1. Paradoja de d'Alembert

a/ A grandes distancias ($r \to \infty$):

$$v_r(r,\theta) \approx U\cos\theta$$
$$v_\theta(r,\theta) \approx -U\sin\theta$$

b/ U es la velocidad del flujo en la dirección x a grandes distancias

$$\mathbf{v} = v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta = U\Big(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta\Big) = U\vec{e}_x$$

c/ La incompresibilidad se verifica comprobando que la divergencia del campo de velocidad es cero:

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}$$
$$\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} = U\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta$$
$$\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} = -U\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta$$
$$\nabla\cdot\mathbf{v} = \frac{U}{r}\left(1+\frac{R^2}{r^2}-1-\frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta = 0$$

El flujo es incompresible.

d/ En $r = R$:

$$v_r(R,\theta) = 0$$
$$v_\theta(R,\theta) = -2U\sin\theta$$

es decir que no hay penetración del fluido dentro del disco.

e/ Usando la ley de Bernoulli, sabemos que a una altura constante, tenemos a lo largo de una linea de corriente

$$P + \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2 = \text{ constante}$$

Pero

$$\mathbf{v}^2 = U^2\Big[\Big(1-\frac{R^2}{r^2}\Big)^2\cos^2\theta + \Big(1+\frac{R^2}{r^2}\Big)^2\sin^2\theta\Big]$$

Al infinito, tenemos

$$\mathbf{v}^2 = U^2$$

aunque sobre el disco

$$\mathbf{v}^2 = 4U^2\sin^2\theta$$

Lo que implica

$$P(R,\theta) = P_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2\left(1-4\sin^2\theta\right)$$

f/ La fuerza en la dirección x es:

$$F_x = \int_0^{2\pi} P(R,\theta) R \cos\theta \, d\theta = 0$$

La fuerza en la dirección y es:

$$F_y = \int_0^{2\pi} P(R,\theta) R \sin\theta \, d\theta = 0$$

g/ Los resultados no corresponden a lo esperado ya que el disco no se mueve. Es la Paradoja de D'Alembert, que indica que en un flujo ideal, incompresible e irrotacional, no hay arrastre. En la realidad, la viscosidad y la formación de una capa límite contribuyen al arrastre, lo cual no se refleja en el modelo idealizado.

2. Características de una atmósfera estacionaria

En todos los casos, porque el fluido es estacionario, tenemos

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$

a/ Para un fluido incompresible, la densidad ρ es constante. Integrando la ecuación previa con respecto a z:

$$P(z) = -\rho g z + P_0$$

Donde P_0 es la constante de integración, representando la presión en $z = 0$.

b/ Para un fluido perfecto comprensible e isotérmico, la densidad ρ varía con la presión según la ecuación del estado del gas ideal:

$$PV = nRT \quad \Leftrightarrow \quad PV = \frac{m}{M} RT \quad \Leftrightarrow \quad PM = \rho RT$$

con M la masa molar y m la masa del gas.

Usamos la ecuación de equilibrio hidrostático:

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{PM}{RT} g$$

Separando variables y integrando:

$$\int \frac{dP}{P} = -\frac{gM}{RT} \int dz$$

$$\ln P = -\frac{gM}{RT} z + C$$

$$P = e^C e^{-\frac{gM}{RT} z}$$

Definimos e^C como una nueva constante P_0:

$$P(z) = P_0 e^{-\frac{gM}{RT} z}$$

c/ Para un fluido perfecto comprensible con una temperatura que varía con la altura $T(z) = az + b$, la densidad se relaciona con la presión y la temperatura mediante la ecuación de estado:

$$PM = \rho RT(z)$$

$$\rho = \frac{PM}{RT(z)}$$

La ecuación de equilibrio hidrostático es:

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{PM}{RT(z)}g$$

Sustituyendo $T(z) = az + b$:

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{PM}{R(az+b)}g$$

Separando variables y integrando:

$$\int \frac{dP}{P} = -\frac{gM}{R} \int \frac{dz}{az+b}$$

La integral del lado derecho es:

$$\int \frac{dz}{az+b} = \frac{1}{a} \ln |az+b|$$

Entonces:

$$\ln P = -\frac{gM}{Ra} \ln |az+b| + C$$

$$P = e^{C}(b+az)^{-\frac{gM}{Ra}}$$

Definimos e^C como una nueva constante $P_0/b^{-gM/Ra}$:

$$P(z) = P_0 \left(1 + \frac{a}{b}z\right)^{-gM/Ra}$$