1. Fuente puntual en un flujo de punto de estancamiento

a/ El flujo de una fuente esta descrito por

$$\phi(r) = m \ln r = m \ln(x^2 + y^2)$$

con m un parámetro positivo (es negativo para un sumidero). El potencial es

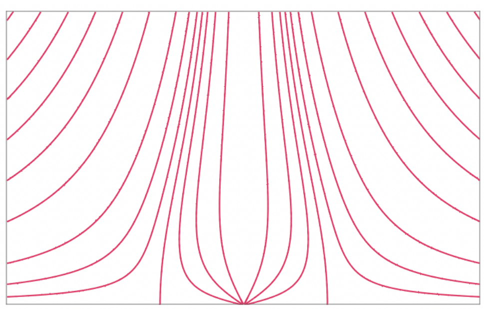
$$\phi(x, y) = a(x^2 - y^2) + m \ln(x^2 + y^2)$$

b/ La velocidad es

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = 2ax + \frac{2mx}{x^2 + y^2}$$
$$v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -2ay + \frac{2my}{x^2 + y^2}$$

c/ El punto de stagnación se encuentra en $x = 0$ por simetría. Pidiendo que la velocidad sea nula, encontramos de $v_y = 0$ con $x = 0$ que $y = \sqrt{m/a}$

d/ En el caso de tener un sumidero, el punto de stagnación se encuentra como antes en $u_x = u_y = 0$. No podemos tener $x = 0$, ya que tendríamos $y = \sqrt{m/a}$ que es complejo ($m < 0$). Por lo tanto, considerando primero $v_y = 0$, obtenemos $y = 0$ que nos permite obtener de $u_x = 0$ que $x = \pm\sqrt{-m/a}$



2. Fuente puntual sobre un muro impermeable

a/ En 3 dimensiones, una fuente localizada en $r = 0$ tiene como potencial $\phi = -m/r$ con m una constante positiva para que sea una fuente. En coordenadas cartesianas, tendríamos

$$\phi = -\frac{m}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \tag{1}$$

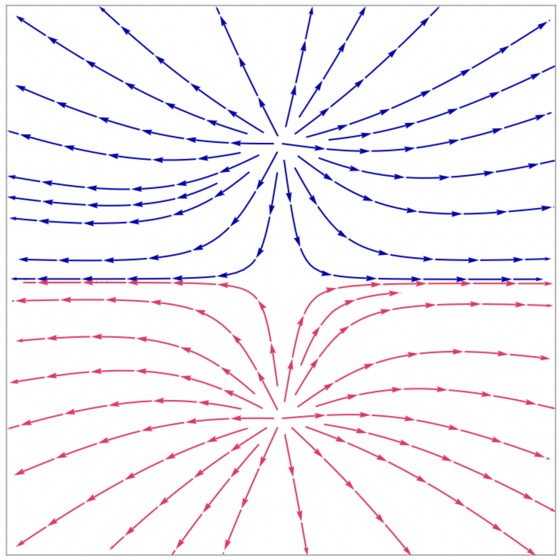
Si la fuente se encuentra en el punto de coordenadas $x = y = 0$, $z = a$, el potencial es

$$\phi = -\frac{m}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}} \tag{2}$$

lo que podemos escribir en coordenadas cilíndricas

$$\phi = -\frac{m}{\sqrt{r^2 + (z-a)^2}} \tag{3}$$

Desafortunadamente, este potencial no produce una velocidad que tiene la pared como región impenetrable. Por lo tanto, podemos imaginar una fuente similar en la posición $x = y = 0$, $z = -a$ tal que los 2 fuentes se anulan en la región $z = 0$



Por lo tanto, nuestro potencial es

$$\phi(r, z) = -\frac{m}{\sqrt{r^2 + (z-a)^2}} - \frac{m}{\sqrt{r^2 + (z+a)^2}}$$

se llama el método de imágenes.

b/ No hemos tomado en cuenta la gravedad, por lo tanto la ecuación de Bernoulli es

$$P + \frac{1}{2}\rho \mathbf{u}^2 = \text{ constante}$$

La velocidad es

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{mr}{(r^2 + (z-a)^2)^{3/2}} + \frac{mr}{(r^2 + (a+z)^2)^{3/2}} \\ u_z &= \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{m(z-a)}{(r^2 + (z-a)^2)^{3/2}} + \frac{m(z+a)}{(r^2 + (a+z)^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

De lo cual obtenemos

$$\begin{aligned} u_r(r, z=0) &= \frac{mr}{(r^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{mr}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \\ u_z(r, z=0) &= \frac{-ma}{(r^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{ma}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

lo que nos da

$$\mathbf{u}(r, z=0)^2 = \frac{4m^2 r^2}{(r^2 + a^2)^3}$$

lo que implica

$$P(r, z = 0) + \frac{2\rho m^2 r^2}{(r^2 + a^2)^3} = P_0$$

es decir

$$P(r, z = 0) = P_0 - \frac{2\rho m^2 r^2}{(r^2 + a^2)^3}$$