1. Similitud y escalas

Para simular la fuerza de arrastre en el modelo a escala de un sexto en el túnel de viento, utilizamos el concepto de similitud. Esto requiere que los números de Reynolds del flujo alrededor del automóvil de tamaño completo y del modelo en el túnel de viento sean iguales. El número de Reynolds Re está dado por:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v L}{\mu}$$

Para lograr la similitud, el número de Reynolds para el automóvil de tamaño completo en la carretera, $\mathrm{Re}_{\mathrm{normal}}$, debe ser igual al número de Reynolds para el modelo en el túnel de viento, $\mathrm{Re}_{\mathrm{modelo}}$. Suponiendo que la densidad del aire ρ y la viscosidad dinámica μ son las mismas en ambos entornos, obtenemos

$$v_{\text{carretera}} L_{\text{normal}} = v_{\text{túnel}} L_{\text{modelo}}$$

En conclusión, si el tamaño se reduce a una sexta parte, la velocidad debe multiplicarse por 6, lo que significa una velocidad de 360 km/h.

2. Aguas poco profundas

a/ Consideramos la transformación siguiente (podemos siempre considerar que la velocidad u no se transforma)

$$\begin{aligned} u &\to u \\ h &\to \alpha h \\ t &\to \beta t \\ x &\to \gamma x \end{aligned}$$

Bajo esta transformación las ecuaciones se transforman en

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha}{\beta}\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\alpha}{\gamma}\frac{\partial uh}{\partial x} = 0 \\ &\frac{1}{\beta}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\gamma}u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\alpha}{\gamma}g\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

Para que estas ecuaciones sean invariantes, debemos tomar

$$\beta = \gamma\,, \quad \alpha = 1$$

es decir que las ecuaciones on invariante bajo la transformación

$$t \to \gamma t\,, \quad x \to \gamma x$$

Por lo tanto, podemos deducir que una variable autosimilar es

$$z = \frac{x}{t}$$

b/ Buscaremos soluciones de la forma $u(t,x) = u(x/t) = u(z)$ y $h(t,x) = h(z)$. Las derivadas se transforman de la forma siguiente

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{dh}{dz}\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{x}{t^2}h'(z)\\
\frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{dh}{dz}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{t}h'(z)\\
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{du}{dz}\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{x}{t^2}u'(z)\\
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{du}{dz}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{t}u'(z)
\end{aligned}$$

Lo que transforma las ecuaciones en

$$\begin{aligned}
&-\frac{x}{t^2}h'(z) + \frac{1}{t}\frac{duh}{dz} = 0\\
&-\frac{x}{t^2}u'(z) + \frac{u}{t}u'(z) + g\frac{1}{t}h'(z) = 0
\end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned}
&-zh'(z) + u'(z)h(z) + u(z)h'(z) = 0\\
&-zu'(z) + u(z)u'(z) + gh'(z) = 0
\end{aligned}$$

c/ De la primera ecuación, obtenemos

$$u'(z)h(z) = h'(z)\Big(z - u(z)\Big) \tag{1}$$

$$gh'(z) = u'(z)\Big(z - u(z)\Big) \tag{2}$$

Reemplazando la primera ecuación en la segunda, obtenemos

$$gu'(z)h(z) = u'(z)\Big(z - u(z)\Big)^2$$

Como $u'(z) \neq 0$, obtenemos

$$gh(z) = \Big(z - u(z)\Big)^2 \tag{3}$$

De lo cual podemos deducir

$$h'(z) = \frac{2}{g}\Big(z - u(z)\Big)\Big(1 - u'(z)\Big) \tag{4}$$

reemplazando en la ec.(2), obtenemos

$$2\Big(z - u(z)\Big)\Big(1 - u'(z)\Big) = u'(z)\Big(z - u(z)\Big)$$

lo que se reduce a

$$2\Big(1 - u'(z)\Big) = u'(z) \quad \Leftrightarrow \quad u'(z) = \frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad u(z) = \frac{2}{3}z$$

Usando ec.(3), obtenemos

$$h(z) = \frac{z^2}{9g}$$

es decir

$$u(t,x) = \frac{2}{3}\frac{x}{t}\,, \quad h(t,x) = \frac{1}{9g}\Big(\frac{x}{t}\Big)^2$$

3. El problema de Rayleigh

a/ El problema es invariante bajo la transformación

$$t \to a^2 t\,, \quad x \to ax$$

Lo que nos permite definir una variable $z = x/\sqrt{t}$

b/ Buscamos una solución de la forma $u(t,x) = u(z)$, lo que nos permite obtener

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{x}{2t^{3/2}} u'(z)$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{t}} u'(z)$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{t} u''(z)$$

lo que simplifica la ecuación en

$$u''(z) - \frac{z}{2\nu} u(z) = 0$$