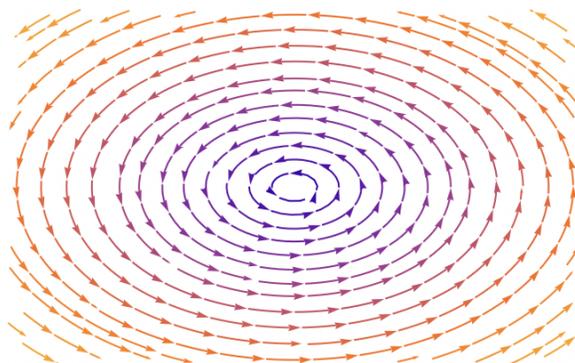
pero vamos a asumir también que el flujo es irrotacional, es decir

$$\mathbf{rot}(\mathbf{u}) \equiv \nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (11.2)$$

Por ejemplo, el flujo siguiente es rotacional, es decir que tiene vorticidad

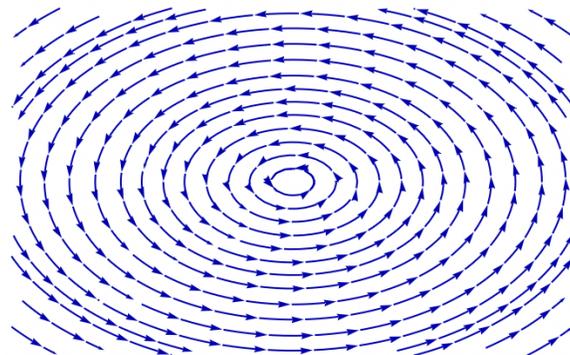
$$\mathbf{u} = \omega(-y, x, 0) \quad (11.3)$$

Tenemos  $\nabla \times \mathbf{u} = 2\omega \mathbf{e}_z$  por el cual las líneas de corriente son representadas en el gráfico siguiente

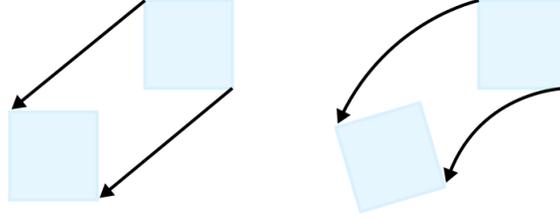


Nota que la vorticidad no tiene que ver con la rotación de las líneas de corriente alrededor del centro pero la rotación alrededor de cada punto. De hecho, el campo siguiente no tiene vorticidad pero si tiene rotación alrededor del centro

$$\mathbf{u} = \omega \left( -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right) \quad (11.4)$$



En el caso de la vorticidad, un elemento de fluido se desplaza como en el dibujo de la parte derecha



Ahora que entendemos mejor la noción de vorticidad, consideraremos un flujo sin vorticidad, lo que implica que la velocidad se puede escribir

$$\mathbf{u} = \mathbf{grad} \phi \equiv \nabla \phi \quad (11.5)$$

ya que  $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$ . La velocidad queda determinada a partir de una única función escalar  $\phi(t, \mathbf{x})$ , denominada potencial de velocidad. Usando el hecho que el fluido es incompresible, y que la divergencia del gradiente es el laplaciano, obtenemos la ecuación de Laplace para el potencial de velocidad

$$\Delta \phi = 0 \quad (11.6)$$

Por lo tanto resolviendo esta ecuación, podemos obtener la velocidad a partir de la ec.(11.5). Observamos también que como la ecuación de Laplace es lineal, podemos sumar potenciales. Es decir que si tenemos 2 soluciones  $\phi_1$  y  $\phi_2$ ,  $\phi_1 + \phi_2$  es también una solución.

También podemos recubrir la ecuación de Bernoulli. De hecho, usando la ecuación de Navier-Stokes (8.52) para un fluido incompresible (11.5), obtenemos

$$\rho \partial_i \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \partial_j \phi \partial_{ij} \phi = \rho g_i - \partial_i P + 2 \partial_j [\mu \partial_{ij} \phi] \quad (11.7)$$

Asumiendo que la viscosidad es constante, tenemos

$$\partial_j [\mu \partial_{ij} \phi] = \mu \partial_j [\partial_{ij} \phi] = \mu \partial_i \Delta \phi = 0 \quad (11.8)$$

y

$$\partial_j \phi \partial_{ij} \phi = \frac{1}{2} \partial_i (\partial_j \phi \partial_j \phi) \quad (11.9)$$

lo que nos da

$$\rho \partial_i \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \frac{1}{2} \partial_i (\partial_j \phi \partial_j \phi) = \rho g_i - \partial_i P = -\rho g \partial_i z - \partial_i P \quad (11.10)$$

que podemos integrar para obtener

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\rho}{2} \partial_j \phi \partial_j \phi + \rho g z + P = C(t) \quad (11.11)$$

Asumiendo también que el flujo es estacionario, obtenemos la ecuación de Bernoulli para flujos irrotacionales

$$P + \frac{1}{2} \rho \partial_j \phi \partial_j \phi + \rho g z = \text{constante} \quad (11.12)$$

o que podemos también escribir

$$P + \frac{1}{2} \rho u^2 + \rho g z = \text{constante} \quad (11.13)$$

A diferencia de la ecuación de Bernoulli previa, no se ha mencionada que esta relación es constante a lo largo de una línea de corriente pero en todo el fluido.

En resumen, lo importante para un flujo irrotacional es de resolver la ecuación de Laplace

$$\Delta \phi = 0 \quad (11.14)$$

lo que luego nos permite obtener la velocidad  $\mathbf{u} = \nabla \phi$  y a través de la ecuación de Bernoulli para flujos irrotacionales, la presión.

### 11.1 Condiciones de borde

Supongamos que el fluido entra en contacto con un objeto sólido. Por ejemplo, una pared en el borde del recipiente. O quizá haya algún objeto, como el ala de un avión, que se interponga en el flujo del fluido. ¿Qué condición límite debemos imponer?

Como el fluido no puede penetrar en el sólido, la velocidad normal al sólido debe ser nula. Introducimos un vector normal  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  en cada punto  $\mathbf{x}$  de la frontera, lo que implica

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (11.15)$$

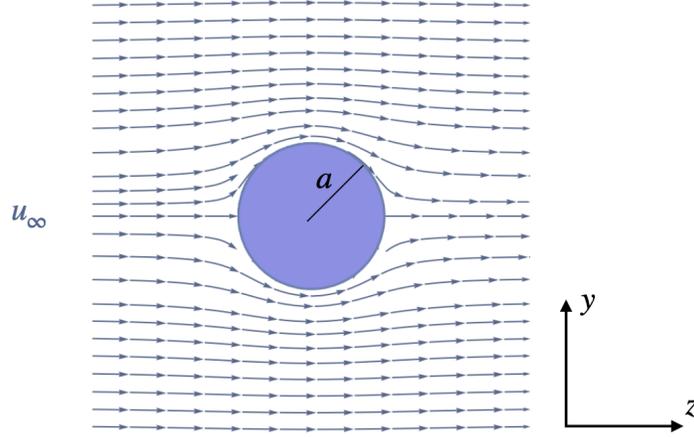
en cada punto de la frontera. Esta es la afirmación de que nada se filtra en el sólido. También es la afirmación de que la frontera de un fluido es una línea de corriente.

En caso que el borde se mueve con velocidad  $\mathbf{U}$ , es posible ponerse en el sistema de referencia del sólido gracias a la transformación galileana  $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{U}$  y usando en este sistema de referencia que  $\mathbf{u}' \cdot \mathbf{n} = 0$ , obtenemos

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{U} \quad (11.16)$$

## 11.2 Flujo alrededor de una esfera

En las ayudantías se han estudiado un par de flujos básicos, lo que nos permite estudiar a ejemplos más avanzados en esta sección.



Consideramos el patrón de flujo constante producido cuando un obstáculo esférico rígido impenetrable se coloca en un fluido que fluye uniformemente, incompresible y sin viscosidad. Por ejemplo, supongamos que el radio de la esfera es  $a$ , y que su centro coincide con el origen. Además, supongamos que la velocidad no perturbada del fluido es de magnitud  $u_\infty$  y está dirigida paralelamente al eje  $z$ . Esperamos que el patrón de flujo permanezca inalterado muy lejos de la esfera. En otras palabras, esperamos  $\mathbf{u}(r, \theta, \varphi) \rightarrow u_\infty \mathbf{e}_z$  cuando  $r \rightarrow \infty$ . Dado que el campo de velocidad del fluido a gran distancia arriba de la esfera es irrotacional, se deduce del teorema de circulación de Kelvin<sup>5</sup> que el campo de velocidad sigue siendo irrotacional a medida que uno se acerca de la esfera. Por lo tanto, podemos escribir  $\mathbf{u} = \nabla\phi$  en todo el espacio. Lo que nos permite obtener al infinito  $\phi = u_\infty z$  o en coordenadas esféricas

$$\phi = u_\infty r \cos \theta \quad \text{cuando } r \rightarrow \infty \quad (11.17)$$

y

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=a} = 0 \quad (11.18)$$

Estas dos condiciones, corresponden a las condiciones de borde. Buscaremos una solución independiente de  $\varphi$  por razones de simetría del problema. Además buscaremos una solución con el método de separación de variables, es decir

$$\phi(r, \theta) = F(r)Y(\theta)$$

<sup>5</sup>Es un teorema que no hemos visto

Pero considerando la condición (11.17), obtenemos que  $Y(\theta) = \cos \theta$ . Además el laplaciano en coordenadas esféricas es

$$\Delta\phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial\phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2\phi}{\partial \varphi^2} \quad (11.19)$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial F}{\partial r} \right) \cos \theta + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \cos \theta}{\partial \theta} \right) F(r) \quad (11.20)$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial F}{\partial r} \right) \cos \theta - \frac{2}{r^2} \cos \theta F(r) = 0 \quad (11.21)$$

es decir

$$F''(r) + \frac{2}{r} F'(r) - \frac{2}{r^2} F(r) = 0 \quad (11.22)$$

Es una ecuación diferencial ordinaria homogénea, por lo tanto buscaremos una solución de la forma  $F(r) = r^n$ , lo que se reduce a

$$n^2 + n - 2 = 0 \quad n = 1, n = -2 \quad (11.23)$$

es decir

$$F(r) = Ar + \frac{B}{r^2} \quad (11.24)$$

o

$$\phi(r, \theta) = \left( Ar + \frac{B}{r^2} \right) \cos \theta \quad (11.25)$$

La condición (11.17) impone  $A = u_\infty$  aunque la condición (11.18) fija  $B = a^3 A/2$

$$\phi(r, \theta) = u_\infty \left( r + \frac{a^3}{2r^2} \right) \cos \theta \quad (11.26)$$

o en términos de velocidad

$$u_r(r, \theta) = u_\infty \left( 1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \cos \theta \quad (11.27)$$

$$u_\theta(r, \theta) = -u_\infty \left( 1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) \sin \theta \quad (11.28)$$

La velocidad perpendicular a la esfera es nula, pero la velocidad  $u_\theta$  tangente a la superficie de la esfera no desaparece cuando  $r = a$ . La esfera es una línea de corriente.

Hay dos puntos en los que el flujo se detiene por completo y  $\mathbf{u} = 0$ . Esto ocurre en la superficie de la esfera,  $r = a$ , en  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$ . Los puntos en los que la velocidad local del fluido desaparece se denominan puntos de estancamiento.

### 11.3 Paradoja de d'Alembert

A partir de los resultados previo y el teorema de Bernoulli, podemos deducir la presión sobre la esfera. Sabemos que en el caso irrotacional,

$$P + \frac{1}{2}\rho u^2 = \text{constante} \quad (11.29)$$

en todo el fluido (hemos despreciado la gravedad), lo que implica

$$P(a, \theta, \varphi) + \frac{1}{2}\rho u_\theta^2(a, \theta, \varphi) = P_0 + \frac{1}{2}\rho u_\infty^2 \quad (11.30)$$

es decir

$$P(a, \theta, \varphi) = P_0 + \frac{1}{2}\rho u_\infty^2 \left(1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta\right) \quad (11.31)$$

La presión depende sólo de  $\sin^2 \theta$ . Esto significa que la presión ejercida sobre la esfera en la parte izquierda, donde  $\pi/2 < \theta \leq \pi$  es idéntica a la presión ejercida en la derecha, donde  $0 \leq \theta < \pi/2$ . Sabemos por experiencia que un objeto colocado en una corriente sufrirá una fuerza de arrastre. Pero no es así en nuestro modelo. En lugar de eso, la corriente encuentra la forma de moverse sin problemas alrededor del objeto, sin ejercer ninguna fuerza. Podemos calcular estas fuerzas

$$F_x = - \oint P(a, \theta, \varphi) a^2 \sin \theta \cos \varphi d\Omega \quad (11.32)$$

$$F_y = - \oint P(a, \theta, \varphi) a^2 \sin \theta \sin \varphi d\Omega \quad (11.33)$$

$$F_z = - \oint P(a, \theta, \varphi) a^2 \cos \theta d\Omega \quad (11.34)$$

donde la integral es sobre todo el ángulo solido,  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ . Por lo tanto, obtenemos

$$F_x = F_y = F_z = 0 \quad (11.35)$$

El fluido no ejerce ninguna fuerza sobre la esfera. Fue descubierto en 1752 por Jean le Rond d'Alembert. Hay que esperar hasta el año 1905 con el trabajo de Prandtl sobre las capas límite para entender la paradoja.

### 11.4 Flujo alrededor de un disco girando

A diferencia del problema pasado, vamos a trabajar en dos dimensiones, con coordenadas polares. La ecuación de Laplace se escribe

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = 0 \quad (11.36)$$

Podemos verificar que

$$\phi(r, \theta) = u_\infty \left( r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta \quad (11.37)$$

es solución de nuestro problema con  $r = a$  el radio del disco. Como la ecuación de Laplace es lineal, podemos siempre sumar otras soluciones. Es también simple, verificar que la función siguiente es solución (ver ayudantía)

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad (11.38)$$

con  $\Gamma$  una constante. Este termino se llama la circulación y la solución final es

$$\phi(r, \theta) = u_\infty \left( r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad (11.39)$$

La velocidad es

$$u_r = u_\infty \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (11.40)$$

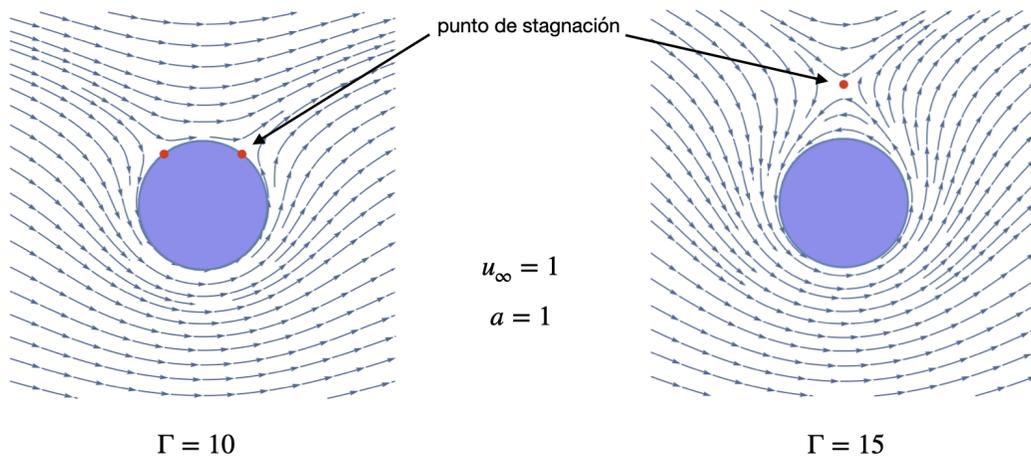
$$u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} - u_\infty \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta \quad (11.41)$$

Los puntos de stagnación se encuentran en

$$r = a, \quad \sin \theta = \frac{\Gamma}{4a\pi u_\infty}$$

lo que existen solo cuando  $\Gamma < 4a\pi u_\infty$ . En caso de tener  $\Gamma > 4a\pi u_\infty$ , podemos obtener un punto de stagnación para

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\Gamma}{2\pi r} - u_\infty \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) = 0$$



Nota que las líneas de corriente pueden ser dibujadas fácilmente en 2 dimensiones. De hecho de la expresión  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , podemos escribir  $\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{A}$ . Pero en dos dimensiones, el potencial vector  $\mathbf{A}$  se reduce a una sola función  $\psi$  llamada la función de flujo

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (11.42)$$

Podemos ver que  $\Delta \psi = 0$ . Las líneas  $\psi = \text{constante}$  corresponden a las líneas de corriente. De hecho, el vector normal a  $\psi = \text{constante}$  es

$$\mathbf{n} = \nabla \psi = \left( \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \quad (11.43)$$

Podemos ver que  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$ , es decir que las líneas  $\psi = \text{constante}$  son las líneas de corriente.

En coordenadas polares, tenemos

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (11.44)$$

$$u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (11.45)$$

Es decir que para el ejemplo (11.40,11.41), tenemos

$$\psi(r, \theta) = u_\infty r \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \log(r) \quad (11.46)$$

De la expresión de  $\psi$  podemos dibujar las líneas de corriente.

### 11.5 Efecto Magnus

Usando de nuevo la ecuación de Bernoulli, podemos deducir la presión sobre el disco

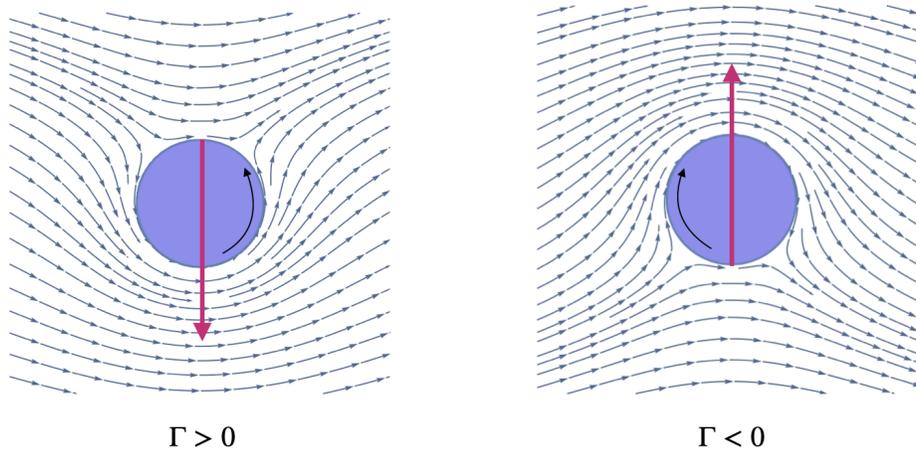
$$P(\theta) = P_\infty + \frac{1}{2} \rho u_\infty^2 (1 - 4 \sin^2 \theta) + \frac{u_\infty \Gamma \rho}{\pi a} \sin \theta - \frac{\Gamma^2 \rho}{8\pi^2 a^2} \quad (11.47)$$

Obtenemos que la fuerza horizontal es nula

$$\int_0^{2\pi} P(\theta) a \cos \theta d\theta = 0 \quad (11.48)$$

recubriendo la paradoja de d'Alembert, aunque la fuerza vertical no es nula

$$-\int_0^{2\pi} P(\theta) a \sin \theta d\theta = -\frac{u_\infty \Gamma \rho}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = -u_\infty \Gamma \rho \quad (11.49)$$



El signo menos significa que, para  $\Gamma > 0$  como se muestra en la figura, la fuerza es hacia abajo. Si observamos la figura, podemos ver que las líneas de flujo están más juntas en la parte inferior del disco. Esto significa que el fluido se desplaza más rápido en la parte inferior y, en consecuencia, la presión es menor. De ahí la fuerza descendente. Esta fuerza se llama sustentación. En el cálculo anterior hemos supuesto que el fluido circula y el cilindro está parado. Sin embargo, el mismo efecto se produce si el cilindro gira mientras el fluido no circula. En esta situación, la fuerza de sustentación se denomina fuerza Magnus.

## 11.6 Transformación conforme

En los primeros tiempos de la aerodinámica, la transformación conforme proporcionaba un método elegante para calcular el flujo bidimensional alrededor del perfil de un ala y su sustentación, bajo el supuesto de un flujo irrotacional en un fluido que se suponía incompresible y perfecto. Mediante ciertas transformaciones bien elegidas, un círculo puede transformarse en una curva parecida al perfil de un ala, a partir de la cual se puede deducir la sustentación de un ala de gran alargamiento. La primera aplicación de esta técnica es la llamada transformación de Joukowski

Para llegar a estas transformaciones, comenzamos con un pequeño repaso de análisis compleja. Una función  $f(z)$  con  $z = x + iy$  es holomorfa si es diferenciable. Por ejemplo, la función  $f(z) = z^2$  es holomorfa. Cada función compleja puede ser separada en una parte real y una parte imaginaria

$$f(x + iy) = a(x, y) + ib(x, y) \quad (11.50)$$

La condición para que la función sea holomorfa es que las funciones  $a$  y  $b$  verifican las

ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial b}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial a}{\partial y} = -\frac{\partial b}{\partial x} \quad (11.51)$$

En nuestro caso previo, tenemos

$$f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \quad (11.52)$$

Podemos fácilmente verificar que se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial a}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial b}{\partial y} = 2x \quad (11.53)$$

$$\frac{\partial a}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial b}{\partial x} = 2y \quad (11.54)$$

Una de las propiedades de las funciones holomorfas es que las partes reales  $a(x, y)$  y compleja  $b(x, y)$  son soluciones de la ecuación de Laplace, es decir

$$\Delta a = \Delta b = 0 \quad (11.55)$$

Se puede fácilmente obtener gracias a las ecuaciones de Cauchy-Riemann, por ejemplo

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial a}{\partial y} = -\frac{\partial^2 a}{\partial y^2} \quad (11.56)$$

es decir

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} = 0 \quad (11.57)$$

Podemos hacer la misma demostración para la parte compleja  $b(x, y)$ . Considerando nuestro ejemplo previo de  $f(z) = z^2$ , hemos obtenido  $a(x, y) = x^2 - y^2$ , lo que nos permite obtener

$$\Delta a = 2 - 2 = 0 \quad (11.58)$$

En conclusión, hemos encontrado una forma muy poderosa de encontrar soluciones a nuestra ecuación de Laplace.

Imaginamos que tenemos un fluido con velocidad

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} \quad (11.59)$$

la función siguiente es holomorfa

$$f(z) = u(x, y) - iv(x, y) \quad (11.60)$$

De hecho, si verificamos las ecuaciones de Cauchy-Riemann obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{lo que corresponde a } \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (11.61)$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{lo que corresponde a } \nabla \times \mathbf{u} = 0 \quad (11.62)$$

En conclusión, dado una función holomorfa, tenemos la velocidad y por lo tanto las líneas de trayectoria que podemos obtener por

$$\frac{dx}{dt} = u(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = v(x, y) \quad (11.63)$$

El ejemplo más simple corresponde a  $f(z) = 1$ , por lo cual tenemos

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = 0 \quad (11.64)$$

es decir

$$x = t + x_0, \quad y = y_0 \quad (11.65)$$

o de forma equivalente

$$z = x + iy = t + x_0 + iy_0 = t + z_0 \quad (11.66)$$

Este flujo corresponde a un fluido con movimiento horizontal e uniforme.

Considerado ahora un caso más genérico

$$f(z) = c = a + ib \quad (11.67)$$

lo que nos da

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad \frac{dy}{dt} = -b \quad (11.68)$$

es decir

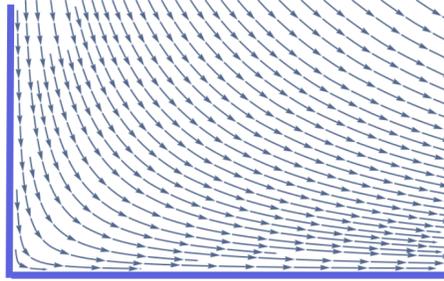
$$x = at + x_0, \quad y = -bt + y_0 \quad (11.69)$$

o de forma equivalente

$$z = x + iy = at + x_0 - ibt + iy_0 = t + z_0 = \bar{c}t + z_0 \quad (11.70)$$

Las líneas quedan paralelas pero con un ángulo definido por la constante  $c$ . Estas líneas se pueden encontrar por rotación del primer caso.

Finalmente un caso un poco más complejo es  $f(z) = z$  lo que corresponde a un flujo alrededor de una esquina



Como lo hemos visto, nuestra velocidad puede ser obtenida por los potenciales  $\phi$  y  $\psi$  tal que

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (11.71)$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (11.72)$$

Por lo tanto, si definimos el potencial complejo

$$\chi(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (11.73)$$

obtenemos, usando la regla de la cadena

$$\frac{d\chi}{dz} = \frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{1}{2i} \frac{\partial \chi}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{i}{2} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{2i} \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (11.74)$$

$$= u(x, y) - iv(x, y) = f(z) \quad (11.75)$$

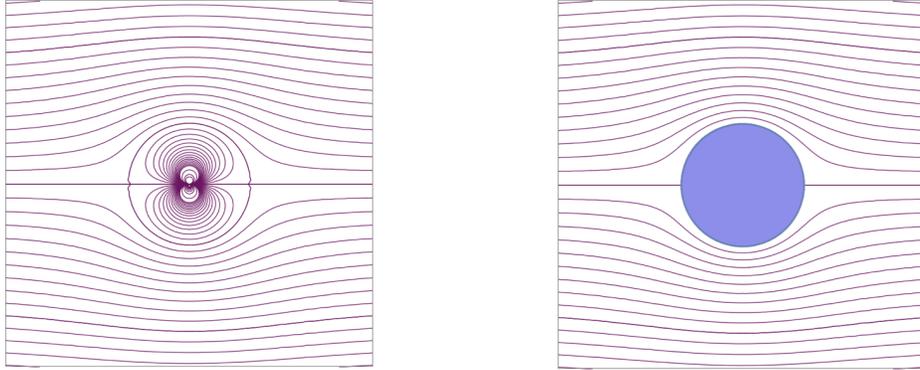
En conclusión, el potencial complejo  $\chi(z)$  nos permite obtener la velocidad y por lo tanto el flujo del fluido o de forma equivalente nos permite obtener los potenciales  $\phi$  y  $\psi$  es decir las líneas de equipotenciales para  $\phi$  y las líneas de corriente a partir de  $\psi$ . Por ejemplo,  $\chi(z) = z$ , nos da  $f(z) = 1$  es decir un flujo horizontal. Nota que las partes reales e imaginarias del potencial complejo son automáticamente soluciones de la ecuación de Laplace.

Como ejemplo, podemos considerar  $\chi(z) = z + 1/z$ , por lo cual tenemos

$$\phi(x, y) = x + \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (11.76)$$

$$\psi(x, y) = y - \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (11.77)$$

Las líneas de corriente se encuentran por  $\psi(x, y) = \text{constante}$ , lo que podemos observar en el gráfico siguiente.



Observamos que si nos restringimos a la parte  $|z| > 1$ , obtenemos el flujo alrededor de un disco.

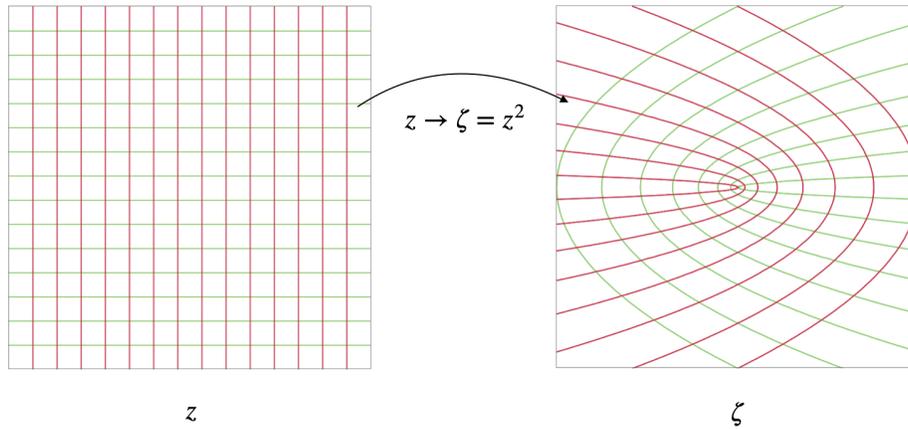
En conclusión, las funciones complejas proporcionan una fuente casi inagotable de funciones armónicas, es decir, soluciones a la ecuación bidimensional de Laplace. Así, para resolver un problema de valor límite asociado, «simplemente» encontramos la función compleja cuya parte real coincide con las condiciones de contorno prescritas. Desgraciadamente, incluso para dominios relativamente sencillos, esto sigue siendo una tarea de enormes proporciones. El único caso en el que tenemos una solución explícita es el de un disco circular. Así pues, una estrategia de solución evidente para el correspondiente problema de valor límite en un dominio más complicado sería transformarlo en un caso resuelto mediante un inspirado cambio de variables.

Este cambio de variable debe ser continuo y su inverso debe existir. Por lo tanto, si comenzamos de un plan complejo  $z = x + iy$  hasta un plan complejo  $\zeta = \xi + i\eta$ , por la transformación  $\zeta = f(z)$ , esta transformación debe ser invertible, es decir  $dz/d\zeta$  debe bien comportarse. Pero como

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{1}{f'(z)} \quad (11.78)$$

debemos pedir que  $f'(z) \neq 0$ . En resumen, una buena transformación es una transformación  $\zeta = f(z)$  analítica y tal que  $f'(z) \neq 0$ . Estas transformaciones se llaman una

transformación conforme. Por ejemplo, si  $f(z) = z^2$  excluyendo el punto  $z = 0$  define una transformación compleja



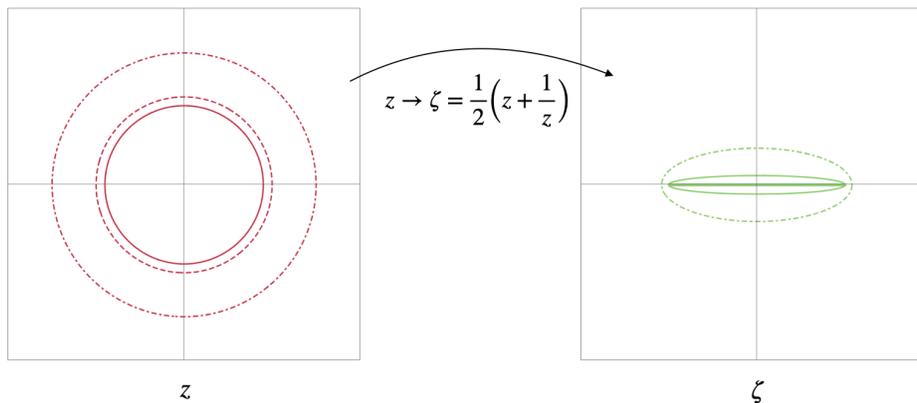
Una transformación conforme importante es la transformación de Joukowski definida por

$$\zeta = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) \quad (11.79)$$

Es una transformación conforme para  $z \neq \pm 1$  y  $z \neq 0$ .

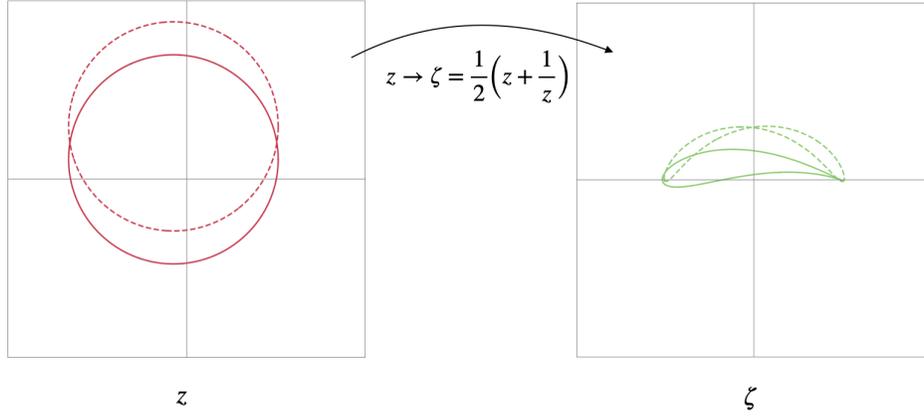
Si, consideramos un círculo en el plan ( $z$ ), es decir  $z = e^{i\theta}$  obtenemos una recta en el espacio transformado,  $\zeta = \cos \theta$ , aunque si hay un radio  $R$ , es decir  $z = Re^{i\theta}$  lo que implica

$$\zeta = \frac{1}{2} \left( Re^{i\theta} + \frac{e^{-i\theta}}{R} \right) \quad (11.80)$$



con  $R = \{0.9, 1, 1.5\}$

Pero en el caso de un círculo no centrado en 0, la curva obtenida es más interesante. Si comenzamos de  $z = z_0 + Re^{i\theta}$  obtenemos los gráficos siguientes según los parámetros  $z_0$  y  $R$



con  $R = 0.23\sqrt{26}$  y  $z_0 = -0.15 + 0.23i$  o,  $z_0 = -0.15 + 0.6i$

Observamos que para algunos parámetros, obtenemos algo muy similar a una ala<sup>6</sup>.

El resultado muy importante es que si en el espacio  $\zeta$  tenemos una función  $\tilde{\chi}$  solución de la ecuación de Laplace, entonces la función

$$\chi(z) = \tilde{\chi}(\zeta(z)) \quad (11.81)$$

es solución de la ecuación de Laplace en el espacio  $z$ . Es fácil demostrarlo con la regla de la cadena. Además las condiciones de borde, tal que  $\tilde{\chi} = H$ , se transforman en condiciones  $\chi = h$  con

$$h(z) = H(\zeta(z)) \quad (11.82)$$

Por lo tanto, al revés, si conocemos un flujo en el espacio  $z$  descrito por un potencial complejo  $\chi(z)$ , podemos obtener el flujo en el espacio  $\zeta$  descrito por el potencial  $\tilde{\chi}(\zeta)$ , con la relación

$$\tilde{\chi}(\zeta) = \chi(z) \equiv \chi(z(\zeta)) \quad (11.83)$$

Por ejemplo, un flujo alrededor de un disco sin circulación ( $\Gamma = 0$ ) esta descrito por (11.39,11.46)

$$\phi(r, \theta) = u_\infty \left( r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta \quad (11.84)$$

$$\psi(r, \theta) = u_\infty r \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta \quad (11.85)$$

<sup>6</sup>Para eso, pedimos que el círculo pasa por  $z = 1$ .

lo que implica

$$\chi(r, \theta) = \phi(r, \theta) + i\psi(r, \theta) \quad (11.86)$$

$$\chi(r, \theta) = u_\infty r (\cos \theta + i \sin \theta) + u_\infty \frac{a^2}{r} (\cos \theta - i \sin \theta) \quad (11.87)$$

$$\chi(z) = u_\infty \left( z + \frac{a^2}{z} \right) \quad (11.88)$$

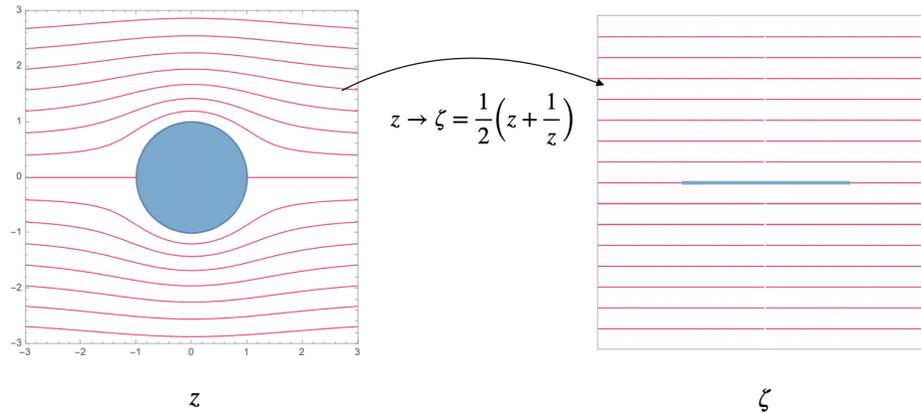
En el caso de un radio  $a = 1$ , tenemos

$$\chi(z) = u_\infty \left( z + \frac{1}{z} \right) \quad (11.89)$$

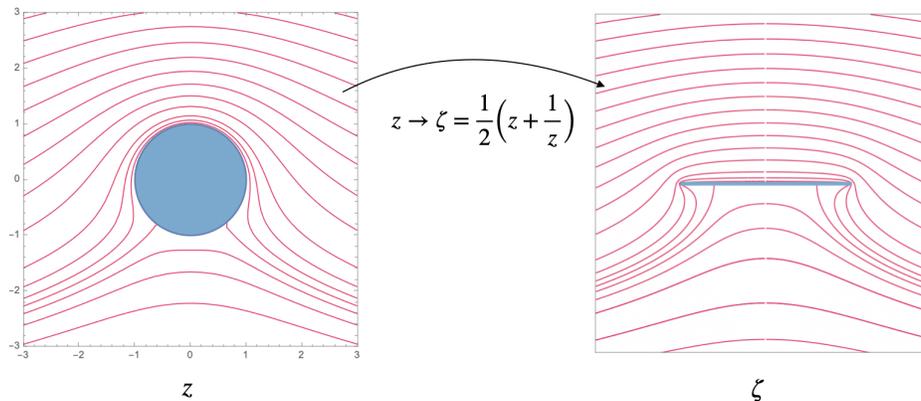
Después de la transformación conforme, tenemos

$$\tilde{\chi}(\zeta) = \chi(z(\zeta)) = 2u_\infty \zeta \quad (11.90)$$

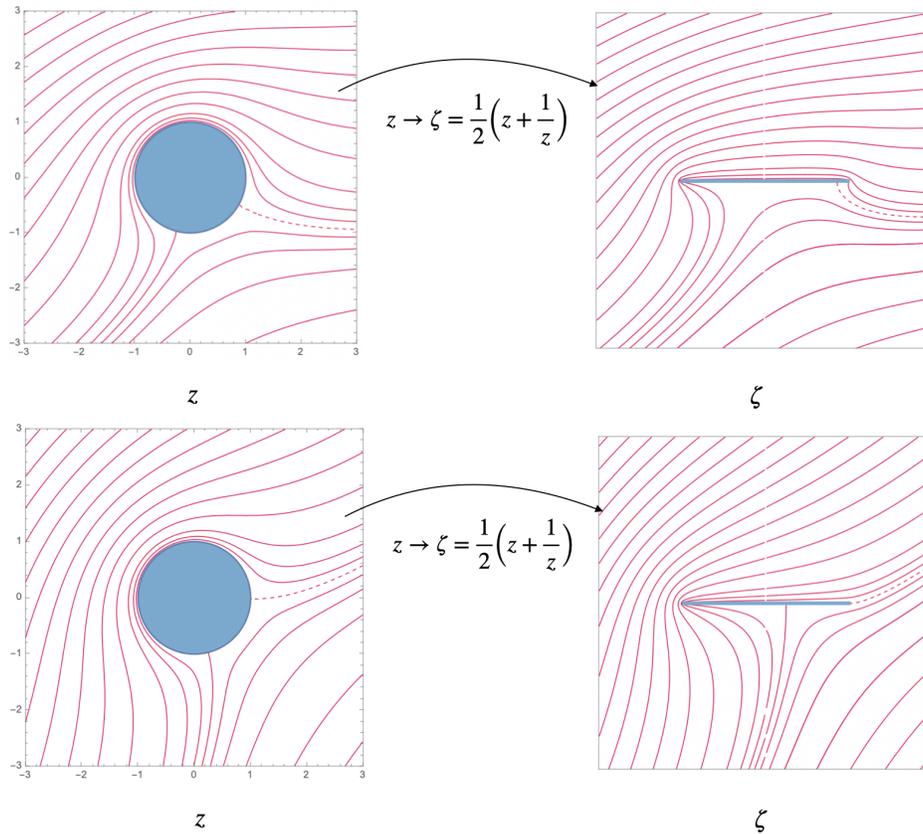
es decir un flujo lineal alrededor de una placa infinitamente delgada



Agregando el término de circulación ( $\Gamma = -10$ ) produce un flujo con una rotación alrededor de la placa

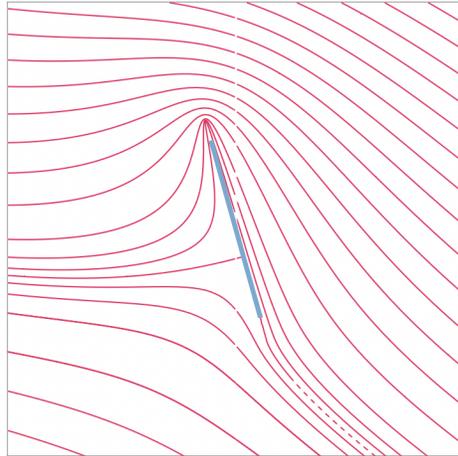


Podemos agregar una transformación inicial en el espacio  $z$ , una rotación, tal que  $z \rightarrow ze^{i\theta}$

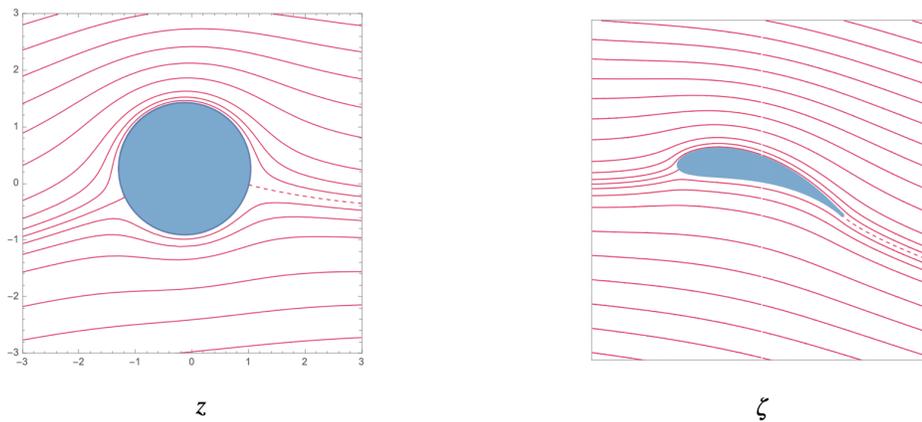


Cada una de estas rotaciones, produce un patrón diferente. Podemos preguntarnos como elegir esta constante. Martin Kutta en el año 1902 durante su tesis, ha emitido una hipótesis. Es la suposición de que el flujo no puede rodear el borde de salida afilado, sino que debe abandonar el perfil aerodinámico de forma que las corrientes superior e inferior se unan suavemente en el borde de salida. Sólo hay un patrón de flujo que lo consiga. Hemos elegido un factor de rotación distinto pero obviamente se podría guardar este factor fijo y cambiar el factor de circulación. Formalmente, la condición de Kutta dice que la constante de circulación adecuada para el flujo sobre un perfil aerodinámico es el valor que hace que la velocidad abandone el borde de salida en una dirección que biseca el ángulo formado por las superficies superior e inferior. Una afirmación equivalente es que la velocidad en el borde de salida no puede ser infinita. Bajo esta condición, podemos elegir el segundo patrón como el más físico.

Finalmente para considerar un flujo que viene de forma horizontal, podemos hacer una rotación en el espacio  $\zeta$  para obtener



Ahora, podemos considerar la transformación del flujo alrededor de un disco no centrado en  $z = 0$ , lo que como sabemos produce un ala. Consideraremos un termino de circulación para cumplir con la condición de Kutta y una rotación final para obtener un flujo que viene de forma horizontal



Es importante mencionar que la sustentación existe y por tanto, un avión puede volar porque tenemos el termino de circulación. Sin circulación, no tendríamos una fuerza hacia arriba<sup>7</sup>.

Para visualizaciones dinámicas, se puede ver [está página](#) o [está](#), o este [archivo](#) para más detalles de cálculo.

---

<sup>7</sup>Cabe mencionar que el termino de circulación es obligatorio del punto de vista matemático ya que  $\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$  no implica  $\mathbf{u} = \nabla \psi$  en un espacio con un hueco. Un tema de cohomología.

## 12. Ondas

Una onda es una perturbación que se desplaza, generalmente transportando energía sin el desplazamiento permanente del medio a través del cual se mueve. Se pueden ver ejemplos en estas [animaciones](#). Las ondas pueden ocurrir en diversas formas y en diferentes tipos de medios. Se pueden clasificar en dos grandes categorías:

- Ondas mecánicas: estas ondas requieren un medio material para propagarse. Ejemplos incluyen las ondas sonoras, las ondas en el agua y las ondas sísmicas. En los fluidos, las ondas mecánicas son el enfoque.
- Ondas electromagnéticas: estas ondas, como la luz, no requieren un medio y pueden propagarse a través del vacío.

En mecánica de fluidos, nos centramos principalmente en las ondas mecánicas, que implican el movimiento de partículas dentro del medio fluido. Se pueden categorizar según dónde ocurren y las fuerzas que las impulsan. De hecho, su movimiento se mantiene por la interacción de la inercia del fluido y una fuerza restauradora o un desequilibrio de presión. Tenemos

- Ondas superficiales: estas ondas ocurren en la interfaz entre dos fluidos diferentes, comúnmente entre agua y aire. Las partículas en el fluido se mueven en trayectorias circulares o elípticas a medida que la onda pasa, creando un movimiento ondulante en la superficie. En este caso, la principal fuerza que restaura el equilibrio después del desplazamiento es la gravedad para las ondas grandes (ondas de gravedad) y la tensión superficial para las ondas más pequeñas (ondas capilares).
- Ondas internas: ocurren dentro del fluido, en las fronteras entre capas de diferentes densidades. Son más comunes en océanos y atmósferas, donde existen capas estratificadas de fluido. Son impulsadas por fuerzas de flotación, y transportan energía entre capas de diferentes densidades.
- Ondas sonoras: también conocidas como ondas de presión, se propagan a través del fluido compresible como ondas longitudinales. En estas ondas, las partículas del fluido oscilan hacia adelante y hacia atrás en la dirección de propagación de la onda, comprimiendo y descomprimiendo el fluido a medida que la onda se mueve. La fuerza restauradora aquí es el gradiente de presión en el fluido.

### 12.1 Oscilación y propagación

Consideremos un sistema con un solo grado de libertad, para el cual notaremos  $\psi$  la magnitud que evoluciona con el tiempo. La magnitud  $\psi$  puede representar un desplazamiento, un ángulo, una corriente eléctrica, una tensión, una carga, etc. Si este sistema posee una posición de equilibrio estable  $\psi = \psi_0$ , en las cercanías de la cual la ecuación de evolución de  $\psi$  es de la forma:

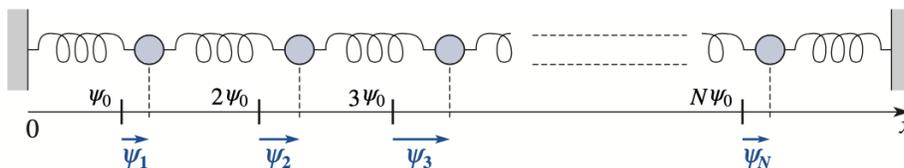
$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\omega_0^2 (\psi - \psi_0) \quad (12.1)$$

observamos oscilaciones armónicas de pulsación  $\omega_0$  del tipo:

$$\psi(t) = \psi_0 + \psi_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (12.2)$$

En este caso,  $\psi_m$  es la amplitud de la oscilación y  $\omega_0$  es la frecuencia de vibración, de la cual podemos deducir el periodo de oscilación  $T = 2\pi/\omega_0$ .

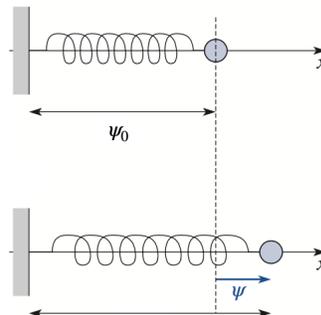
En caso de tener  $N$  osciladores acoplados, aparecería una oscilación que se propaga, es decir, una onda.



Imaginemos que el móvil 1 avanza un poco. A través del resorte de unión, empujará al móvil 2, que luego empujará al móvil 3, que provocará el desplazamiento del 4, etc. De cercano en cercano, una deformación de la cadena de resortes se transmite de móvil en móvil, a lo largo de la cadena: el desplazamiento de los móviles se propaga a lo largo de la cadena de osciladores acoplados.

Esta onda puede ser descrita por la función  $\psi(t, x) = A \cos(\omega t - kx)$ , que es conocida como una onda monocromática, o onda armónica. Esta función  $\psi(t, x)$  toma el mismo valor en  $x + \Delta x$  en el instante  $t + \Delta t$  si  $k\Delta x = \omega\Delta t$ . Podemos decir que esta onda monocromática, caracterizada por su fase, se desplaza a la velocidad, denominada de fase:  $v_f = \frac{\omega}{k}$ . La onda  $\psi(t, x)$  se desplaza y progresa a lo largo del eje ( $Ox$ ) de la cadena a la velocidad  $v_f$ . Es una onda progresiva.

El parámetro  $k$  se llama el vector de onda y nos indica la dirección de propagación de la onda. En 3 dimensiones, se trata de un vector  $\mathbf{k}$  y en nuestro caso, tenemos  $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_x$ . Las ondas  $\psi(t, x) = A \cos(\omega t - kx)$  y  $\psi(t, x) = A \cos(\omega t + kx)$  tienen la



misma frecuencia, se propagan de manera similar a lo largo de la cadena, pero en direcciones opuestas.

Esta onda es solución de una ecuación simple. De hecho, si  $\psi(t, x) = A \cos(\omega t - kx)$ , y como la ecuación de Newton contiene el término  $\ddot{\psi}$ , debemos considerar derivadas segundas.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t - kx) \quad (12.3)$$

mientras que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = Ak \sin(\omega t - kx) \quad (12.4)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -Ak^2 \cos(\omega t - kx) \quad (12.5)$$

es decir

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{k^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (12.6)$$

o

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v_f^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (12.7)$$

Las soluciones de ese tipo de ecuaciones describen la propagación de una onda con velocidad de fase  $v_f$ . Se generaliza trivialmente a 3 dimensiones

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v_f^2 \Delta \psi \quad (12.8)$$

Se llama la ecuación de onda o ecuación de d'Alembert. La velocidad está usualmente denotada  $c$ , aunque no es la velocidad de la luz.

## 12.2 Onda sonoras

Si consideramos un altavoz, conectado a un generador, este emite un sonido. El movimiento del altavoz comprime ligeramente el aire en su vecindad inmediata; la presión de este aumenta ligeramente y ese aire, a su vez, empuja la capa de aire vecina, etc. Es algo similar a los osciladores acoplados vistos previamente. Esta onda se propaga aproximadamente a  $340 \text{ ms}^{-1}$ . En conclusión, las ondas sonoras son vibraciones de pequeña amplitud del medio material en el que se propagan a la velocidad  $c_s$ , llamada velocidad del sonido. Para describir matemáticamente esta propagación, asumimos que tenemos un fluido en reposo descrito por una velocidad  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$ , una densidad constante

$\rho_0$  y una presión constante  $P_0$ . A este fluido se agrega una pequeña perturbación, ya que el fluido es compresible, tal que

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1 \quad (12.9)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \quad (12.10)$$

$$P = P_0 + P_1 \quad (12.11)$$

La ecuación de conservación de la masa (8.8) es

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (12.12)$$

Al primer orden de perturbaciones, obtenemos

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \quad (12.13)$$

De forma similar, considerando la ecuación de Navier-Stokes (8.28) sin viscosidad

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \rho \mathbf{g} - \nabla P \quad (12.14)$$

que podemos escribir al primer orden

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = \mathbf{g} \rho_1 - \nabla P_1 \simeq -\nabla P_1 \quad (12.15)$$

ya que el gradiente de las fluctuaciones en presión son mucho más grande que las variaciones de densidad. Considerando el gradiente de (12.15) y usando (12.13) obtenemos

$$\Delta P_1 = -\rho_0 \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{u}_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} \quad (12.16)$$

Necesitamos una ecuación de estado para cerrar nuestro sistema.

La experiencia muestra que la propagación de las ondas sonoras se caracteriza generalmente por un bajo amortiguamiento dentro del fluido en el que se propaga. La evolución del estado de una partícula de fluido ocurre con constantes de tiempo demasiado rápidas para que haya intercambio de calor. Por esta razón, hemos ignorado los fenómenos disipativos como la viscosidad, lo que equivale a postular el carácter isentrópico del flujo, es decir, que la evolución del fluido es adiabática y reversible, lo que llamamos isentrópica. En este caso, el fluido se caracteriza por la constante de compresibilidad isentrópica.

$$\chi_S = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} \quad (12.17)$$

pero como  $V = NM/\rho$ , con  $N$  el numero de mol y  $M$  la masa molar, obtenemos

$$\chi_S = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} \simeq \frac{1}{\rho_0} \frac{\delta \rho}{\delta P} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\rho_1}{P_1} \quad (12.18)$$

o de forma equivalente  $\rho_1 = \rho_0 \chi_S P_1$  y de la ec.(12.16)

$$\Delta P_1 = \rho_0 \chi_S \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} \quad (12.19)$$

es decir una ecuación de onda para la variación de presión con velocidad

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}} \quad (12.20)$$

Aprendemos en termodinamica, que para un fluido isentropico

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = \text{constante} \equiv A \quad (12.21)$$

con  $\gamma$  una constante que depende del fluido. Para el aire,  $\gamma \simeq 1.4$ . Por lo tanto tenemos al primer orden de perturbaciones

$$P_0 + P_1 = A(\rho_0 + \rho_1)^\gamma = A\rho_0^\gamma \left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^\gamma \simeq A\rho_0^\gamma \left(1 + \gamma \frac{\rho_1}{\rho_0}\right) \quad (12.22)$$

es decir

$$P_0 = A\rho_0^\gamma \quad (12.23)$$

$$P_1 = A\rho_0^\gamma \gamma \frac{\rho_1}{\rho_0} = P_0 \gamma \frac{\rho_1}{\rho_0} \quad (12.24)$$

lo que implica

$$\chi_S = \frac{1}{\rho_0} \frac{\rho_1}{P_1} = \frac{1}{\gamma P_0} \quad (12.25)$$

y finalmente una velocidad de sonido

$$c = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}} \quad (12.26)$$

Si asumimos que el fluido en reposo (sin perturbaciones) es un gas ideal, tendremos

$$P_0 V = NRT_0, \quad \rho_0 = NM/V \quad \Leftrightarrow \quad \frac{P_0}{\rho_0} = \frac{RT_0}{M} \quad (12.27)$$

lo que nos permite expresar la velocidad de sonido en función de la temperatura

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}} \quad (12.28)$$

Para el aire ( $M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ) asimilado a un gas perfecto diatómico ( $\gamma = 1.4$ ), obtenemos  $c_s = 331 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  a  $T_0 = 273 \text{ K}$  ( $0^\circ\text{C}$ ). Este valor está en concordancia con la experiencia. La velocidad del sonido aumenta como la raíz cuadrada de la temperatura del gas. Así, el sonido se propaga más rápidamente en el aire a  $T_0 = 298 \text{ K}$  ( $25^\circ\text{C}$ ),  $c_s = 346 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

La velocidad del sonido disminuye como la raíz cuadrada de la masa molar del gas en el que se propaga. Para el dihidrógeno ( $M = 2 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ), la velocidad del sonido a  $273 \text{ K}$  es mucho mayor que su valor en el aire:  $c_s = 1260 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Un hecho notable es que la expresión que obtuvimos para la velocidad del sonido no incluye la presión del gas. De hecho, esto solo se cumple para presiones comparables a la presión atmosférica.

Cuando la presión aumenta, la aproximación de gas ideal deja de ser válida. El comportamiento del gas se aproxima al de un líquido, y la velocidad del sonido aumenta. A bajas presiones, el sonido ya no se propaga: no es la aproximación de gas ideal la que debe ser cuestionada, sino la suposición del medio continuo utilizada por las ecuaciones de la mecánica de fluidos.

Para terminar esta sección, podemos comparar la velocidad del sonido en un líquido y en un gas escribiendo

$$\frac{c_{s(\text{liq})}}{c_{s(\text{gas})}} = \sqrt{\frac{\rho_{0(\text{gas})}}{\rho_{0(\text{liq})}}} \sqrt{\frac{\chi_{S(\text{gas})}}{\chi_{S(\text{liq})}}} \quad (12.29)$$

La densidad de un líquido es aproximadamente mil veces mayor que la de un gas, en condiciones usuales de temperatura y presión. Sin embargo, su compresibilidad es mucho menor que la de un gas:

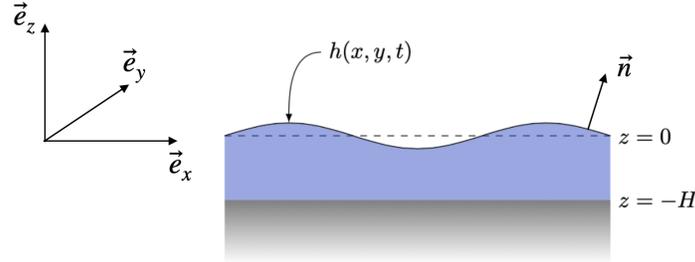
$$\chi_{\text{gas}} \approx \frac{1}{P_0} \approx 10^{-5} \text{ Pa}^{-1} \gg \chi_{\text{liq}} \approx 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}. \quad (12.30)$$

Por lo tanto, la velocidad del sonido es generalmente mayor en los líquidos que en los gases.

### 12.3 Olas

La superficie libre de un líquido en equilibrio en un campo gravitacional es un plano. Si, bajo la acción de alguna perturbación externa, la superficie se mueve de su posición de equilibrio en algún punto, se generará movimiento en el líquido. Este movimiento

se propagará por toda la superficie en forma de ondas, que se denominan ondas de gravedad, ya que son causadas por la acción del campo gravitacional. Las ondas de gravedad aparecen principalmente en la superficie del líquido; también afectan al interior, pero cada vez menos a mayores profundidades.



Suponemos que el fluido es incompresible y que el movimiento comienza desde el reposo. Por lo tanto, la vorticidad  $\nabla \times \mathbf{u}$  es inicialmente cero, y siempre lo será. Junto con la condición de incompresibilidad  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , llegamos a la ecuación de Laplace

$$\Delta\phi = 0. \quad (12.31)$$

Tenemos algunas condiciones cinemáticas en la frontera. En primer lugar, no puede haber flujo a través del fondo, por lo que tenemos

$$u_z = \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \quad (12.32)$$

cuando  $z = -H$ .

En la superficie libre, se aplica una condición de frontera cinemática que requiere que la velocidad de la partícula de fluido normal a la superficie,  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ , sea la misma que la velocidad de la superficie  $\mathbf{u}_s$  normal a sí misma:

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})_{z=\eta} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_s$$

donde  $\mathbf{n}$  es el vector normal a la superficie. Esta condición asegura que los elementos líquidos que definen la interfaz no se separen de ella, pero permite que se desplacen a lo largo de la misma.

En la situación actual, la ecuación para la superficie puede escribirse como  $f(x, y, z, t) = z - h(x, y, t) = 0$ , por lo que el vector normal a la superficie  $\mathbf{n}$ , que apunta hacia arriba fuera del líquido, será:

$$\mathbf{n} \propto \nabla f \propto -\frac{\partial h}{\partial x} \mathbf{e}_x - \frac{\partial h}{\partial y} \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z$$

La velocidad de la superficie  $\mathbf{u}_s$  en cualquier ubicación  $x$  se puede considerar puramente vertical:

$$\mathbf{u}_s = \frac{\partial h}{\partial t} \mathbf{e}_z$$

Por lo tanto, obtenemos  $(\nabla f \cdot \mathbf{u})_{z=h} = \nabla f \cdot \mathbf{u}_s$ , lo que da

$$\left( -u_x \frac{\partial h}{\partial x} - u_y \frac{\partial h}{\partial y} + u_z \right)_{z=h} = \frac{\partial h}{\partial t}, \quad \text{o} \quad \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=h} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{z=h} + \frac{\partial h}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_{z=h}$$

Además, asumimos que las ondas son relativamente planas, de modo que

$$\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \ll 1 \quad (12.33)$$

Por lo tanto, los términos finales son pequeños en comparación con los otros dos, por lo que la condición cinemática de la frontera puede aproximarse:

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=h} \cong \frac{\partial h}{\partial t}$$

Para la consistencia, el lado izquierdo de esta ecuación también debe aproximarse para pequeñas pendientes de la onda, lo cual se logra fácilmente mediante una expansión de la serie de Taylor alrededor de  $z = 0$ :

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=h} = \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=0} + h \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right)_{z=0} + \dots \cong \frac{\partial h}{\partial t}$$

lo que nos da al primer orden de aproximación,

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=0} \cong \frac{\partial h}{\partial t}$$

Tenemos una condición adicional que proviene de la ecuación de Bernoulli dependiente del tiempo. Para ello, consideraremos nuevamente la ecuación de Navier-Stokes sin fricción

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \mathbf{g} \quad (12.34)$$

Para un flujo irrotacional, tenemos  $\partial_i u_j = \partial_j u_i$ , porque  $\partial_i u_j = \partial_{ij} \phi = \partial_{ji} \phi = \partial_j u_i$ , lo que implica

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{u}^2) \quad (12.35)$$

Por lo tanto, obtenemos

$$\nabla \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + \frac{P}{\rho} + gz \right) = 0 \quad (12.36)$$

lo que da la ecuación de Bernoulli dependiente del tiempo

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + \frac{P}{\rho} + gz = F(t) \quad (12.37)$$

con  $G(t)$  una función del tiempo. Como lo hemos considerado previamente, al nivel de la superficie  $z = h$  las velocidades son pequeñas y por lo tanto podemos despreciar los terminos cuadraticos ( $\mathbf{u}^2$ ) además de que la presión en  $z = h$  debe ser la presión en el aire, es decir  $P_0$ , lo que nos da

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + gh = F(t) - \frac{P_0}{\rho} \equiv f(t) \quad (12.38)$$

Por consistencia, debemos aproximar esta expresión al primer orden en  $h$  ya que  $h$  es pequeño

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=h} = \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=0} + h \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial z} \right)_{z=0} + \dots \simeq \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=0} \quad (12.39)$$

En conclusión, nuestro sistema de ecuaciones es

$$\Delta \phi = 0, \quad -H < z \leq 0 \quad (12.40)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad z = -H \quad (12.41)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial t}, \quad z = 0 \quad (12.42)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + gh = f(t), \quad z = 0 \quad (12.43)$$

Para simplificar el problema, podemos discutir el caso cuando no depende de la dirección  $y$ . Buscamos una solución de tipo onda, por lo tanto buscaremos una solución de la forma

$$\phi(t, x, z) = \phi_0(z) \cos(kx - \omega t + \alpha) \quad (12.44)$$

además de asumir una superficie libre de la forma

$$h(t, x) = h_0 \cos(kx - \omega t) \quad (12.45)$$

La ecuación (12.40) nos da

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \left(\phi_0''(z) - k^2\phi_0(z)\right) \cos(kx - \omega t + \alpha) = 0 \quad (12.46)$$

es decir

$$\phi_0''(z) - k^2\phi_0(z) = 0 \quad (12.47)$$

cuya solución es

$$\phi_0(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz} \quad (12.48)$$

La condición (12.42) se reduce a

$$k(A - B) \cos(kx - \omega t + \alpha) = h_0\omega \sin(kx - \omega t) \quad (12.49)$$

lo que implica que  $\alpha = \pi/2$  y  $k(A - B) = -h_0\omega$  es decir

$$\phi(t, x, z) = -\phi_0(z) \sin(kx - \omega t) \quad (12.50)$$

La condición (12.41) es

$$-k\left(Ae^{-kH} + Be^{kH}\right) \sin(kx - \omega t) = 0 \quad (12.51)$$

y finalmente la condición (12.43) nos da

$$\phi_0(0)\omega \cos(kx - \omega t) + gh_0 \cos(kx - \omega t) = f(t) \quad (12.52)$$

Como la parte izquierda depende de  $x$  aunque la parte derecha es independiente de  $x$ , debemos elegir  $f(t) = 0$  y sabiendo que  $\phi_0(0) = A + B$  obtenemos

$$(A + B)\omega + gh_0 = 0 \quad (12.53)$$

En resumen de las condiciones

$$Ae^{-kH} + Be^{kH} = 0, \quad k(A - B) = -h_0\omega \quad (12.54)$$

obtenemos

$$A = -\frac{h_0\omega}{k} \frac{e^{kH}}{e^{kH} - e^{-kH}} \quad (12.55)$$

$$B = -\frac{h_0\omega}{k} \frac{e^{-kH}}{e^{kH} - e^{-kH}} \quad (12.56)$$

lo que nos da

$$\phi(t, x, z) = \frac{h_0 \omega}{k \sinh(kH)} \cosh(k(z + H)) \sin(kx - \omega t) \quad (12.57)$$

y finalmente la condición  $(A + B)\omega + gh_0 = 0$  se transforma en

$$\omega = \sqrt{gk \tanh(kH)} \quad (12.58)$$

Se llama la relación de dispersión. La velocidad de fase es

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kH)} \quad (12.59)$$

Observamos que esto impone un límite superior al valor máximo de la velocidad  $c$ . No puede haber ninguna onda que viaje más rápido que  $\sqrt{gH}$ . Así, si uno viaja más rápido que  $\sqrt{gH}$ , todas las ondas que se producen quedaran atrás. En general, si uno tiene una velocidad  $U$ , podemos definir el número de Froude

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gH}} \quad (12.60)$$

Esto es similar al número de Mach.

El resultado (12.59) es de importancia fundamental para las ondas en el agua. Muestra que las ondas superficiales son dispersivas porque su velocidad de propagación depende del número de onda. Para un valor fijo de  $H$ , la velocidad es una función monótonamente decreciente de  $k$ . En otras palabras, las ondas de mayor longitud de onda viajan más rápido que las de menor longitud de onda. Existen dos límites interesantes que podemos considerar:

En aguas profundas,  $H \gg \lambda = 2\pi/k$ , lo que nos lleva al límite  $kH \gg 1$  ( $kH > 2$  es suficiente). En este caso, la velocidad se convierte en

$$c \approx \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \quad (12.61)$$

Lo que tiene sentido ya que cuando el océano es muy profundo, no esperamos que la velocidad de las ondas superficiales dependa de  $H$ , simplemente porque el fondo está muy lejos de la superficie.

Un período común de las ondas de gravedad superficial generadas por el viento en el océano es de aproximadamente 10 s, lo que, mediante la relación de dispersión, corresponde a una longitud de onda de 150 m.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{kc} = \frac{2\pi}{\sqrt{kg}} = \sqrt{2\pi \frac{\lambda}{g}} \Leftrightarrow \lambda = \frac{gT^2}{2\pi}$$

La profundidad del agua en una plataforma continental típica es de aproximadamente 100 m, y en el océano abierto es de alrededor de 4 km. Por lo tanto, las olas generadas por el viento dominantes en el océano, incluso sobre la plataforma continental, actúan como ondas de aguas profundas y no sienten los efectos del fondo oceánico hasta que llegan cerca de la costa. De hecho, necesitamos verificar que  $kH > 2$  es decir  $H > \lambda/\pi \simeq 50$  m. Esto no es cierto para las ondas gravitatorias de longitud de onda muy larga o los tsunamis generados por fuerzas de marea o actividad sísmica. Dichas ondas pueden tener longitudes de onda de cientos de kilómetros.

Por otro lado, para longitudes de onda largas, tenemos  $kH \ll 1$  y la velocidad se convierte en

$$c \approx \sqrt{gH} \quad (12.62)$$

Los tsunamis caen en esta aproximación, ya que como lo hemos visto para un tsunami podríamos tener  $\lambda = 400$  km, es decir  $kH = 0.06$  si  $H = 4$  km.

En el caso de aguas pocas profundas, la velocidad es independiente de la longitud de onda de la onda. En este límite, la onda viaja más rápido en aguas profundas que en aguas poco profundas. Esto tiene una consecuencia interesante: cuando las olas llegan a la playa en un ángulo, el frente de onda que está más lejos viaja más rápido, lo que provoca que la ola gire hasta alinearse de manera paralela a la playa.

Regresando a nuestra solución (12.57) podemos obtener la velocidad

$$u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{h_0 \omega}{\sinh(kH)} \cosh(k(z + H)) \cos(kx - \omega t) \quad (12.63)$$

$$u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{h_0 \omega}{\sinh(kH)} \sinh(k(z + H)) \sin(kx - \omega t) \quad (12.64)$$

Una característica interesante de las ondas superficiales lineales es el hecho de que viajan y hacen que los elementos del fluido se muevan, pero no causan que estos elementos se desplacen permanentemente. Para determinar lo que sucede cuando pasa una onda superficial lineal, consideremos el elemento de fluido que sigue una trayectoria  $\mathbf{x}_p(t) = x_p(t)\mathbf{e}_x + z_p(t)\mathbf{e}_z$ . Las ecuaciones de la línea de trayectoria para este elemento de fluido son:

$$\frac{dx_p}{dt} = u_x(t, x_p, z_p) \quad (12.65)$$

$$\frac{dz_p}{dt} = u_z(t, x_p, z_p) \quad (12.66)$$

A pesar de que el elemento de fluido se mueve debido al paso de la onda, al final no habrá un desplazamiento neto permanente; el elemento de fluido vuelve aproximadamente a

su posición original después de que la onda ha pasado. Podemos obtener el movimiento de la partícula, integrando estas ecuaciones

$$\frac{dx_p}{dt} = \frac{h_0\omega}{\sinh(kH)} \cosh(k(z_p + H)) \cos(kx_p - \omega t) \quad (12.67)$$

$$\frac{dz_p}{dt} = \frac{h_0\omega}{\sinh(kH)} \sinh(k(z_p + H)) \sin(kx_p - \omega t) \quad (12.68)$$

Para ser consistentes con la aproximación de pequeña amplitud, estas ecuaciones pueden ser linealizadas al establecer  $x_p(t) = x_0 + \xi(t)$  y  $z_p(t) = z_0 + \zeta(t)$ , donde  $(x_0, z_0)$  es la ubicación promedio del elemento de fluido y el vector de excursión del elemento  $(\xi, \zeta)$  se asume pequeño en comparación con la longitud de onda. De esta manera, las versiones linealizadas de las ecuaciones se obtienen evaluando el lado derecho de cada ecuación en  $(x_0, z_0)$

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{h_0\omega}{\sinh(kH)} \cosh(k(z_0 + H)) \cos(kx_0 - \omega t) \quad (12.69)$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{h_0\omega}{\sinh(kH)} \sinh(k(z_0 + H)) \sin(kx_0 - \omega t) \quad (12.70)$$

Estas ecuaciones describen el movimiento oscilatorio pequeño del elemento de fluido alrededor de su posición promedio  $(x_0, z_0)$ . Estas ecuaciones son fáciles de integrar

$$\xi = -\frac{h_0}{\sinh(kH)} \cosh(k(z_0 + H)) \sin(kx_0 - \omega t) \quad (12.71)$$

$$\zeta = \frac{h_0}{\sinh(kH)} \sinh(k(z_0 + H)) \cos(kx_0 - \omega t) \quad (12.72)$$

lo que podemos escribir de la forma siguiente

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\zeta^2}{b^2} = 1 \quad (12.73)$$

con

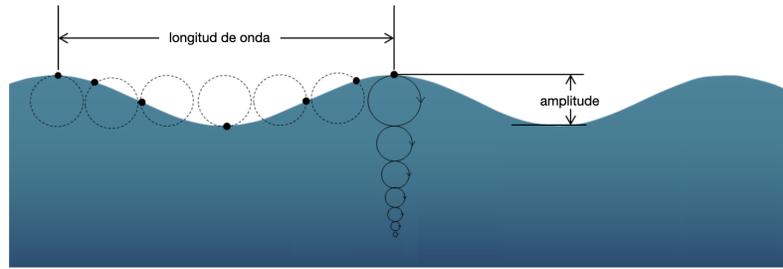
$$a = \frac{h_0}{\sinh(kH)} \cosh(k(z_0 + H)) \quad (12.74)$$

$$b = \frac{h_0}{\sinh(kH)} \sinh(k(z_0 + H)) \quad (12.75)$$

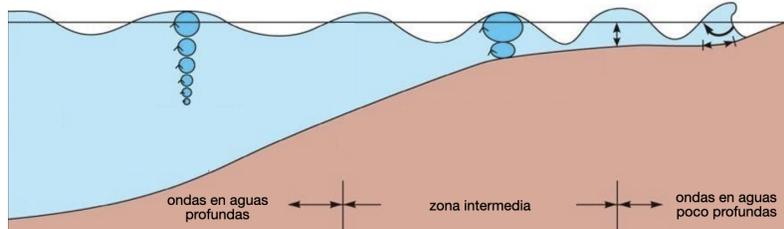
Es decir la ecuación de un elipse. Tanto el semieje mayor ( $a$ ), como el semieje menor ( $b$ ), disminuyen con la profundidad, y el semieje menor desaparece en  $z_0 = -H$ . Para aguas muy profundas, es decir cuando  $H \rightarrow \infty$ , tendremos

$$a = b = h_0 e^{kz_0} \quad (12.76)$$

es decir círculos.



Mientras que para aguas poco profundas, las partículas describen trayectorias elípticas cuando pasa la onda. Como ya hemos mencionado, a medida que la profundidad disminuye, la velocidad de la onda se reduce, lo que provoca que la onda que se aproxima desde el mar avance más rápido que la que está cerca de la costa, resultando en la ruptura de la ola.



### 13. Viscosidad

En esta sección, queremos estudiar el efecto de la viscosidad. Consideramos todavía un flujo incompresible pero con presencia de viscosidad, tenemos según las ec(8.51,8.52)

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (13.1)$$

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho g_i - \partial_i P + \partial_j \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (13.2)$$

pero asumiremos que la viscosidad no depende de la posición lo que nos da

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho g_i - \partial_i P + \mu \left( \Delta u_i + \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{u}}{\partial x_i} \right) \quad (13.3)$$

$$= \rho g_i - \partial_i P + \mu \Delta u_i \quad (13.4)$$

o de forma vectorial

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla P + \mu \Delta \mathbf{u} \quad (13.5)$$

Escribiendo la derivada material de forma explícita, obtenemos

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \rho \mathbf{g} - \nabla P + \mu \Delta \mathbf{u} \quad (13.6)$$

La constante  $\mu$  es el coeficiente de viscosidad de corte. La ecuación se reescribe usualmente

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{g} - \frac{\nabla P}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{u} \quad (13.7)$$

con  $\nu = \mu/\rho$  la viscosidad cinemática. Por la forma de la ecuación, la viscosidad cinemática aparece como un término de difusión

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \dots = \nu \Delta \mathbf{u} + \dots \quad (13.8)$$

Podemos ver algunos valores de los parámetros de viscosidad

	$\mu$ (gm.cm <sup>-1</sup> .s <sup>-1</sup> )	$\nu$ (cm <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup> )
aire	0.00018	0.15
agua	0.011	0.011
mercurio	0.016	0.0012
aceite de oliva	0.99	1.08
glicerina	23.3	18.5

La complejidad de la ec.(13.7) debe esencialmente a la presencia de un término no lineal, el término convectivo, y de un término de segundo orden, el término de viscosidad. En muchos casos, uno de los dos términos puede despreciarse frente al otro. Se define entonces un factor adimensional que estima la importancia del término convectivo frente al término de viscosidad. El orden de magnitud del término convectivo y del término viscoso puede estimarse a partir de la escala característica  $D$  del problema, la velocidad media del flujo  $u$ , la densidad  $\rho$  del fluido y su viscosidad  $\mu$ .

$$\|\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}\| \approx \rho \frac{u^2}{D} \quad \text{y} \quad \|\mu\Delta\mathbf{u}\| \approx \mu \frac{u}{D^2} \quad (13.9)$$

Por lo tanto, podemos definir un número adimensional conocido como número de Reynolds

$$R_e = \frac{\text{termino convectivo}}{\text{termino viscoso}} = \frac{\rho u D}{\mu} \quad (13.10)$$

Este número desempeña un papel muy importante en la mecánica de fluidos, ya que permite distinguir entre tres tipos de flujo:

1. Flujo con bajo número de Reynolds  $R_e \ll 1$ . El flujo es laminar y se rige esencialmente por la viscosidad. El término de inercia es despreciable y la ecuación de Navier-Stokes se convierte en

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \rho \mathbf{g} - \nabla P + \mu \Delta \mathbf{u}$$

que tiene el buen gusto de ser lineal. Si el flujo es estacionario, obtenemos el régimen de Stokes.

2. Flujo con alto número de Reynolds  $R_e \gg 1$ . En este caso, mostramos que los efectos viscosos se concentran en los bordes, en una fina capa llamada capa límite, y en la estela de los obstáculos. Fuera de estas zonas, el término viscoso es despreciable y encontramos la ecuación de Euler, es decir la ecuación sin viscosidad

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \rho \mathbf{g} - \nabla P$$

3. Flujo turbulento. La viscosidad estabiliza y regulariza los flujos en general. Sin embargo, cuando aumenta el número de Reynolds, el flujo laminar se vuelve inestable o incluso turbulento. La transición entre flujo laminar y turbulento se produce dentro de un cierto rango de valores del número de Reynolds, dependiendo del problema. En general, cuando  $R_e > 10^5$ , el flujo se vuelve turbulento, es decir, la velocidad en un punto  $M$  varía erráticamente con el tiempo. En este caso, dado que el problema es analíticamente insoluble, suelen utilizarse leyes fenomenológicas junto con el análisis dimensional.

Podemos ver algunos ejemplos de numero de Reynolds

Tipo de flujo	Numero de Reynolds
Flujo atmosférico	$R_e \approx 10^{11}$
Pez más rápido	$R_e \approx 10^8$
Sector aeronáutico	$R_e \approx 10^7$
Persona nadando	$R_e \approx 4 \cdot 10^6$
Flujo sanguíneo en la aorta	$R_e \approx 10^4$
Pez más pequeño	$R_e \approx 1$
Microfluidos	$R_e \approx 10^{-3} - 1$
Flujo sanguíneo en los capilares	$R_e \approx 10^{-3}$

Como ejemplo, de calculo, podemos considerar una pelota de tenis que se desplaza a la velocidad  $v = 100 \text{ km.h}^{-1}$  en el aire. El diámetro de una pelota de tenis es del orden de 7 cm, la densidad del aire es del orden de  $1 \text{ kg.m}^{-3}$  y su viscosidad es del orden de  $2 \cdot 10^{-5}$  por lo que

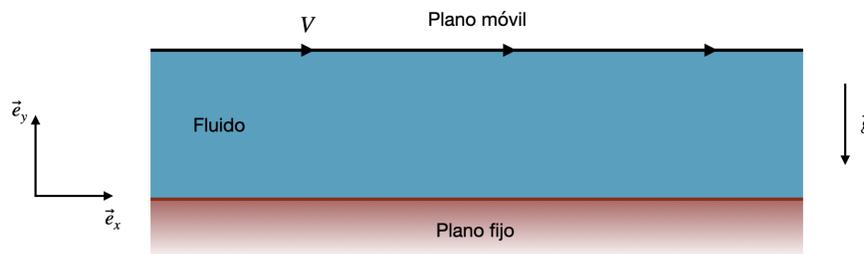
$$R_e = \frac{\rho v D}{\mu} \simeq \frac{1 \times 100/3,6 \times 0,07}{2 \cdot 10^{-5}} \simeq 10^5$$

Por lo tanto, el flujo es turbulento.

Ya hemos visto para el problema de flujo alrededor de un disco el tema de las condiciones de borde. Hemos definido que la velocidad normal al objeto es nula sobre la superficie de este mismo objeto. Está condición significa que el fluido no pasa a través del sólido.

Para un fluido viscoso, se introduce una segunda condición, sobre la velocidad tangente al sólido. Está velocidad debe ser la misma que la velocidad del sólido en esta dirección. Se llama la condición de no deslizamiento.

### 13.1 Flujo de Couette



Consideremos nuestro espacio bidimensional con un fluido que fluye entre 2 placas separadas por una distancia  $h$ . La placa inferior no se mueve, pero la superior lo hace

a velocidad constante  $V$ . Debido a la viscosidad, el fluido será arrastrado por la placa superior. Podemos suponer que la velocidad depende solamente de la altura, porque el tubo es infinito. Por lo tanto,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(y)$ . Usando la ecuación de incompresibilidad, obtenemos

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad (13.11)$$

Por lo tanto  $u_y = \text{constante}$ , pero las condiciones de borde fijan que  $u_y(y = 0) = u_y(y = h) = 0$  lo que implica  $u_y = 0$ . Eso nos lleva a que

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = u_x \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (13.12)$$

Asumiendo que el flujo es estática, implica que

$$\mathbf{0} = \mathbf{g} - \frac{\nabla P}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{u} \quad (13.13)$$

lo que nos da en componentes

$$-\rho g - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad (13.14)$$

$$-\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = 0 \quad (13.15)$$

La primera ecuación nos permite obtener

$$P(x, y) = -\rho g y + p(x) \quad (13.16)$$

con  $p(x)$  una función desconocida. Podemos asumir que no tenemos un gradiente de presión en la dirección  $x$ , lo que nos permite escribir para la segunda ecuación

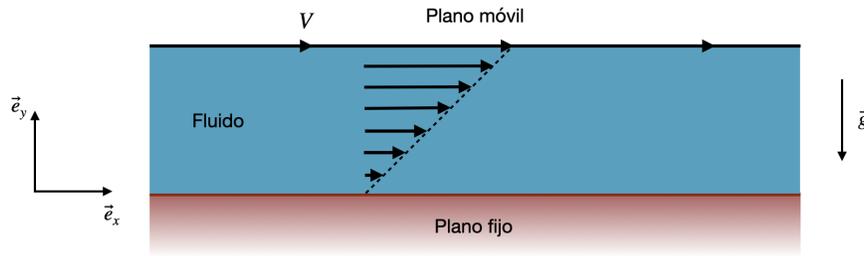
$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = 0, \quad u_x(y) = ay + b \quad (13.17)$$

Con las condiciones de borde

$$u_x(y = 0) = 0, \quad u_x(y = h) = V \quad (13.18)$$

obtenemos

$$\mathbf{u} = V \frac{y}{h} \mathbf{e}_x \quad (13.19)$$



### 13.2 Flujo de Poiseuille

Una de las variantes del flujo previo es considerar que tenemos un gradiente de presión tangencial constante

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \text{constante} \quad (13.20)$$

además de asumir que ambas placas son fijas. La primera parte nos lleva al mismo resultado (13.16) pero la segunda ecuación es

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = \frac{1}{\nu} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad u_x(y) = \frac{1}{2\nu} \frac{\partial P}{\partial x} y^2 + by + c \quad (13.21)$$

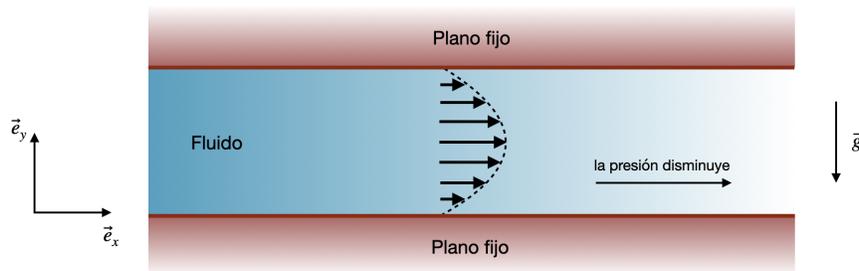
Con las condiciones de borde

$$u_x(y = 0) = 0, \quad u_x(y = h) = 0 \quad (13.22)$$

obtenemos

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2\nu} \frac{\partial P}{\partial x} y(y - h) \mathbf{e}_x \quad (13.23)$$

Obviamente, se deduce que el aumento de viscosidad disminuye la velocidad. Observamos también que si la presión disminuye en la dirección  $x$ , es decir  $\partial P/\partial x < 0$ , el fluido se mueve hacia la derecha ya que  $0 < y < h$ .



### 13.3 Ecuaciones de Stokes

A bajo número de Reynolds,  $Re \ll 1$ , el flujo está dominado por la viscosidad. En muchas situaciones, podemos ignorar completamente la derivada material  $D\mathbf{u}/Dt$ . Lo que queda son las ecuaciones de Stokes

$$\rho\mathbf{g} - \nabla P + \mu\Delta\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \text{y} \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (13.24)$$

Como en todas estas secciones, asumimos que la densidad es constante, podemos redefinir la presión tal que

$$p = P - \rho gz \quad (13.25)$$

lo que nos permite escribir

$$\nabla p = \mu\Delta\mathbf{u}, \quad \text{y} \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (13.26)$$

Estas ecuaciones se llaman las ecuaciones de Stokes. Por no depender del tiempo, estas ecuaciones son reversibles, no hay diferencia entre pasado y futuro. Una aplicación visual interesante se puede observar en este [vídeo](#).

Con estas ecuaciones, podemos en particular estudiar la formación de torbellinos por la presencia de la viscosidad. Tomando el rotacional de la primera ecuación y usando que el rotacional del gradiente es nulo, obtenemos

$$\Delta\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} \quad (13.27)$$

con  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{rot} \mathbf{u}$  la vorticidad. Por completitud, podemos obtener la ecuación de vorticidad de forma más genérica. Comenzando de la ecuación de Navier-Stokes en el caso incompresible con viscosidad constante (13.5), tenemos

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho\mathbf{g} - \nabla P + \mu\Delta\mathbf{u} \quad (13.28)$$

$$\Leftrightarrow \rho \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \rho\mathbf{g} - \nabla P + \mu\Delta\mathbf{u} \quad (13.29)$$

Usamos la identidad

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \frac{1}{2}\nabla u^2 - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) \quad (13.30)$$

$$= \frac{1}{2}\nabla u^2 - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} \quad (13.31)$$

lo que nos permite reescribir la ecuación de Navier-Stokes como

$$\rho \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \rho \frac{1}{2}\nabla u^2 - \rho\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} = \rho\mathbf{g} - \nabla P + \mu\Delta\mathbf{u} \quad (13.32)$$

Tomamos ahora el rotacional de esta ecuación y usamos la identidad

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{u} \operatorname{div} \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \operatorname{div} \mathbf{u} + (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} \quad (13.33)$$

Pero como  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$  y  $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{u}$ , tenemos  $\operatorname{div} \boldsymbol{\omega} = 0$ , lo que simplifica nuestra identidad

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} \quad (13.34)$$

y por lo tanto, nuestra ecuación de vorticidad es

$$\rho \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} - \rho (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = \mu \Delta \boldsymbol{\omega} \quad (13.35)$$

que podemos reescribir como

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nu \Delta \boldsymbol{\omega} \quad (13.36)$$

En el caso de tener una viscosidad dominante, obtenemos la ec.(13.27).

Queremos estudiar un problema de un fluido viscoso que no se mueve de forma vertical, el movimiento es horizontal, además de asumir que no hay ninguna variación de la velocidad en la dirección vertical  $z$ , es decir que asumimos que no hay bordes. Hemos visto que de la ecuación de conservación para un flujo incompresible,  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ , obtenemos  $\mathbf{u} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ , lo que implica en nuestro caso

$$\mathbf{A} = \psi(x, y) \vec{e}_z \quad (13.37)$$

o en coordenadas polares  $\vec{A} = \psi(r, \theta) \vec{e}_z$ . Lo que nos da  $\vec{\omega} = -\Delta \psi \vec{e}_z$  y por lo tanto una ecuación de vorticidad

$$\Delta^2 \psi = 0 \quad (13.38)$$

En coordenadas polares, obtenemos

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 \psi = 0 \quad (13.39)$$

Podemos buscar una solución con separación de variables y con el ansatz siguiente

$$\psi(r, \theta) = r^\lambda f_\lambda(\theta) \quad (13.40)$$

con  $\lambda$  un numero real o complejo. La solución es

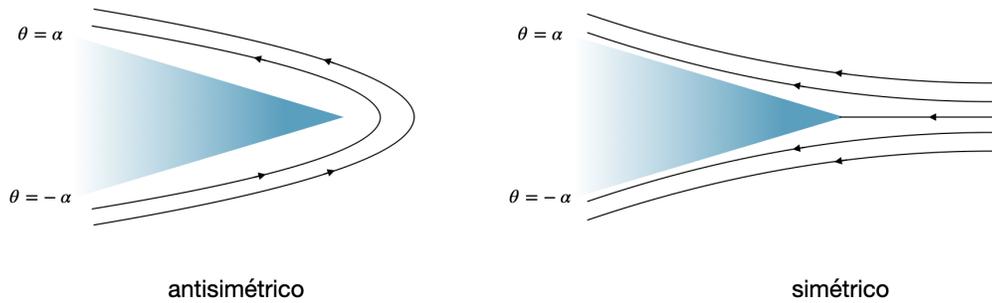
$$f_0(\theta) = A + B\theta + C\theta^2 + D\theta^3 \quad (13.41)$$

$$f_1(\theta) = A \cos \theta + B \sin \theta + C\theta \cos \theta + D\theta \sin \theta \quad (13.42)$$

$$f_2(\theta) = A \cos 2\theta + B \sin 2\theta + C\theta + D \quad (13.43)$$

$$f_\lambda(\theta) = A \cos \lambda\theta + B \sin \lambda\theta + C \cos(\lambda - 2)\theta + D \sin(\lambda - 2)\theta, \quad \lambda > 2 \quad (13.44)$$

Estas soluciones son generales y pueden aplicarse a distintos tipos de problemas. Nos falta definir el contorno alrededor del cual ocurre este flujo. Podemos analizar el movimiento alrededor de una esquina. Pueden estudiarse dos posibilidades:



Dentro de las dos opciones que aparecen en el gráfico, estamos interesado en el caso con velocidad radial antisimétrica pero como

$$\mathbf{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \mathbf{e}_r - \frac{\partial \psi}{\partial r} \mathbf{e}_\theta \quad (13.45)$$

se debe elegir el potencial  $\psi$  como una función par, lo que nos permite tomar  $B = D = 0$ . Además debemos fijar las 2 condiciones de borde

$$u_r(\theta = \pm\alpha) = u_\theta(\theta = \pm\alpha) = 0 \quad (13.46)$$

con  $\theta = \pm\alpha$  la posición de los 2 bordes. Obtenemos

$$A \cos(\lambda\alpha) + C \cos((\lambda - 2)\alpha) = 0 \quad (13.47)$$

$$\lambda A \sin(\lambda\alpha) + (\lambda - 2)C \sin((\lambda - 2)\alpha) = 0 \quad (13.48)$$

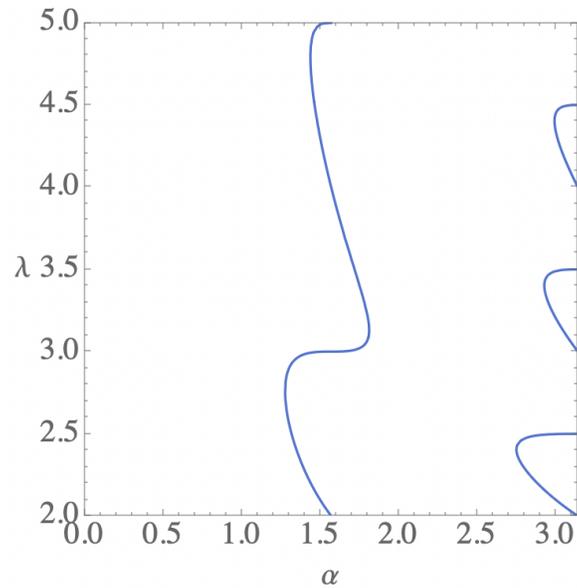
cuya solución no trivial implica que

$$(\lambda - 2) \cos(\lambda\alpha) \sin((\lambda - 2)\alpha) = \lambda \sin(\lambda\alpha) \cos((\lambda - 2)\alpha) \quad (13.49)$$

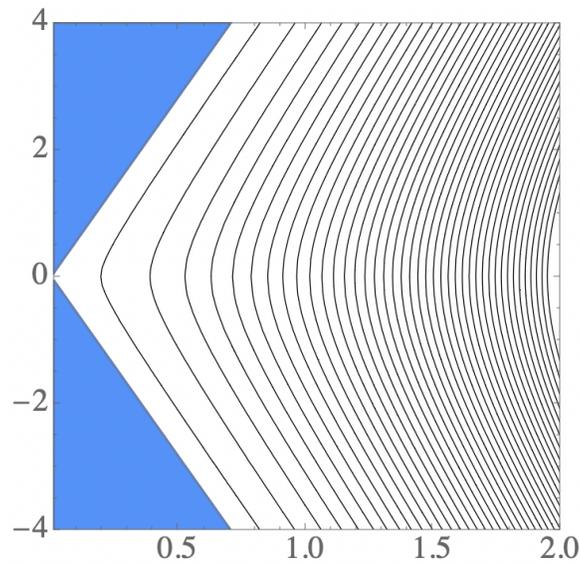
que podemos reducir gracias a las formulas de Euler

$$(\lambda - 1) \sin(2\alpha) = -\sin(2(\lambda - 1)\alpha) \quad (13.50)$$

Para un ángulo  $\alpha$  dado, podemos obtener el coeficiente  $\lambda$  y por lo tanto nuestra solución (13.40).

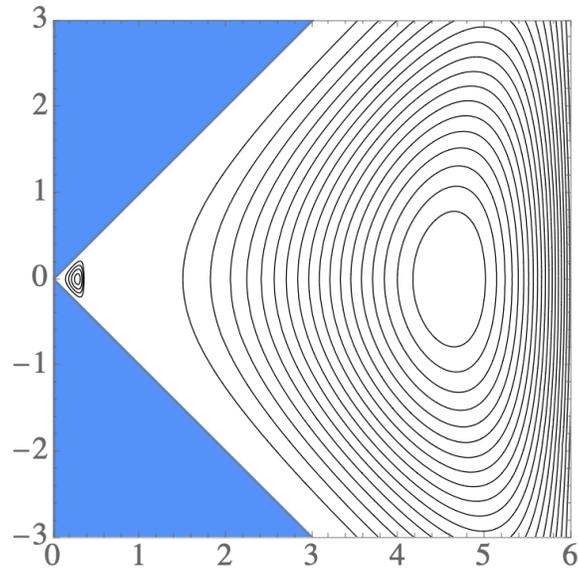


Se puede ver en este gráfico, que no existen siempre soluciones. De hecho, para  $\alpha < 73.1^\circ$  no hay soluciones. Para  $\alpha = 110^\circ$ , y  $\lambda = 1.69716$  obtenemos las líneas de corriente siguientes

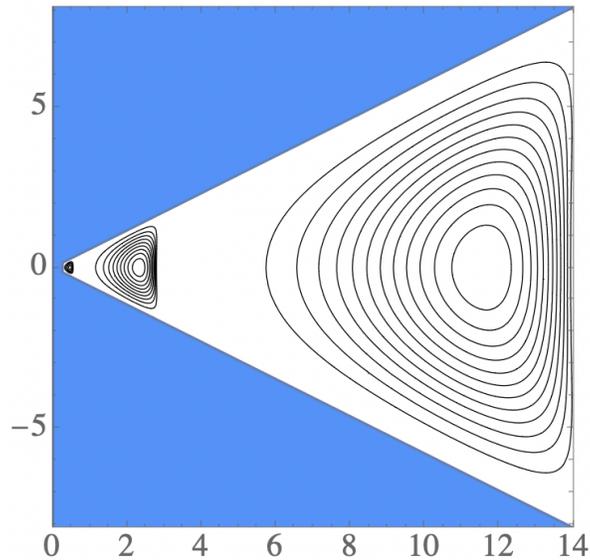


lo que corresponde a un flujo bastante aburrido. Para otros ángulos, la ecuación puede tener soluciones con  $\lambda$  complejo, lo que es mucho más interesante. Por ejemplo, para  $\alpha = 45^\circ$ , tenemos un número infinito de valores de  $\lambda$ . El valor más pequeño (parte real e imaginaria) es  $\lambda \simeq 3.74 + 1.12i$ , con lo cual podemos construir la función  $\psi$ .

Obviamente es una función compleja que podemos descomponer en una parte real e una parte imaginaria. Como la ecuación  $\Delta^2\psi = 0$  es lineal, podemos considerar solamente la parte real, lo que nos da



Aparecen un numero infinito de torbellinos, llamados torbellinos de Moffat descubierto en el año 1964<sup>8</sup>. Otro ejemplo para  $\alpha = 30^\circ$  donde podemos visualizar 4 torbellinos (3 solamente en el gráfico)



<sup>8</sup> *Viscous and resistive eddies near a sharp corner*, Keith Moffatt

Es interesante notar que las curvas  $\psi = \text{constante}$  cambian de signo de un torbellino a otro lo que implica un sentido de circulación que cambia.

No es fácil observarlos en la naturaleza, sino principalmente en laboratorios, ya que requieren una geometría específica y un flujo con un número de Reynolds bajo. Sin embargo, existen algunos entornos naturales donde pueden aparecer formaciones de remolinos similares, especialmente en casos donde el flujo está dominado por la viscosidad cerca de bordes o esquinas pronunciadas. Por ejemplo, cuando el agua de mar fluye más allá de los bordes afilados de icebergs o placas de hielo, pueden aparecer patrones de remolinos a pequeña escala, similares a los remolinos de Moffatt, particularmente en condiciones de calma. En estos flujos de bajo número de Reynolds cerca de los límites de hielo, la naturaleza viscosa del agua y la geometría del hielo conducen a la formación de remolinos atrapados. También, en regiones volcánicas, la lava de movimiento lento dentro de canales confinados o que fluye más allá de esquinas rocosas puede producir remolinos similares a los de Moffatt, ya que la lava altamente viscosa interactúa con los límites del canal. Esto es más probable con flujos particularmente viscosos, como la lava basáltica o andesítica, que se desplaza lentamente e interactúa estrechamente con las superficies circundantes. Por supuesto, también puede ocurrir en estuarios estrechos de baja energía o en canales de ríos, donde el agua fluye a lo largo de orillas abruptas o encuentra giros bruscos, formando pequeños remolinos similares a los de Moffatt. Estos son especialmente probables cuando la velocidad del flujo es baja y el efecto de la inercia es limitado en comparación con la viscosidad, lo que lleva a circulaciones localizadas en los límites.

## 14. Capa límite

Hemos estudiado dos tipos de situaciones en los previos capítulos. En el primero caso, hemos discutido las ecuaciones sin viscosidad, por lo cual la ecuación de Navier-Stokes se reduce a la ecuación de Euler

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla P \quad (14.1)$$

Esta ecuación es de primer orden para la velocidad, y por lo tanto pide solamente una sola condición, la condición de que el fluido no penetra dentro de un objeto.

Por otro lado, tenemos la ecuación con viscosidad

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla P + \mu \Delta \mathbf{u} \quad (14.2)$$

lo que corresponde a una ecuación diferencial de segundo orden. Por lo tanto, aunque la viscosidad puede ser muy muy pequeña, es decir encontrarse a alto numero de Reynolds, esta ecuación estará siempre diferente de la ecuación de Euler. De hecho, por ser una ecuación diferencial de segundo orden, debemos usar dos condiciones de borde, la condición de no penetración en el objeto pero también la condición de no deslizamiento. Esta condición hace que el fluido muy cercano al objeto es casi estacionario. Por lo tanto, se forma una capa muy delgada alrededor del objeto donde el fluido es casi estacionario y la viscosidad juega un rol. A fuera de esta capa, el fluido puede ser bien descrito por la ecuación de Euler, si el numero de Reynolds es bajo.

Por lo tanto, debemos considerar la ecuación completa. Asumimos que el fluido se desplaza en el plano  $(x, y)$  con una velocidad

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y) \quad (14.3)$$

Para simplificar las notaciones, llamamos la componente  $x$  de la velocidad  $u$  y la componente  $y$  de la velocidad,  $v$ . La ecuación de conservación se reduce a

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (14.4)$$

aunque la ecuación de Navier-Stokes en el caso estacionario es

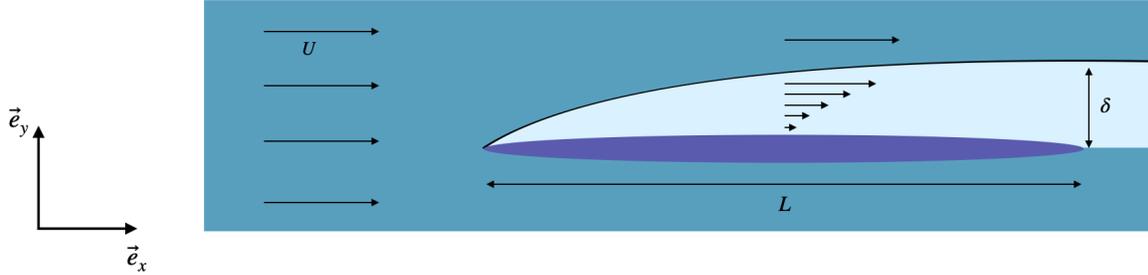
$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{g} - \frac{\nabla P}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{u} \quad (14.5)$$

Sus proyecciones en los ejes  $(x, y)$  son

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (14.6)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (14.7)$$

Estas ecuaciones pueden ser resueltas en varias situaciones. En nuestro caso queremos resolver el problema siguiente



es decir que tenemos una escala característica  $L$  en la dirección  $x$ , el tamaño de nuestro objeto y una escala característica  $\delta$  en la dirección  $y$ , el tamaño de la capa. Debemos tener  $\delta \ll L$ . En este problema, asumimos que el fluido se mueve en la dirección  $x$  a distancia grande del objeto con una velocidad  $U$ .

Por lo tanto, podemos hacer una análisis dimensional, para saber cuales son los términos más dominante. En la ecuación de conservación, tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{u}{L} \quad (14.8)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{v}{\delta} \quad (14.9)$$

lo que implica a partir de (14.4)

$$v \sim \frac{\delta}{L} u \ll u \quad (14.10)$$

Por lo tanto, el fluido se mueve poco en la dirección  $y$ , tenemos principalmente un movimiento en la dirección  $x$ . Considerando ahora la ecuación de Navier-Stokes, observamos que la parte izquierda de (14.6) es del orden  $u^2/L$ , aunque la parte izquierda de (14.7) es del orden  $\delta u^2/L^2$ . Lo que implica que la segunda ecuación es despreciable en comparación con la primera. Finalmente, en la parte derecha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim \frac{u^2}{L^2} \quad (14.11)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \frac{u^2}{\delta^2} \sim \frac{L^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \gg \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (14.12)$$

Lo que implica que la ecuación de Navier-Stokes se reduce a

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (14.13)$$

Además si asumimos que los gradientes de presión son del orden de cada termino de la izquierda, es decir

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \sim \frac{u^2}{L} \quad (14.14)$$

aunque

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \sim \frac{u^2 \delta}{L^2} \quad (14.15)$$

lo que implica que

$$\frac{\partial P}{\partial y} \sim \frac{\delta}{L} \frac{\partial P}{\partial x} \ll \frac{\partial P}{\partial x} \quad (14.16)$$

Podemos por lo tanto, asumir que la presión depende solamente de  $x$ . Finalmente, como la presión no depende de  $y$ , podemos ir a  $y = \infty$ , es decir muy lejano del objeto donde la ecuación de Euler es valida con velocidad  $u = U$  y  $v = 0$  lo que nos da

$$\rho U \frac{\partial U}{\partial x} = - \frac{\partial P}{\partial x} \quad (14.17)$$

lo que nos permite reescribir la ec.(14.13) de la forma siguiente

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (14.18)$$

lo que corresponde a la ecuación de Prandtl. Para que esta ecuación sea consistente, la parte derecha e izquierda deben tener el mismo orden de magnitud

$$\frac{U^2}{L} \sim \nu \frac{U}{\delta^2} \Leftrightarrow U \sim \frac{L}{\delta^2} \nu \quad (14.19)$$

Pero el numero de Reynolds (13.10) para este problema es

$$R_e = \frac{\rho U L}{\mu} = \frac{U L}{\nu} \sim \frac{L^2}{\delta^2} \quad (14.20)$$

es decir que la distancia característica de la capa esta relacionada al numero de Reynolds de la forma siguiente

$$\delta \sim \frac{L}{\sqrt{R_e}} \quad (14.21)$$

## 14.1 Capa límite de Blasius

La capa límite más simple posible se encuentra en el caso de un flujo uniforme a lo largo de una placa semi-infinita estacionaria que se mantiene paralela a la corriente incidente. Dado que la longitud de la placa es infinita, nuestra única elección para una escala de longitud característica, es la distancia,  $x$ . A partir de la ec.(14.21) podemos definir una expresión para el espesor de la capa límite en términos del número de Reynolds local,  $Re_x \equiv Ux/\nu$ ,

$$\delta(x) \sim \left(\frac{\nu x}{U}\right)^{1/2} = \frac{x}{\sqrt{Re_x}} \quad (14.22)$$

En el año 1908, Paul Richard Heinrich Blasius<sup>9</sup> descubrió una simetría de la ecuación de Prandtl. Haciendo la transformación siguiente, la ecuación queda similar

$$x \rightarrow a^2 x, \quad y \rightarrow ay, \quad u \rightarrow u, \quad v \rightarrow \frac{v}{a} \quad (14.23)$$

En este caso, se puede buscar una solución llamada autosimilar, es decir que no cambia cuando hacemos un cambio de escala. Para eso, se busca una solución de la variable invariante bajo esta transformación, es decir  $y/\sqrt{x}$ , pero como  $\delta(x) \sim \sqrt{x}$ , buscaremos una solución

$$u(x, y) = u\left(\frac{y}{\delta(x)}\right), \quad z \equiv \frac{y}{\delta(x)} \quad (14.24)$$

Para simplificar las ecuaciones, hacemos el cambio de variable

$$u(z) = U f'(z) \quad (14.25)$$

Es más simple si trabajamos con la función de corriente  $\psi$ . Como tenemos  $u = \partial\psi/\partial y$  podemos deducir que tenemos

$$\psi = \sqrt{U\nu x} f(z) \quad (14.26)$$

Con el uso de  $\psi$ , la ecuación de continuidad es automáticamente verificada. Además tenemos

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = U f'(z) \quad (14.27)$$

$$v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U\nu}{x}} \left( z f'(z) - f(z) \right) \quad (14.28)$$

---

<sup>9</sup>Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner reibung

lo que implica

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{U^2}{2x} f(z) f''(z) \quad (14.29)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{U^2}{x} f'''(z) \quad (14.30)$$

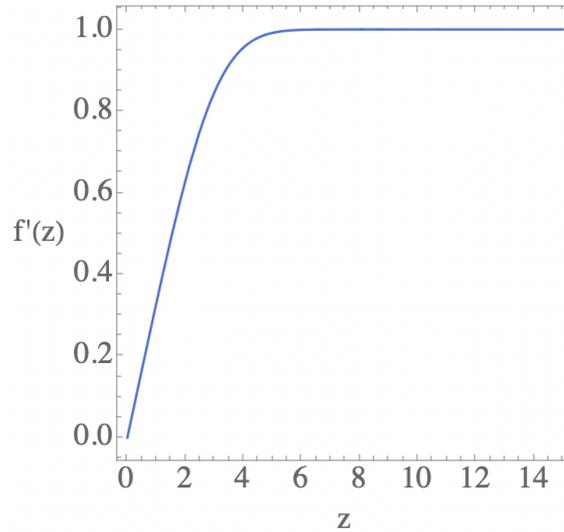
lo que nos da

$$2f'''(z) + f(z)f''(z) = 0 \quad (14.31)$$

Las condiciones de borde imponen que en  $y = 0$ , las velocidades son nulas, lo que implica

$$f(0) = f'(0) = 0 \quad (14.32)$$

Además cuando  $y \rightarrow \infty$ , tenemos  $u = U$ , lo que implica la condición  $f'(\infty) = 1$ . Tenemos por lo tanto un problema de una ecuación diferencial de tercer orden con condiciones de borde que podemos resolver numéricamente con un método de shooting. Se encuentra que una condición de  $f''(0) = 0.33206$  resuelve el problema



Observamos que la velocidad  $u$  se aproxima a su valor asintótico alrededor de  $z \sim 5$ , es decir

$$y \sim 5 \sqrt{\frac{\nu}{U}} \sqrt{x} \quad (14.33)$$

lo que define la capa límite. Para calcular la fuerza del fluido sobre la placa, debemos calcular el tensor tensión  $\sigma_{xy}$  tal que la fuerza es

$$\int_0^L \sigma_{yx}(x, y = 0) dx \quad (14.34)$$

Obtenemos

$$\sigma_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \simeq \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \sigma_{yx}(x, 0) = \rho \sqrt{\nu} U^{3/2} \frac{f''(0)}{\sqrt{x}} \quad (14.35)$$

lo que implica una fuerza de

$$\int_0^L \sigma_{yx}(x, y = 0) dx = 2\rho \sqrt{\nu} U^{3/2} f''(0) \sqrt{L} \quad (14.36)$$

con  $f''(0) \simeq 0.332$ . Este resultado es en buen acuerdo con las observaciones hasta  $Re \simeq 10^5$ , luego el sistema comienza a tener un comportamiento turbulento.

## 14.2 Capa límite de Falkner-Skan

Podemos definir otros tipos de capas, que son más general que la capa de Blasius. La componente de la velocidad del flujo responsable de la capa límite de Falkner-Skan presenta una dependencia en ley de potencia de la posición  $x$ ,

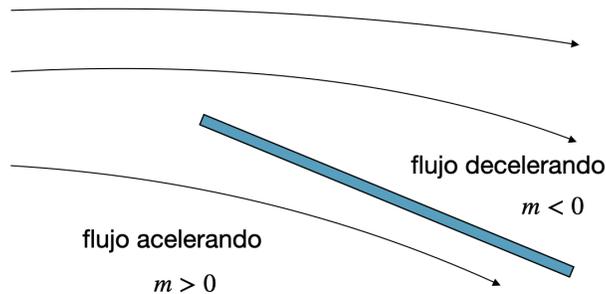
$$U(x) = \xi x^m \quad (14.37)$$

donde  $\xi > 0$  y  $m$  puede ser positivo o negativo. Por ser, una función no constante, la ecuación de conservación implica que  $v \neq 0$  y por lo tanto el flujo sube o baja en la dirección  $y$  es decir que tenemos un ángulo de ataque en comparación con el objeto.

Cuando  $m = 0$ , recuperamos el flujo de Blasius sobre una placa plana semi-infinita y el caso  $m = 1$  se llama el flujo de Hiemenz. Diferenciando la velocidad, obtenemos una expresión de la aceleración

$$\frac{dU}{dx} = m\xi x^{m-1} \quad (14.38)$$

que muestra que el flujo acelera cuando  $m > 0$  y decelera cuando  $m < 0$ , lo que por lo tanto representa un flujo como descrito en el gráfico siguiente



De forma similar al caso de Blasius, obtenemos para la ecuación de Prandtl

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \xi^2 m x^{2m-1} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (14.39)$$

También, introducimos la escala

$$\delta(x) \sim \left( \frac{\nu x}{U(x)} \right)^{1/2} = \left( \frac{\nu}{\xi} \right)^{1/2} x^{(1-m)/2} \quad (14.40)$$

A continuación, se busca de nuevo una solución autosimilar, es decir,  $u$  es una función de la variable de similitud

$$z \equiv \frac{y}{\delta(x)} = y \left( \frac{U(x)}{\nu x} \right)^{1/2} = y \left( \frac{\xi}{\nu x^{1-m}} \right)^{1/2},$$

e escribimos

$$u(x, y) = U(x) f'(z) \quad (14.41)$$

Esta velocidad puede ser obtenida a partir de

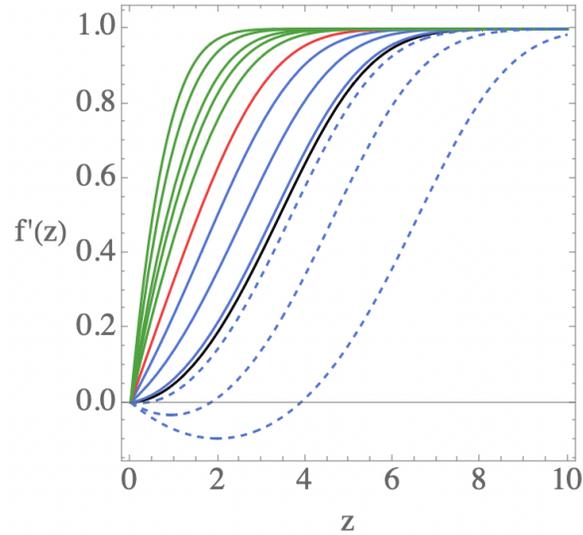
$$\psi(x, y) = (U \nu x)^{1/2} f(z) \quad (14.42)$$

lo que nos permite obtener  $v$  y por lo tanto la ecuación para  $f$

$$f'''(z) + \frac{1}{2}(m+1)f(z)f''(z) - m f'(z)^2 + m = 0 \quad (14.43)$$

sujeta a las mismas condiciones de borde

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1 \quad (14.44)$$

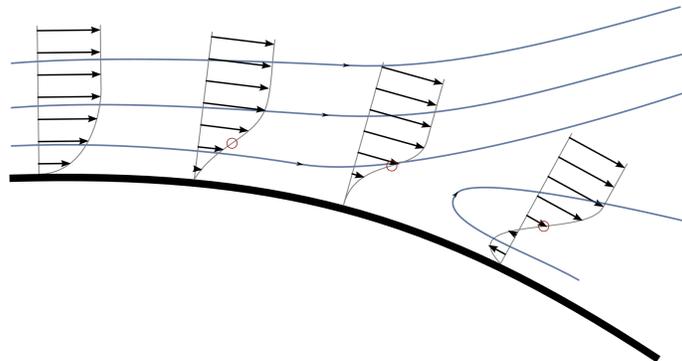


En rojo, tenemos el caso  $m = 0$ , en azul  $m < 0$  y en verde  $m > 0$ . Observamos que a menudo que  $m$  es más negativo,  $f''(0)$  se acerca a cero y por lo tanto la fuerza se anula (14.36). El caso de una fuerza nula está representando en negro. Eso ocurre para  $m = -0.0904$ . En 1937, Douglas Hartree demostró que las soluciones físicas de la ecuación de Falkner-Skan sólo existen en el intervalo  $-0.090429 \leq m \leq 2$ .

Es posible demostrar que, si  $m \geq 0$ , de modo que la velocidad de flujo  $U(x)$  aumenta con  $x$ , entonces el problema para  $f(z)$  tiene una única solución que corresponde a nuestras curvas verdes. Si  $m$  es menor que cero, de modo que la velocidad de flujo  $U(x)$  disminuye con  $x$ , hay dos soluciones para  $f(z)$ , siempre que  $m$  no sea menor que  $-0.0904$ . Una de ellas tiene un perfil de velocidad del tipo 'normal', con  $f''(0) > 0$ , representada en una línea azul continua. La segunda solución, representada en una línea azul discontinua, muestra un comportamiento extraño porque  $f''(0) < 0$ . En este caso, un elemento de fluido en la región más cercana al límite tiene una velocidad en dirección opuesta al resto del flujo.

En conclusión, para  $m$  positivo, la capa límite se encuentra en una situación de gradiente de presión favorable (flujo acelerado), lo cual tiende a mantener la capa límite adherida a la superficie. En este caso, es poco probable que ocurra separación. Para  $m$  negativo, el gradiente de presión es adverso (flujo desacelerado). Un gradiente de presión adverso se opone al flujo dentro de la capa límite, provocando una disminución de la velocidad cerca de la pared y una eventual inversión de la dirección del flujo si el gradiente es lo suficientemente fuerte. Si  $m$  cae por debajo de un valor crítico, ocurre la separación, es decir, la capa límite se desprende de la superficie.

En resumen, la solución de Falkner-Skan ayuda a predecir la separación de la capa límite al mostrar cómo responde el flujo a diferentes gradientes de presión, identificando específicamente las condiciones críticas donde los gradientes adversos conducen a la inversión del flujo y a la separación. Una situación del tipo del imagen puede ocurrir produciendo una separación de la capa límite



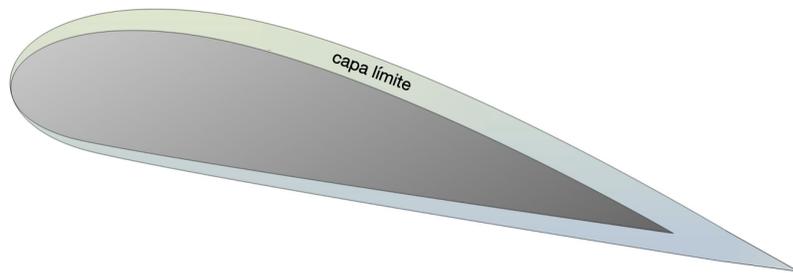
### 14.3 Separación de la capa límite

La mayoría de los objetos no son infinitamente delgados ni infinitamente largos, como suponíamos en los ejemplos anteriores. En realidad, obtenemos algo parecido a esto



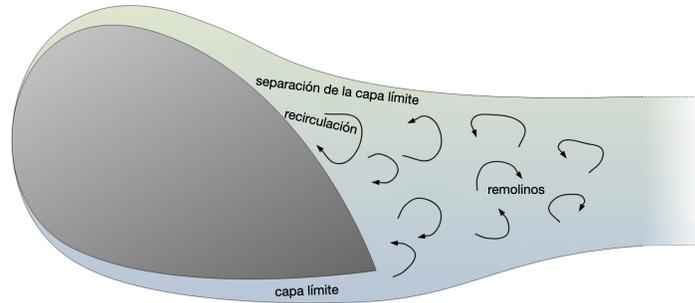
El estudio de este fenómeno va mucho más allá del alcance de este curso. Necesitamos resolver las ecuaciones numéricamente. Lo que se observa es una separación de la capa límite debido a un flujo opuesto alrededor de la superficie del objeto.

Cuando fluye alrededor de un cuerpo, el fluido intenta seguir el perfil de la superficie. Mientras el contorno de un cuerpo tenga transiciones suaves y la viscosidad sea lo suficientemente grande como para resistir las fuerzas de inercia, un flujo puede seguir el contorno. Alrededor del cuerpo se desarrolla una capa límite hidrodinámica típica, cuyo espesor depende en gran medida de la viscosidad.



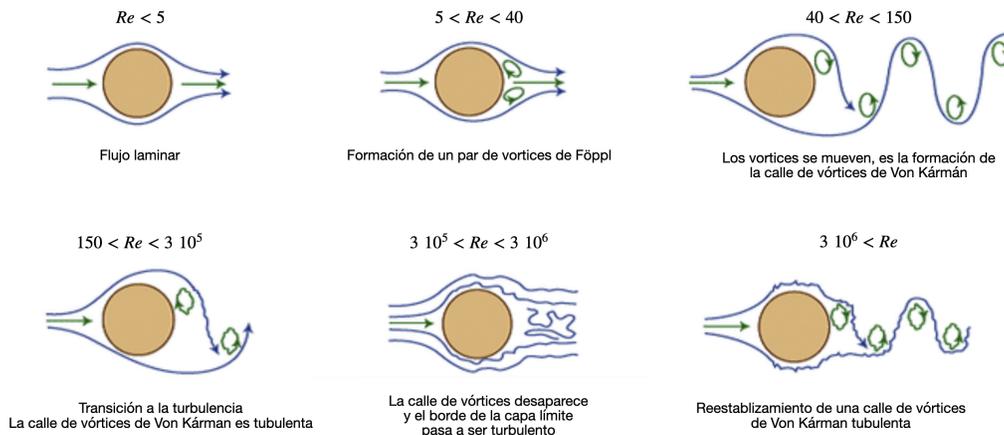
Sin embargo, en el caso de transiciones bruscas o al fluir alrededor de cuerpos romos, a menudo el fluido ya no es capaz de seguir el perfil. La capa límite o el flujo comienzan a separarse de la superficie del cuerpo. Esto se denomina separación de la capa límite o separación del flujo. Aguas abajo del punto de separación suelen formarse vórtices que dan lugar a un flujo turbulento. Una separación de flujo es especialmente peligrosa en las alas de un avión, ya que también provoca una pérdida de sustentación y

el avión corre el riesgo de estrellarse. En aviación, una separación de flujo tan peligrosa se denomina entrada en pérdida.



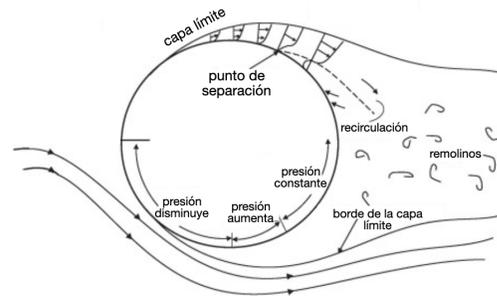
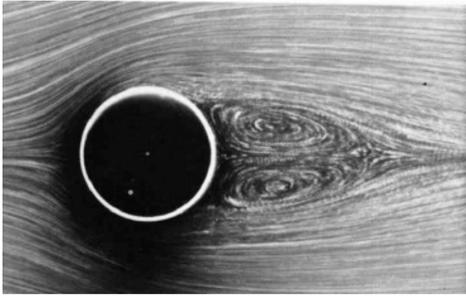
Como ya se ha mencionado, la separación de la capa límite es evidente en las transiciones bruscas. Sin embargo, también puede producirse una entrada en pérdida incluso con transiciones suaves. Este es el caso si el flujo se ralentiza considerablemente al fluir alrededor de un cuerpo. Como resultado, la presión puede aumentar tanto que empuje repentinamente el flujo en la dirección opuesta. Esto da lugar a una zona de recirculación, que provoca una separación del flujo. Dado que con cada cuerpo se produce una desaceleración del fluido, el peligro de separación de la capa límite también existe con cada cuerpo alrededor del cual fluye el fluido.

El número de Reynolds desempeña aquí un papel decisivo, ya que describe la relación entre las fuerzas de inercia existentes y las fuerzas de viscosidad actuantes en un fluido. Cuanto mayor sea el número de Reynolds, mayor será la inercia en comparación con la viscosidad y mayor será el riesgo de separación de la capa límite. Si los números de Reynolds son suficientemente elevados, incluso con cuerpos aerodinámicos, la separación del flujo acabará siendo inevitable.



Fluir contra una presión creciente se conoce como fluir en un gradiente de presión adverso. Se ha dedicado mucho esfuerzo e investigación al diseño de contornos de superficie aerodinámicos e hidrodinámicos y se han añadido características que retrasan la separación del flujo y lo mantienen unido el mayor tiempo posible, como el pelo de una pelota de tenis.

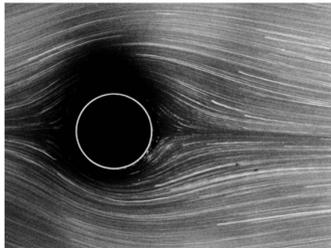
Para cerrar esta sección, podemos regresar a un problema abierto en el capítulo (11.3). El fenómeno de la separación de la capa límite permite resolver la paradoja de d'Alembert.



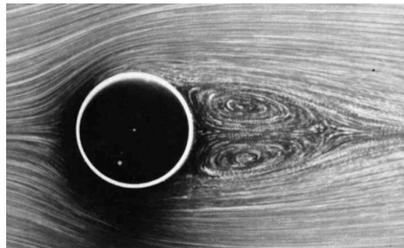
En efecto, un fluido idealizado que se modela como no viscoso e irrotacional es incapaz de ejercer una fuerza de arrastre sobre un obstáculo inmóvil, a pesar de que se observa que fluidos con un número de Reynolds muy elevado, ostensiblemente irrotacionales, ejercen fuerzas de arrastre significativas sobre obstáculos inmóviles. La resolución de la paradoja reside en la constatación de que, en tales fluidos, la viscosidad sólo puede despreciarse, y en consecuencia, el flujo sólo es irrotacional, en ausencia de separación de la capa límite. En consecuencia, la presión en la parte posterior del obstáculo es significativamente menor que la prevista por la dinámica de fluidos irrotacional. Por consiguiente, la fuerza de presión resultante en la parte delantera es mayor que en la parte trasera, y se ejerce una resistencia significativa sobre el obstáculo. El coeficiente de arrastre asociado a este tipo de arrastre es generalmente del orden de la unidad, y no tiende a cero a medida que el número de Reynolds tiende a infinito.

## 15. Turbulencia

La turbulencia es un estado complejo y caótico del movimiento de los fluidos caracterizado por fluctuaciones irregulares y estocásticas de la velocidad, la presión y otras propiedades del flujo. El número de Reynolds es importante para su caracterización



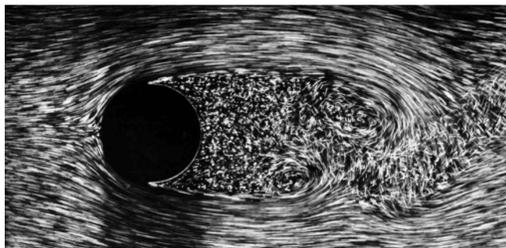
$Re = 1.54$



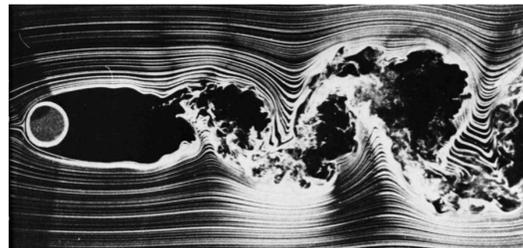
$Re = 26$



$Re = 140$



$Re = 2000$



$Re = 10000$

Se ve en estas fotografías<sup>10</sup> el flujo alrededor de una esfera para diferentes números de Reynolds, y por lo tanto la turbulencia para altos números de Reynolds.

La turbulencia se produce a altas velocidades de flujo y se distingue por una amplia gama de escalas de interacción, desde grandes torbellinos hasta escalas de disipación muy pequeñas. Las características clave de la turbulencia incluyen

- Irregularidad: El flujo turbulento es impredecible y varía mucho en el espacio y en el tiempo.
- Difusividad: Los flujos turbulentos potencian la mezcla y el transporte de momento, calor y masa.
- Disipación: La energía se transfiere de los torbellinos más grandes a los más pequeños y, finalmente, se disipa en forma de calor debido a los efectos viscosos.
- Vorticidad: Los flujos turbulentos presentan movimientos rotacionales intensos y fluctuantes.

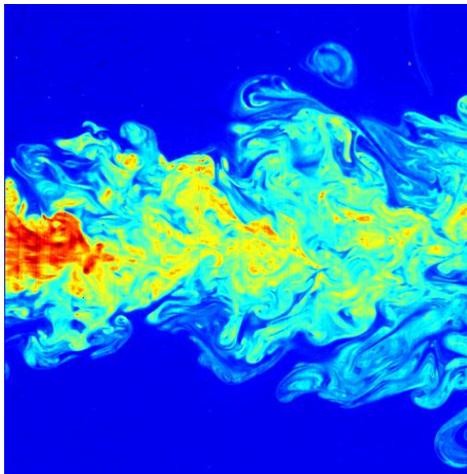
---

<sup>10</sup>*An album of fluid motion*, Milton Van Dyke

## 15.1 Cascada de energía

Uno de los aspectos importantes de la turbulencia es la cascada de energía. La energía se inyecta en el flujo a grandes escalas. Estas escalas corresponden al tamaño de los mayores torbellinos o vórtices del flujo. Las fuentes de inyección de energía pueden variar en función del contexto. Puede ser la agitación mecánica como por ejemplo en experimentos de laboratorio, la turbulencia puede generarse agitando el fluido con una paleta. En la atmósfera o los océanos, la energía puede ser inyectada por vientos, mareas o gradientes de temperatura. En tuberías y conductos, la energía se inyecta mediante bombas o ventiladores. Esta energía se transfiere a escalas progresivamente más pequeñas mediante un proceso denominado cascada de Richardson a través de un proceso no lineal en el que intervienen las interacciones de los torbellinos. Los grandes torbellinos pueden estirar y distorsionar los torbellinos más pequeños, transfiriendo energía de escalas mayores a escalas menores. Además, podemos tener que los grandes torbellinos se descomponen en torbellinos más pequeños a través de interacciones no lineales, en las que la energía cinética se redistribuye entre diferentes escalas.

En las escalas más pequeñas, conocidas como escalas de Kolmogórov, el proceso de cascada de energía termina y la energía cinética se disipa en forma de calor. En estas pequeñas escalas, la viscosidad molecular se vuelve significativa. La energía de los pequeños torbellinos se convierte en energía interna (calor) a través de fuerzas viscosas, donde las colisiones moleculares dominan la dinámica. Además, la disipación corresponde a un aumento del movimiento térmico aleatorio de las moléculas, lo que eleva ligeramente la temperatura del fluido.



Observamos en esta imagen, un chorro que presenta una amplia gama de escalas de longitud, un requisito previo para la aparición de una cascada de energía

Según Kolmogórov este proceso debe depender solamente de la escala a la cual uno se encuentra y la tasa de disipación de energía. Esta tasa se puede encontrar a partir de la ecuación de Navier-Stokes. Tenemos

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{u} \quad (15.1)$$

Con  $\mathbf{f}$  las fuerzas de volumen en particular las fuerzas que son al origen de la inyección de energía. Multiplicando esta ecuación por  $\mathbf{u}$ , obtenemos

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{u}u^2) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \nabla(P\mathbf{u}) + \nu \mathbf{u} \Delta \mathbf{u} \quad (15.2)$$

donde hemos usado la ecuación de conservación  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ . El último termino puede ser escrito

$$\mathbf{u} \Delta \mathbf{u} = \frac{1}{2} \Delta u^2 - \partial_i u_j \partial_i u_j \quad (15.3)$$

Tenemos 3 términos que corresponden a divergencias. Por lo tanto, si integramos estos términos en un volumen y usamos el teorema de la divergencia, obtenemos por ejemplo

$$\iiint \nabla(P\mathbf{u}) d^3x = \iint P\mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} \quad (15.4)$$

lo que converge hacia cero si el volumen es suficientemente grande ya que los campos decrecen hacia cero. En conclusión, tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint \frac{1}{2} u^2 d^3x = \iiint \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} d^3x - \nu \iiint \partial_i u_j \partial_i u_j d^3x \quad (15.5)$$

La parte izquierda corresponde a la variación en el tiempo del promedio de energía cinética de nuestro sistema. La parte derecha corresponde a las fuentes. Tenemos una energía por fuerzas externas que contribuyen de forma positiva y una pérdida de energía por viscosidad. Este último termino es la tasa de disipación de energía,  $\epsilon$  (por volumen)<sup>11</sup>.

Para encontrar la ley de Kolmogorov (encontrada por Obhukov), debemos hacer una análisis dimensional. Para tomar en cuenta la escala, es mejor trabajar en el espacio de Fourier  $k$  que tiene la dimensión  $L^{-1}$  con  $L$  una longitud y la tasa de disipación de energía  $\epsilon$  que tiene dimensión  $L^2 \cdot T^{-3}$  (ver sección siguiente para la definición de  $\epsilon$ ) donde se ha ocupado que la dimensión de  $\nu$  es  $L^2 \cdot T^{-1}$  con  $T$  el tiempo. Buscamos la energía por unidad de escala (y de masa) es decir  $E(k)$  tal que

$$E = \int_0^\infty E(k) dk \quad (15.6)$$

---

<sup>11</sup>Más detalles están dados en la sección siguiente.

Por lo tanto  $E(k)$  tiene dimensión  $L^3 \cdot T^{-2}$ . Por lo tanto, según las dimensiones debemos tener

$$E(k) \sim \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (15.7)$$

lo que corresponde a un resultado increíble por haber solamente usado dimensiones. Este resultado nos indica, en particular, que a una escala dada se requiere más energía cuando la disipación aumenta, lo cual tiene sentido. Para mantener una alta tasa de disipación en escalas pequeñas, necesitamos más energía a la escala dada, que luego será transferida a esas pequeñas escalas.

Podemos encontrar otra ley interesante por análisis dimensional, es la ley de Kolmogórov-Obhukov. Es una ley que proporciona una relación entre las diferencias de velocidad en dos puntos de un flujo turbulento y la distancia entre esos puntos. La correlación de estas 2 velocidades es

$$S_2(r) = \langle |u(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - u(\mathbf{x})|^2 \rangle \quad (15.8)$$

con  $\langle \cdot \rangle$  el promedio en el espacio. Esta cantidad tiene dimensión  $L^2 \cdot T^{-2}$ , por lo tanto deberíamos tener

$$S_2(r) \sim (\epsilon r)^{2/3} \quad (15.9)$$

Esta ley ha sido ampliamente validada mediante experimentos y simulaciones numéricas. La constante de proporcionalidad suele estar en torno a 2,0.

$$S_2(r) = 2(\epsilon r)^{2/3} \quad (15.10)$$

Esta ley de escala universal es uno de los aspectos más notables de la teoría de la turbulencia, ya que se aplica a una amplia variedad de flujos turbulentos independientemente de sus detalles específicos. Se aplica en las distancias intermedias, entre la escala a la cual se inyecta la energía y las escalas de disipación.

### 15.1.1 Ecuación de la cascada de energía

Derivamos la ecuación de la cascada de energía para completitud además de escribir las definiciones exactas de las cantidades definidas previamente.

Definimos la transformada de Fourier y la transformada inversa de la forma siguiente

$$f(\mathbf{x}) = \iiint \bar{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3 k, \quad \bar{f}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3 x \quad (15.11)$$

Por lo tanto, tenemos

$$\iiint e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3x = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}) \quad (15.12)$$

Consideramos la ecuación (15.5) y pasando al espacio de Fourier, obtenemos

$$u_i(\mathbf{x}) = \iiint \bar{u}_i(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3k \quad (15.13)$$

lo que nos da

$$u^2 \equiv u_i(\mathbf{x})u_i(\mathbf{x}) = \iiint \iiint \bar{u}_i(\mathbf{k})\bar{u}_i(\mathbf{k}') e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} d^3k d^3k' \quad (15.14)$$

Integrando sobre el espacio y usando (15.12), obtenemos

$$\iiint u^2 d^3x = (2\pi)^3 \iiint \bar{u}_i(\mathbf{k})\bar{u}_i(\mathbf{k}') \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}') d^3k d^3k' \quad (15.15)$$

$$= (2\pi)^3 \iiint \bar{u}_i(\mathbf{k})\bar{u}_i(-\mathbf{k}) d^3k \quad (15.16)$$

Asumiendo que no depende la dirección, obtenemos

$$\iiint u^2 d^3x = (2\pi)^3 4\pi \int \bar{u}_i(k)\bar{u}_i(k) k^2 dk = 2(2\pi)^4 \int k^2 \bar{u}(k)^2 dk \quad (15.17)$$

Como

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} \frac{\iiint u^2 d^3x}{\iiint d^3x} \equiv \int E(k) dk \quad (15.18)$$

deducimos

$$E(k) = \frac{(2\pi)^4}{V} k^2 \bar{u}(k)^2 \quad (15.19)$$

La parte izquierda de la ecuación (15.5) se transforma en

$$V \int \frac{\partial E(t, k)}{\partial t} dk \quad (15.20)$$

Hemos restablecido la dependencia de  $E(k)$  en función del tiempo  $E(t, k)$ .

Para la parte derecha de la ecuación (15.5), tenemos para el segundo termino

$$\partial_i u_j \partial_i u_j = - \iiint \iiint k_i k'_i \bar{u}_j(\mathbf{k})\bar{u}_j(\mathbf{k}') e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} d^3k d^3k' \quad (15.21)$$

lo que nos permite obtener

$$\iiint \partial_i u_j \partial_i u_j d^3 x = -(2\pi)^3 \iiint \iiint k_i k'_i \bar{u}_j(\mathbf{k}) \bar{u}_j(\mathbf{k}') \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}') d^3 k d^3 k' \quad (15.22)$$

$$= (2\pi)^3 \iiint \mathbf{k}^2 \bar{u}_j(\mathbf{k}) \bar{u}_j(-\mathbf{k}) d^3 k = 2(2\pi)^4 \int k^4 \bar{u}(k)^2 dk \quad (15.23)$$

donde hemos ocupado la aproximación esférica en el último paso. Usando la ec.(15.19), obtenemos para el segundo termino de la parte derecha

$$2V \int k^2 E(k) dk \quad (15.24)$$

Y finalmente el primer termino de la parte de derecha de (15.5) está escrito como

$$V \int F(t, k) dk \quad (15.25)$$

lo que nos permite escribir la ecuación (15.5) en el espacio de Fourier de la forma siguiente

$$\int \frac{\partial E(t, k)}{\partial t} dk = \int F(t, k) dk - 2\nu \int k^2 E(t, k) dk \quad (15.26)$$

de la cual obtenemos la expresión de la tasa de disipación

$$\epsilon(t) = 2\nu \int k^2 E(t, k) dk \quad (15.27)$$

además de una ecuación muy importante en la teoría de la cascada de energía

$$\frac{\partial E(t, k)}{\partial t} = F(t, k) - 2\nu k^2 E(t, k) \quad (15.28)$$

Nota que la tasa de disipación (15.27) puede ser calculada usando la ley de Kolmogórov (15.7)

$$\epsilon = 2C\nu\epsilon^{2/3} \int_0^\infty k^{-5/3} k^2 dk \quad (15.29)$$

con  $C$  la constante de proporcionalidad en la ley de Kolmogórov.

$$\epsilon^{1/3} = 2C\nu \int_0^\infty k^{1/3} dk \quad (15.30)$$

Obviamente esta integral diverge ya que no funciona hasta las escalas más pequeñas. Sabemos que existe una escala, llamada escala de Kolmogórov, a la cual aparece la

disipación. Por lo tanto, debemos integrar hasta esta escala  $k_{\text{máx}}$  lo que nos permite obtener

$$\epsilon^{1/3} = \frac{3}{2} C \nu k_{\text{máx}}^{4/3} \quad (15.31)$$

o de forma equivalente

$$k_{\text{máx}} = \left( \frac{2}{3C} \right)^{3/4} \left( \frac{\epsilon}{\nu^3} \right)^{1/4} \quad (15.32)$$

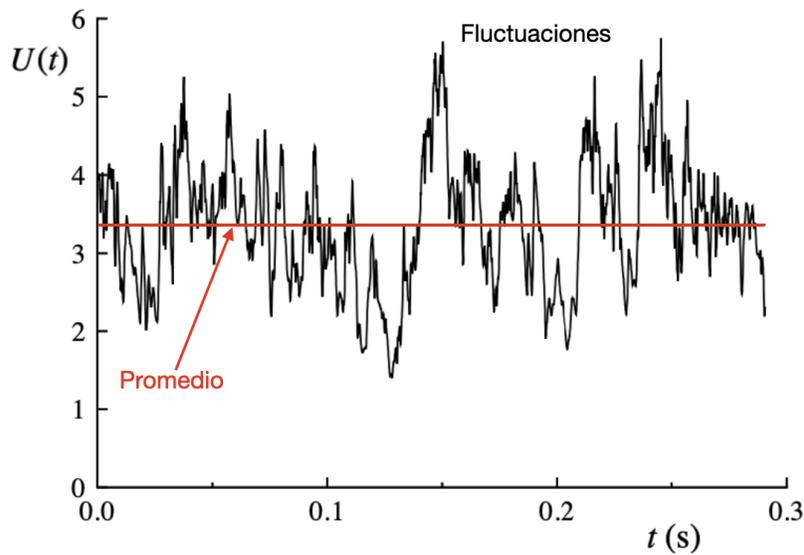
de lo cual deducimos la escala de Kolmogórov

$$\left( \frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4} \quad (15.33)$$

En la escala de Kolmogórov, la viscosidad domina y la energía cinética de la turbulencia se disipa en energía térmica.

## 15.2 Ecuaciones RANS

Aunque las leyes de Obukhov y Kolmogorov son muy poderosas, quedan limitada a una fenomenología muy particular. La turbulencia queda un tema muy complejo y aún no existe una teoría unificadora de la turbulencia, ni siquiera para las propiedades estadísticas de un flujo turbulento. Así pues, el enfoque será necesariamente mucho más empírico y heurístico que en otras ramas de la mecánica. Un aspecto importante es que las velocidades en un flujo turbulento tienen una velocidad media bien definida además de que la velocidad desvían en tiempos cortos del valor medio como se puede ver en este gráfico que muestra la velocidad axial de un chorro turbulento



Por lo tanto, las variables de campo dependientes de un flujo turbulento (componentes de velocidad, presión, temperatura, etc.) suelen analizarse y describirse utilizando definiciones y nomenclatura tomadas de la teoría de los procesos estocásticos y las variables aleatorias, a pesar de que la turbulencia no es totalmente aleatoria. Así, las características de las variables de campo del flujo turbulento suelen especificarse en términos de sus estadísticos o momentos. En particular, una cantidad de campo turbulento,  $\phi$ , se separa comúnmente en su primer momento (promedio),  $\langle\phi\rangle$ , y sus fluctuaciones,  $\delta\phi$  tal que

$$\phi = \langle\phi\rangle + \delta\phi \quad (15.34)$$

obviamente la fluctuación tiene media cero  $\langle\delta\phi\rangle = 0$ . Esta separación se conoce como descomposición de Reynolds. Usando esta descomposición a las ecuaciones de la mecánica de fluidos, uno obtiene nuevas ecuaciones llamadas RANS, Reynolds-averaged Navier-Stokes, o ecuaciones de Navier-Stokes promediadas por Reynolds. El promedio es definido como un promedio de ensamble. Consiste en promediar un gran número de realizaciones o instancias diferentes del flujo, cada una de ellas tomada bajo las mismas condiciones de contorno, pero en momentos diferentes o en series experimentales distintas. Por ejemplo, se puede considerar el experimento bajo exactamente las mismas condiciones que realizamos  $N$  veces, con la medición de una cantidad  $\phi^{(i)}$ , es decir el valor de  $\phi$  en el experimento  $i$ . El promedio considerado es definido como

$$\langle\phi\rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi^{(i)} \quad (15.35)$$

Vamos a aplicar este formalismo a nuestras ecuaciones dadas por un fluido incompresible por

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (15.36)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{u} \quad (15.37)$$

con  $\mathbf{f}$  las fuerzas de volumen, como la gravedad  $\mathbf{g}$ . Para simplificar las notaciones, reescribiremos la segunda ecuación de la forma siguiente

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \partial_j (u_i u_j) = f_i - \frac{1}{\rho} \partial_i P + \nu \Delta u_i \quad (15.38)$$

Usaremos la notación

$$u_i = \langle u_i \rangle + \delta u_i \quad (15.39)$$

$$P = \langle P \rangle + \delta P \quad (15.40)$$

La ecuación de continuidad es

$$\partial_i \langle u_i \rangle + \partial_i \delta u_i = 0 \quad (15.41)$$

Considerando el promedio de esta ecuación, nos da

$$\partial_i \langle u_i \rangle = 0 \quad (15.42)$$

ya que  $\langle \langle u_i \rangle \rangle = \langle u_i \rangle$  y  $\langle \delta u_i \rangle = 0$ , lo que implica desde la ec.(15.41)

$$\partial_i \delta u_i = 0 \quad (15.43)$$

Para la ecuación de Navier-Stokes, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \delta u_i}{\partial t} + \partial_j (\langle u_i \rangle \langle u_j \rangle) + \partial_j (\langle u_i \rangle \delta u_j) + \partial_j (\delta u_i \langle u_j \rangle) + \partial_j (\delta u_i \delta u_j) \\ = \langle f_i \rangle + \delta f_i - \frac{1}{\rho} \partial_i \langle P \rangle - \frac{1}{\rho} \partial_i \delta P + \nu \Delta \langle u_i \rangle + \nu \Delta \delta u_i \end{aligned} \quad (15.44)$$

Tomando el promedio de esta ecuación, obtenemos

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \partial_j (\langle u_i \rangle \langle u_j \rangle) + \partial_j \langle \delta u_i \delta u_j \rangle = \langle f_i \rangle - \frac{1}{\rho} \partial_i \langle P \rangle + \nu \Delta \langle u_i \rangle \quad (15.45)$$

Ocupando la ecuación de continuidad, obtenemos

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \langle u_j \rangle \partial_j \langle u_i \rangle + \partial_j \langle \delta u_i \delta u_j \rangle = \langle f_i \rangle - \frac{1}{\rho} \partial_i \langle P \rangle + \nu \Delta \langle u_i \rangle \quad (15.46)$$

Parece muy similar a la ecuación de Navier-Stokes con cantidades promediadas como la velocidad y la presión, pero tenemos un termino adicional, que representa una correlación entre las fluctuaciones en la velocidad

$$\partial_j \langle \delta u_i \delta u_j \rangle \quad (15.47)$$

por lo cual no tenemos una ecuación, lo que significa que tenemos más variable que ecuaciones. Este termino adicional, se llama el tensor tensión de Reynolds. El objetivo es por lo tanto obtener una ecuación para este tensor. Para ello, si restamos la ecuación de Navier-Stokes promediada, o ecuación de Reynolds (15.46) de nuestro punto de partida (15.44), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta u_i}{\partial t} + \partial_j (\langle u_i \rangle \delta u_j) + \partial_j (\delta u_i \langle u_j \rangle) + \partial_j (\delta u_i \delta u_j) - \partial_j \langle \delta u_i \delta u_j \rangle \\ = \delta f_i - \frac{1}{\rho} \partial_i \delta P + \nu \Delta \delta u_i \end{aligned} \quad (15.48)$$

Podemos siempre cambiar un índice mudo por otro

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta u_i}{\partial t} + \partial_k(\langle u_i \rangle \delta u_k) + \partial_k(\delta u_i \langle u_k \rangle) + \partial_k(\delta u_i \delta u_k) - \partial_k \langle \delta u_i \delta u_k \rangle \\ = \delta f_i - \frac{1}{\rho} \partial_i \delta P + \nu \Delta \delta u_i \end{aligned} \quad (15.49)$$

Usualmente  $\delta f_i = 0$  como por ejemplo por la gravedad. La gravedad no fluctúa en el tiempo. Por lo tanto, lo vamos a despreciar. Multiplicamos la ecuación previa por  $\delta u_j$

$$\begin{aligned} \delta u_j \frac{\partial \delta u_i}{\partial t} + \delta u_j \partial_k(\langle u_i \rangle \delta u_k) + \delta u_j \partial_k(\delta u_i \langle u_k \rangle) + \delta u_j \partial_k(\delta u_i \delta u_k) - \delta u_j \partial_k \langle \delta u_i \delta u_k \rangle \\ = -\delta u_j \frac{1}{\rho} \partial_i \delta P + \nu \delta u_j \Delta \delta u_i \end{aligned} \quad (15.50)$$

lo que podemos escribir como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta u_i \delta u_j}{\partial t} + \delta u_j \partial_k(\langle u_i \rangle \delta u_k) + \delta u_i \partial_k(\langle u_j \rangle \delta u_k) + \delta u_j \partial_k(\delta u_i \langle u_k \rangle) + \delta u_i \partial_k(\delta u_j \langle u_k \rangle) \\ + \delta u_j \partial_k(\delta u_i \delta u_k) + \delta u_i \partial_k(\delta u_j \delta u_k) - \delta u_j \partial_k \langle \delta u_i \delta u_k \rangle - \delta u_i \partial_k \langle \delta u_j \delta u_k \rangle \\ = -\delta u_j \frac{1}{\rho} \partial_i \delta P - \delta u_i \frac{1}{\rho} \partial_j \delta P + \nu \delta u_j \Delta \delta u_i + \nu \delta u_i \Delta \delta u_j \end{aligned} \quad (15.51)$$

que podemos reescribir, usando la ecuación de continuidad

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta u_i \delta u_j}{\partial t} + \delta u_j \delta u_k \partial_k \langle u_i \rangle + \delta u_i \delta u_k \partial_k \langle u_j \rangle + \langle u_k \rangle \partial_k(\delta u_i \delta u_j) + \partial_k(\delta u_i \delta u_j \delta u_k) \\ - \delta u_j \partial_k \langle \delta u_i \delta u_k \rangle - \delta u_i \partial_k \langle \delta u_j \delta u_k \rangle \\ = -\delta u_j \frac{1}{\rho} \partial_i \delta P - \delta u_i \frac{1}{\rho} \partial_j \delta P + \nu \Delta(\delta u_i \delta u_j) - 2\nu \langle \partial_k \delta u_i \rangle \langle \partial_k \delta u_j \rangle \end{aligned} \quad (15.52)$$

Introduciendo la notación  $R_{ij} = \langle \delta u_i \delta u_j \rangle$  y tomando el promedio, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{ij}}{\partial t} + R_{jk} \partial_k \langle u_i \rangle + R_{ik} \partial_k \langle u_j \rangle + \langle u_k \rangle \partial_k R_{ij} + \partial_k \langle \delta u_i \delta u_j \delta u_k \rangle \\ = -\frac{1}{\rho} \langle \delta u_j \partial_i \delta P \rangle - \frac{1}{\rho} \langle \delta u_i \partial_j \delta P \rangle + \nu \Delta R_{ij} - 2\nu \langle (\partial_k \delta u_i) (\partial_k \delta u_j) \rangle \end{aligned} \quad (15.53)$$

El punto clave es que podemos obtener una ecuación para  $R_{ij}$ , pero con un termino de 3 puntos  $\langle \delta u_i \delta u_j \delta u_k \rangle$ . Y si tratamos de conseguir una ecuación para  $\langle \delta u_i \delta u_j \delta u_k \rangle$  aparecerá un termino de 4 puntos  $\langle \delta u_i \delta u_j \delta u_k \delta u_m \rangle$ , y así sucesivamente. Nos encontramos con que tenemos una jerarquía infinita de ecuaciones.

Esto no es inusual en la física cuando se hace este tipo de análisis. Se encuentra este tipo de jerarquías en otros contextos como por ejemplo en la teoría cinética donde se llama la jerarquía BBGKY (Bogoliubov–Born–Green–Kirkwood–Yvon). En el contexto de la turbulencia, esto se conoce como el problema de cierre: el conjunto de ecuaciones no se cierra y sigue obligando a buscar el siguiente orden en las fluctuaciones. No hay una forma matemáticamente bien definida de truncar esta serie infinita de ecuaciones. Tampoco hay una razón física para esperar que se produzca alguna simplificación. La turbulencia es un problema fuertemente acoplado y, para hacer las cosas bien, hay que preocuparse de verdad por esta serie infinita de ecuaciones. Por supuesto, eso no es especialmente práctico. Así que para proceder, la estrategia habitual es asumir algo. La más simple es conocida como hipótesis de Boussinesq, el tensor  $R_{ij}$  que es simétrico, se descompone en una parte de traza  $k$  y una parte sin traza

$$R_{ij} = \frac{2}{3}k\delta_{ij} - \nu_t \left( \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) \quad (15.54)$$

con  $\nu_t$  la viscosidad de remolino de la turbulencia,  $k = \frac{1}{2} \langle \delta u_i \delta u_i \rangle$  se llama la energía cinética de la turbulencia. Obviamente esta formulación introduce 2 nuevas variables  $k$  y  $\nu_t$  por las cuales necesitamos ecuaciones para cerrar el problema. Usualmente se introducen 2 variables como por ejemplo el modelo  $k - \epsilon$  que considera las variables  $k$  y la tasa de disipación de turbulencia  $\epsilon = 2\nu \langle s_{ij} s_{ij} \rangle$ , con  $s_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i \delta u_j + \partial_j \delta u_i)$ . Se llama el modelo de turbulencia  $k - \epsilon$ . La viscosidad de turbulencia se define como  $\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$ , con  $C_\mu$  una constante. La ecuación para  $k$  se obtiene tomando la traza de la ec.(15.53)

$$2 \frac{\partial k}{\partial t} + 2R_{ij} \partial_j \langle u_i \rangle + 2 \langle u_j \rangle \partial_j k + \partial_j \langle \delta u_i \delta u_i \delta u_j \rangle = -\frac{2}{\rho} \langle \delta u_i \partial_i \delta P \rangle + 2\nu \Delta k - 2\nu \langle \partial_j \delta u_i \partial_j \delta u_i \rangle \quad (15.55)$$

Podemos reescribir esta ecuación de la forma

$$\frac{\partial k}{\partial t} + 2 \langle u_j \rangle \partial_j k + \partial_j T_j = -R_{ij} \partial_j \langle u_i \rangle - \epsilon \quad (15.56)$$

con

$$T_j = \frac{1}{2} \langle \delta u_i \delta u_i \delta u_j \rangle - \nu \partial_j k - \nu \delta u_i \partial_i \delta u_j + \frac{1}{\rho} \langle \delta u_j \delta P \rangle \quad (15.57)$$

Una de las modelizaciones considera

$$T_j = -\frac{\nu_t}{\sigma_k} \partial_j k \quad (15.58)$$

con usualmente  $\sigma_k = 1$ . Una ecuación mucho más empírica es definida para  $\epsilon$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + 2\langle u_j \rangle \partial_j \epsilon = \partial_i \left( \frac{v_t}{\sigma_\epsilon} \partial_i \epsilon \right) + C_{\epsilon 1} \frac{\mathcal{P} \epsilon}{k} - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (15.59)$$

con  $\mathcal{P} = -R_{ij} \partial_j \langle u_i \rangle$ . Algunos valores estándares de estos parámetros están dado por

$$C_\mu = 0.09, \quad C_{\epsilon 1} = 1.44, \quad C_{\epsilon 2} = 1.92, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\epsilon = 1.3 \quad (15.60)$$

El modelo  $k - \epsilon$  se utiliza ampliamente en aplicaciones industriales y produce resultados útiles a pesar de su validez limitada. Afortunadamente, muchos sectores de la industria están interesados específicamente en una clase limitada de flujos, como los flujos en tuberías en el sector de transporte de petróleo, las turbinas y los combustores en la ingeniería energética. La mayor parte de la investigación sobre turbulencia consiste en examinar y validar modelos de turbulencia existentes caso por caso para estos problemas específicos.

A pesar de los esfuerzos de un siglo por desarrollar modelos de turbulencia promediadas, RANS, hasta ahora no se ha logrado crear un modelo de propósito general adecuado para una amplia gama de aplicaciones prácticas. Esto se debe en gran medida a las diferencias en el comportamiento de los remolinos grandes y pequeños. Los remolinos más pequeños son casi isotrópicos y presentan un comportamiento universal (al menos para flujos turbulentos con números de Reynolds suficientemente altos). En cambio, los remolinos más grandes, que interactúan con el flujo medio y extraen energía de él, son más anisotrópicos y su comportamiento depende de la geometría del dominio del problema, las condiciones de contorno y las fuerzas de volumen. Al utilizar ecuaciones promediadas de Reynolds, el comportamiento colectivo de todos los remolinos debe describirse con un solo modelo de turbulencia, pero la dependencia de los remolinos más grandes en el problema complica la búsqueda de modelos aplicables de forma generalizada.

Por estas razones, la turbulencia también se estudia mediante otros modelos. Podríamos imaginar una integración directa de las ecuaciones de Navier-Stokes sin realizar aproximaciones. Sin embargo, este tipo de simulaciones requieren una resolución espacial y temporal extremadamente alta. Como resultado, son muy lentas y no permiten integrar sistemas con geometrías complejas, chorros turbulentos  $\dots$ , lo que las hace poco prácticas para problemas concretos. Por lo tanto, tenemos que continuar con métodos aproximativos. Una forma es usar un filtro que separa las grandes escalas de las pequeñas escalas a las cuales las simulaciones no tienen accesos. Usando un filtro que elimina las pequeñas escalas permite ganar en rapidez ya que las pequeñas escalas son las más difícil en las simulaciones. Obviamente, está información de las pequeñas

escalas debe ser reintroducida en las ecuaciones usando modelos empíricos. Uno de los modelos más popular es el modelo de Smagorinsky que lleva el nombre del meteorólogo que ha introducido este formalismo.