1. Flujo de Couette

De forma similar a lo que hemos visto en clase, el fluido debería tener una velocidad que depende solamente de y, es decir $\mathbf{u}(y)$. Usando la ecuación de incompresibilidad, encontramos

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

ya que la velocidad no depende de x. Por lo tanto, obtenemos que $u_y = A$ con A una constante. Usando las condiciones de no penetración del fluido dentro de las placas en $y = 0$ e en $y = h$, deberíamos tener $u_y(y = 0) = u_y(y = h) = 0$ lo que implica $A = 0$ es decir $u_y = 0$. Este resultado significa que el fluido no fluye en la dirección y. El flujo es planar.
Ahora usamos la ecuación de Stokes

$$\rho\mathbf{g} - \nabla P + \mu\Delta\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{2}$$

La proyección de está ecuación en la dirección x e en la dirección y son

$$-\frac{\partial P}{\partial x} + \mu\Delta u_x = 0 \tag{3}$$

$$-\rho g - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \tag{4}$$

De la segunda ecuación, obtenemos $\rho g + \frac{\partial P}{\partial y} = 0$, lo que nos da

$$P(x, y) = P(x, y = 0) - \rho g y \tag{5}$$

Asumiendo que no tenemos un gradiente de presión en la dirección del flujo, obtenemos

$$P(x, y) = P(y = 0) - \rho g y \equiv P_0 - \rho g y \tag{6}$$

Con este resultado, podemos simplificar la ecuación $-\frac{\partial P}{\partial x} + \mu\Delta u_x = 0$ a la ecuación $\mu\Delta u_x = 0$, lo que es

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = 0 \tag{7}$$

cuya solución es

$$u_x(y) = By + C \tag{8}$$

Usamos ahora las condiciones de borde. Tenemos $u_x(0) = V_1$ y $u_x(h) = -V_2$ lo que nos da

$$C = V_1 \tag{9}$$

$$B = -\frac{V_1 + V_2}{h} \tag{10}$$

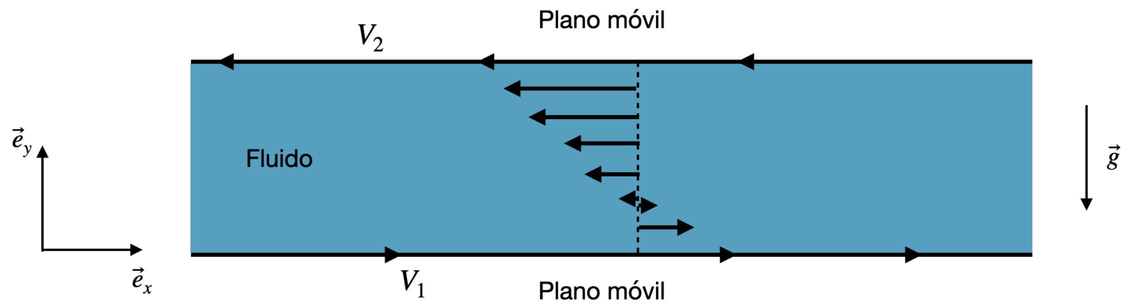
es decir

$$u_x(y) = -\frac{V_1 + V_2}{h} y + V_1 \tag{11}$$

Este flujo se anula cuando $u_x(y) = 0$ es decir para

$$y = \frac{hV_1}{V_1 + V_2} \tag{12}$$

Nota que si $V_1 = B_2$, obtenemos el resultado esperado de $y = h/2$.



2. Flujo de Taylor-Couette

Según el problema, la velocidad debe ser una función de r solamente y debe encontrarse en al dirección $\mathbf{e}_\theta$, es decir $\mathbf{u} = u(r)\mathbf{e}_\theta$. La ecuación de Navier-Stokes es

$$\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \rho\mathbf{g} - \nabla P + \mu\Delta\mathbf{u} \tag{13}$$

Podemos trabajar en coordenadas cilíndricas o en coordenadas cartesianas. En coordenadas cilindricas, tenemos

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \frac{u(r)}{r}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta} = \frac{u(r)^2}{r}\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\frac{u(r)^2}{r}\mathbf{e}_r \tag{14}$$

También tenemos

$$\Delta\mathbf{u} = \Delta\Big(u(r)\mathbf{e}_\theta\Big) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u(r)\mathbf{e}_\theta}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u(r)\mathbf{e}_\theta}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u(r)}{\partial r}\right)\mathbf{e}_\theta + \frac{u(r)}{r^2}\frac{\partial^2 \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta^2} \tag{15}$$

$$= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u(r)}{\partial r}\right) - \frac{u(r)}{r^2}\right)\mathbf{e}_\theta \tag{16}$$

La ecuación de Navier-Stokes en las direcciones r, θ y z son

$$-\frac{u(r)^2}{r} = -\frac{\partial P}{\partial r} \tag{17}$$

$$0 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u(r)}{\partial r}\right) - \frac{u(r)}{r^2} \tag{18}$$

$$0 = -\rho g - \frac{\partial P}{\partial z} \tag{19}$$

La segunda ecuación puede ser resolvido y obtenemos

$$u(r) = Ar + \frac{B}{r} \tag{20}$$

No tenemos que resolver las otras ecuaciones para obtener la presión. Las condiciones de borde son

$$v(r = R_1) = R_1\Omega_1\,, \quad v(r = R_2) = R_2\Omega_2 \tag{21}$$

lo que nos permite obtener A y B

$$AR_1 + \frac{B}{R_1} = R_1\Omega_1 \tag{22}$$

$$AR_2 + \frac{B}{R_2} = R_2\Omega_2 \tag{23}$$

es decir

$$A = \frac{R_1^2\Omega_1 - R_2^2\Omega_2}{R_1^2 - R_2^2} \tag{24}$$

$$B = \frac{R_1^2 R_2^2(\Omega_2 - \Omega_1)}{R_1^2 - R_2^2} \tag{25}$$

2. Flujo de Hagen-Poiseuille

Por simetrías del problema, tenemos $\mathbf{u} = u(r)\mathbf{e}_x$. La ecuación de Navier-Stokes en la dirección x es

$$0 = -\frac{dP}{dx} + \mu\Delta u(r) \tag{26}$$

pero

$$\Delta u(r) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u(r)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u(r)}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 u(r)}{\partial x^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u(r)}{\partial r}\right) \tag{27}$$

Por lo tanto la ecuación de Navier-Stokes se transforma en

$$\frac{\mu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u(r)}{\partial r}\right) = \frac{dP}{dx} \tag{28}$$

La parte derecha es independiente de r por lo tanto podemos integrar esta ecuación

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u(r)}{\partial r}\right) = \frac{r}{\mu}\frac{dP}{dx} \tag{29}$$

$$r\frac{\partial u(r)}{\partial r} = \frac{r^2}{2\mu}\frac{dP}{dx} + A \tag{30}$$

$$\frac{\partial u(r)}{\partial r} = \frac{r}{2\mu}\frac{dP}{dx} + \frac{A}{r} \tag{31}$$

$$u(r) = \frac{r^2}{4\mu}\frac{dP}{dx} + A\ln r + B \tag{32}$$

$$\tag{33}$$

No podemos tener una divergencia en $r = 0$ lo que implica que $A = 0$. Finalmente, $u(r = R) = 0$ lo que implica

$$u(r) = \frac{1}{4\mu}\frac{dP}{dx}\left(r^2 - R^2\right) \tag{34}$$