1. Flujo rectilíneo

Dado que el flujo es irrotacional, el potencial de velocidad $\phi(x, y)$ debe satisfacer la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2\phi = 0 \quad \text{o} \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0.$$

Para resolver esta ecuación diferencial parcial (EDP), normalmente utilizamos la separación de variables, asumiendo que la solución se puede escribir como el producto de dos funciones: una que depende solo de x y otra que depende solo de y. Es decir, asumimos:

$$\phi(x, y) = X(x)Y(y)$$

Sustituyendo la forma de $\phi(x, y) = X(x)Y(y)$ en la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

Dividimos ambos lados por $X(x)Y(y)$ para separar las variables:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$$

donde λ es una constante (puede ser positiva, negativa o cero dependiendo del problema).
Para la parte dependiente de x, la ecuación es

$$X''(x) = \lambda X(x)$$

que tiene la solución general

$$X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$$

Para la parte dependiente de y

$$Y''(y) = -\lambda Y(y)$$

que tiene la solución general

$$Y(y) = Ce^{i\sqrt{\lambda}y} + De^{-i\sqrt{\lambda}y}$$

Entonces la solución es

$$\phi(x, y) = \left(Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}\right)\left(Ce^{i\sqrt{\lambda}y} + De^{-i\sqrt{\lambda}y}\right)$$

Por lo tanto, podemos obtener la velocidad del fluido e imponer las condiciones de frontera

$$v_x(x, y) = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \sqrt{\lambda}\left(Ae^{\sqrt{\lambda}x} - Be^{-\sqrt{\lambda}x}\right)\left(Ce^{i\sqrt{\lambda}y} + De^{-i\sqrt{\lambda}y}\right)$$
$$v_y(x, y) = \frac{\partial\phi}{\partial y} = i\sqrt{\lambda}\left(Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}\right)\left(Ce^{i\sqrt{\lambda}y} - De^{-i\sqrt{\lambda}y}\right)$$

Necesitamos imponer que $v_x(x, y = 0) = v_0$

$$v_x(x, 0) = \sqrt{\lambda}\left(Ae^{\sqrt{\lambda}x} - Be^{-\sqrt{\lambda}x}\right)\left(C + D\right) = v_0$$

Vemos que es imposible, por lo que debemos volver a nuestras ecuaciones y elegir la otra opción

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda = 0$$

lo que da

$$\begin{aligned} X(x) &= Ax + B \\ Y(y) &= Cy + D \end{aligned}$$

lo que implica que $\phi(x, y) = (Ax + B)(Cy + D)$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} v_x(x, y) &= A(Cy + D) \\ v_y(x, y) &= (Ax + B)C \end{aligned}$$

La condición ahora es

$$v_x(x, 0) = AD = v_0$$

Además, debemos imponer que el fluido permanezca en la región $0 < y < h$, lo que significa que $v_y(x, 0) = v_y(x, h) = 0$, lo que implica $C = 0$, por lo que tenemos

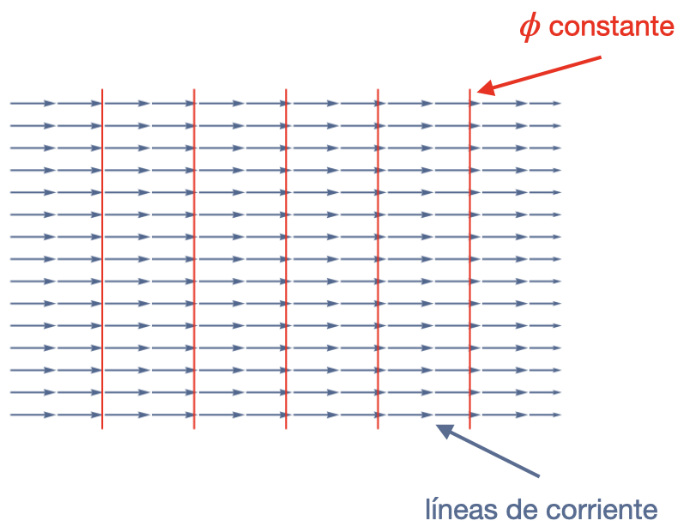
$$\phi(x, y) = (Ax + B)D = v_0 x + BD$$

La constante no es importante para la función potencial y por lo tanto

$$\phi(x, y) = v_0 x$$

lo que implica

$$\begin{aligned} v_x(x, y) &= v_0 \\ v_y(x, y) &= 0 \end{aligned}$$



2. Fuente o sumidero lineal

El laplaciano en coordenadas polares es

$$\Delta\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}$$

Como el problema depende solamente de r, tenemos la ecuación

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) = 0$$

es decir

$$r\frac{\partial \phi}{\partial r} = A\,, \quad \text{con } A \text{ una constante}$$

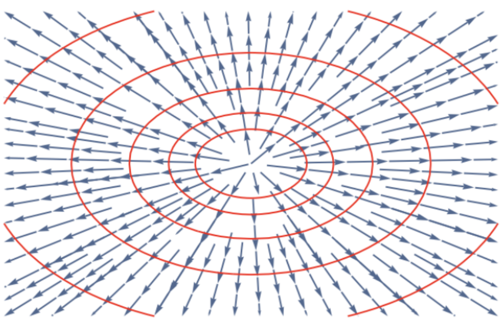
lo que implica

$$\phi(r) = A \ln r$$

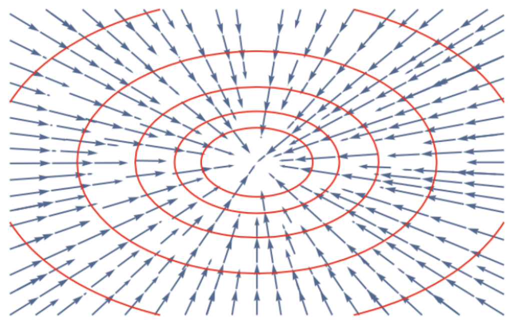
de lo cual podemos obtener la velocidad

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{A}{r} \\ v_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0 \end{aligned}$$

Si A es positivo, tenemos una fuente aunque si A es negativo tenemos un sumidero.



$A > 0$



$A < 0$

3. Vórtice

Como el problema depende solamente de θ, tenemos la ecuación

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0$$

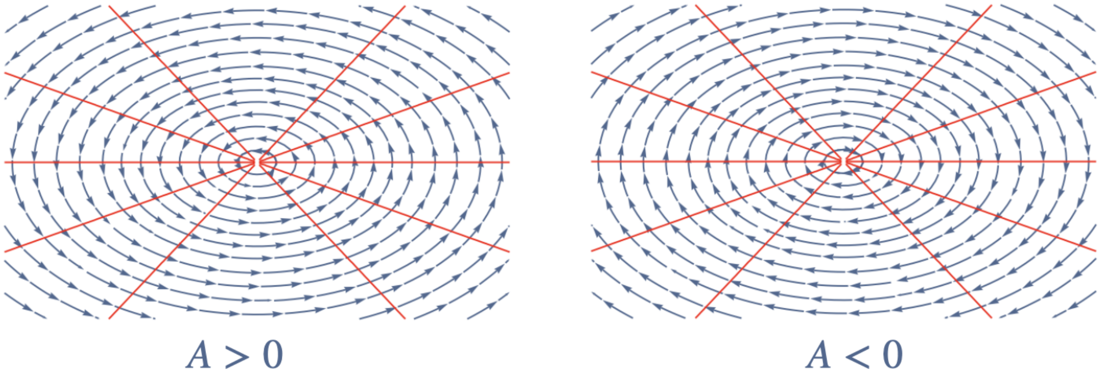
es decir

$$\phi(\theta) = A\theta$$

de lo cual podemos obtener la velocidad

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \\ v_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{A}{r} \end{aligned}$$

Tenemos un vórtice cuyo dirección de rotación depende del signo de A.



4. Flujo rectilíneo con fuente

Como lo hemos visto previamente, para un flujo rectilíneo

$$\phi_1(x, y) = Ax$$

aunque para una fuente, tenemos

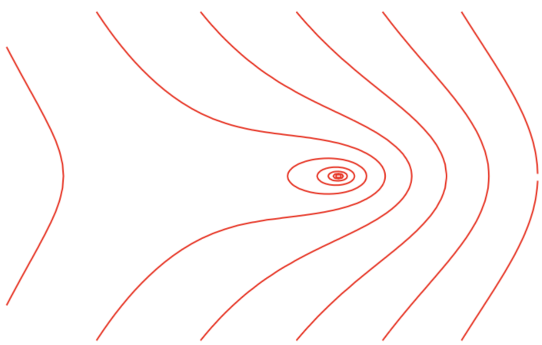
$$\phi_2(x, y) = B \ln r = \frac{B}{2} \ln(x^2 + y^2)$$

Como la ecuación de Laplace es lineal, podemos sumar los 2 potenciales

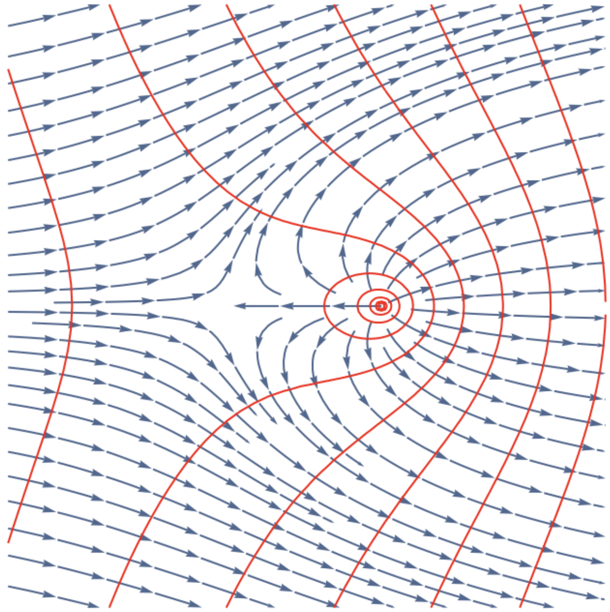
$$\phi(x, y) = Ax + \frac{B}{2} \ln(x^2 + y^2)$$

Las líneas ϕ constante ($= C$) son de la forma

$$y = \pm\sqrt{e^{\frac{2}{B}(C-Ax)} - x^2}$$



De lo cual podemos deducir las lineas de corriente



Observamos claramente la suma de los 2 flujos. Aún más interesante, si excluimos una sección del dibujo, corresponde al flujo alrededor de un cuerpo solido.