

El método de las imágenes

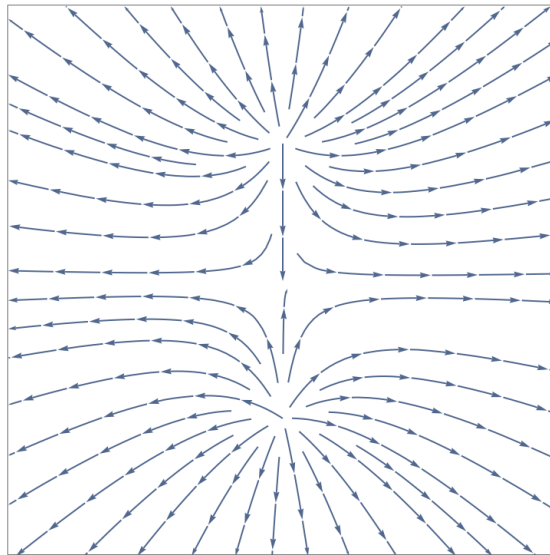
a/ Para una fuente centrada en $r = 0$ tenemos $\phi(r, \theta) = A \ln r$. Primero, será más fácil pasar en coordenadas cartesianas. En este caso, tenemos

$$\phi(x, y) = A \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) = \frac{A}{2} \ln(x^2 + y^2)$$

Una fuente localizada en $x = 0, y = a$ tendrá un potencial

$$\phi(x, y) = \frac{A}{2} \ln(x^2 + (y - a)^2)$$

Ahora, para eliminar el flujo en $y = 0$, podemos adjuntar una fuente en $y = -a$ como lo muestra la figura



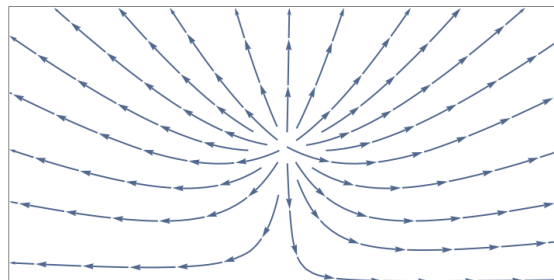
La fuente imagen anula el flujo en $y = 0$. El potencial de la fuente imagen es

$$\phi(x, y) = \frac{A}{2} \ln(x^2 + (y + a)^2)$$

Lo que nos permite obtener el potencial para nuestro sistema

$$\phi(x, y) = \frac{A}{2} \ln(x^2 + (y - a)^2) + \frac{A}{2} \ln(x^2 + (y + a)^2)$$

y dibujando el flujo solamente para $y > 0$, obtenemos



Podemos verificar que la velocidad u_y es nula en $y = 0$ es decir que no hay penetración

$$u_y(x, y) = \frac{\partial \phi}{\partial y} = A \left(\frac{y + a}{x^2 + (y + a)^2} + \frac{y - a}{x^2 + (y - a)^2} \right)$$

lo que nos da $u_y(x, 0) = 0$.

b/ De forma similar, el flujo para un vórtice centrado en $r = 0$ es $\phi(r, \theta) = A\theta$. Por lo tanto en coordenadas cartesianas, tenemos

$$\phi(x, y) = A \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Para un vórtice centrado en $y = a$, tenemos

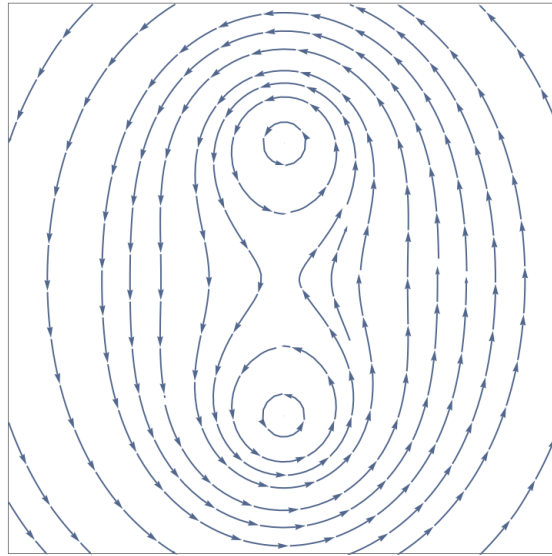
$$\phi(x, y) = A \arctan\left(\frac{y - a}{x}\right)$$

lo que nos permite su imagen en $y = -a$

$$\phi(x, y) = A \arctan\left(\frac{y + a}{x}\right)$$

Pero este vórtice tendrá la misma dirección de giro, y si sumamos ambos con el mismo parámetro A , tendremos

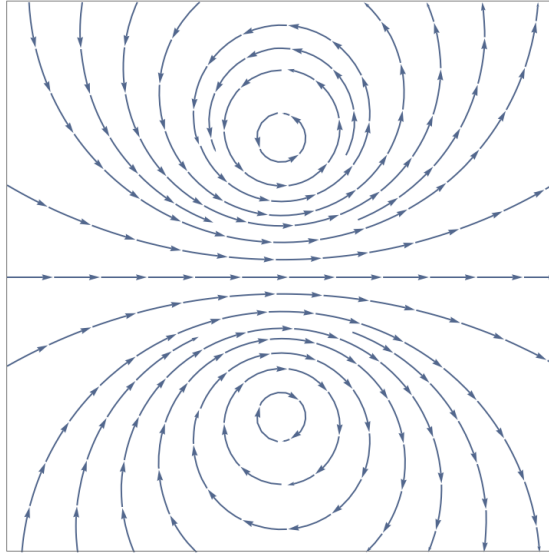
$$\phi(x, y) = A \arctan\left(\frac{y + a}{x}\right) + A \arctan\left(\frac{y - a}{x}\right)$$



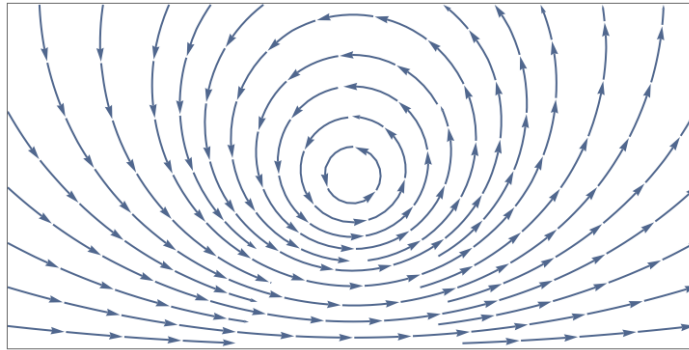
lo que claramente cruza la frontera $y = 0$. Debemos hacer que el imagen tenga un giro opuesto (como el imagen en un espejo) por lo tanto debemos hacer el cambio $A \rightarrow -A$ es decir

$$\phi(x, y) = A \arctan\left(\frac{y + a}{x}\right) - A \arctan\left(\frac{y - a}{x}\right)$$

lo que nos da



y por lo tanto si cortamos la zona $y < 0$



Podemos verificar que $u_y(x, y = 0) = 0$

$$u_y(x, y) = \frac{\partial \phi}{\partial y} = Ax \left(\frac{1}{x^2 + (y+a)^2} - \frac{1}{x^2 + (y-a)^2} \right)$$

lo que implica $u_y(x, 0) = 0$.

c/ El flujo alrededor de un disco de radio R y centrado en $r = 0$ es $\phi(r, \theta) = u_\infty \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta$. En coordenadas cartesianas, tenemos

$$\phi(x, y) = u_\infty \left(x + \frac{R^2 x}{x^2 + y^2} \right)$$

Lo que nos permite simplemente escribir el potencial ϕ para un flujo alrededor de un disco centrado en $x = 0$, $y = a$

$$\phi(x, y) = u_\infty \left(x + \frac{R^2 x}{x^2 + (y-a)^2} \right)$$

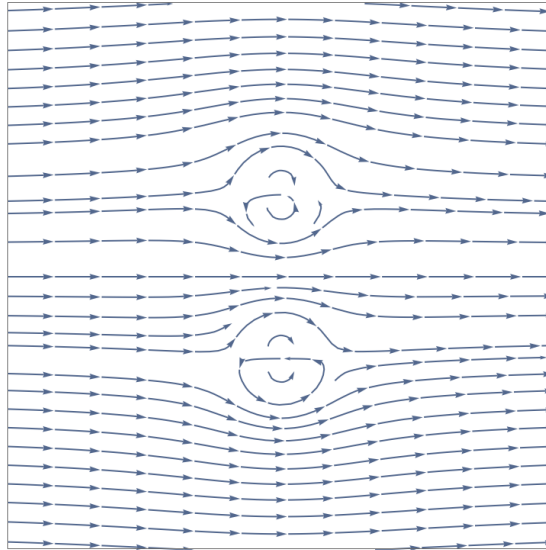
Su imagen en $y = a$, será

$$\phi(x, y) = u_\infty \left(x + \frac{R^2 x}{x^2 + (y+a)^2} \right)$$

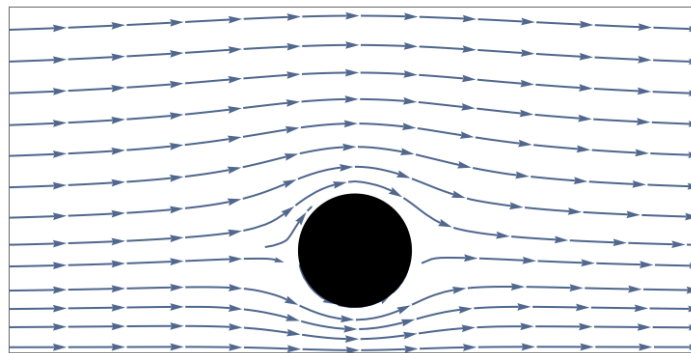
Sumando ambos, tenemos

$$\phi(x, y) = u_\infty \left(2x + \frac{R^2 x}{x^2 + (y-a)^2} + \frac{R^2 x}{x^2 + (y+a)^2} \right)$$

es decir un flujo



podemos ahora remover la zona $y < 0$ para obtener



De nuevo podemos verificar que no hay fluido pasando en $y < 0$. Por lo tanto el método de imágenes funciona bien. Desafortunadamente este método no respeta las condiciones de no penetración de fluido dentro del disco. De hecho, si calculamos la velocidad radial sobre el disco, encontraremos que no es nula. Usualmente se usa como método por fuentes puntuales y no con un volumen tal que un disco.

d/ Para un vórtice en $x = y = a$, tenemos

$$\phi(x, y) = A \arctan\left(\frac{y - a}{x - a}\right)$$

Para la pared en $y = 0$, debemos producir un imagen con A invertido en el punto $x = a$, $y = -a$ es decir

$$\phi(x, y) = -A \arctan\left(\frac{y + a}{x - a}\right)$$

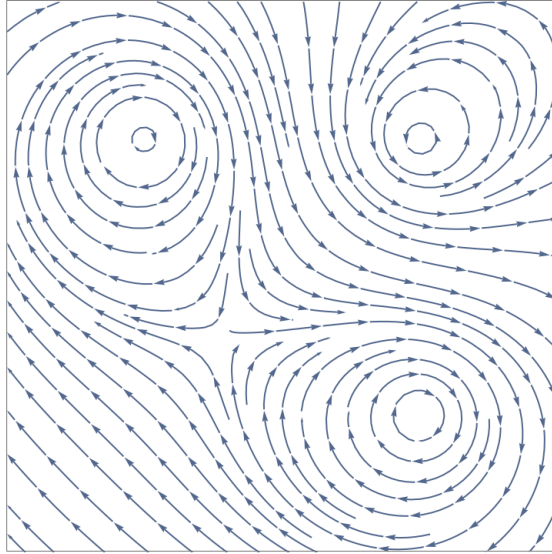
Para la pared en $x = a$, debemos producir un imagen en $x = -a$ e $y = a$ es decir

$$\phi(x, y) = -A \arctan\left(\frac{y - a}{x + a}\right)$$

Es decir un potencial de velocidad

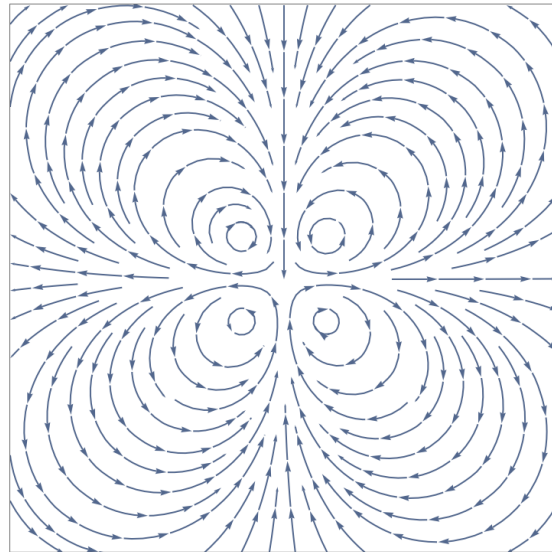
$$\phi(x, y) = A \arctan\left(\frac{y - a}{x - a}\right) - A \arctan\left(\frac{y + a}{x - a}\right) - A \arctan\left(\frac{y - a}{x + a}\right)$$

Pero no es suficiente, ya que la imagen 2 cambia el flujo y por lo tanto la condición obtenida con la imagen 1 no se cumple. De hecho, con estos 2 imágenes tendríamos



Por esa razón, necesitamos una cuarta imagen en el punto $x = -a, y = -a$ tal que

$$\phi(x, y) = A \arctan\left(\frac{y-a}{x-a}\right) - A \arctan\left(\frac{y+a}{x-a}\right) - A \arctan\left(\frac{y-a}{x+a}\right) + A \arctan\left(\frac{y+a}{x+a}\right)$$



lo que una vez cortado en la zona $y = 0$ e $x = 0$ obtenemos

