1. Atmósfera en reposo

La ecuación hidrostática nos dice que

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$

pero $P = A\rho^2$ es decir $\rho = \sqrt{P/A}$, lo que implica

$$P'(z) = -\sqrt{P}\frac{g}{\sqrt{A}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dP}{\sqrt{P}} = -\frac{g}{\sqrt{A}}dz$$

Integrando esta expresión, obtenemos

$$2\sqrt{P} = -\frac{g}{\sqrt{A}}z + B$$

donde B es una constante de integración. Obtenemos finalmente

$$P(z) = \left(\frac{B}{2} - \frac{g}{2\sqrt{A}}z\right)^2 = \frac{B^2}{4}\left(1 - \frac{g}{B\sqrt{A}}z\right)^2$$

Podemos usar nuestras condiciones, para definir las 2 constantes. En $z = 0$, tenemos $P(z = 0) = P_0$, lo que implica $B = 2\sqrt{P_0}$, además $A = P/\rho^2 = P_0/\rho_0^2$ lo que nos permite escribir

$$P(z) = P_0\left(1 - \frac{\rho_0 g}{2P_0}z\right)^2$$

Obtenemos $P(z = h) = 0.24$ bar, donde hemos usado que $g \simeq 9.81$ m/s^2.
Para obtener la temperatura, se menciona que el gas es ideal, es decir que tenemos

$$PV = nRT \quad \Leftrightarrow \quad PV = \frac{m}{M}RT \quad \Leftrightarrow \quad PM = \rho RT \quad \Leftrightarrow \quad T = \frac{PM}{\rho R} = \frac{\sqrt{P(z)P_0}M}{\rho_0 R}$$

con M la masa molar y m la masa del gas. Para el aire $M = 0.029$ kg/mol y $R = 8.314$ J/mol/K. Lo que nos da

$$T(z = h) = 164 \text{ K} = -109^\circ \text{ C}$$

2. Globo en equilibrio

A partir de la ecuación de Newton en el caso estático, tenemos

$$m_{\text{aire}}g - m_{\text{globo}}g - m_{\text{hidrógeno}}g = 0$$

es decir

$$m_{\text{globo}} = m_{\text{aire}} - m_{\text{hidrógeno}}$$

El globo tiene una radio de 6m y por lo tanto un volumen de $V = 904.78$ m^3. Para calcular la flotabilidad por el principio de Arquimedes, debemos calcular la densidad de aire desplazado por el globo. Sabiendo que la presión es $P = 710\text{mmHg} = 710 \times 133.322$ Pa ≈ 94658.6 Pa y usando la ley de los gases ideales, encontramos

$$\rho_{\text{aire}} = \frac{94658.6 \times 0.029}{8.314 \times 293.15} \approx 1.126 \text{ kg/m}^3$$

es decir

$$m_{\text{aire}} = 1019 \text{ kg}$$

La densidad del hidrógeno también puede calcularse utilizando la ley de los gases ideales, con la masa molar $M_{\text{H}} = 0.002$ kg/mol :

$$\rho_{\text{H}} = \frac{94658.6 \times 0.002}{8.314 \times 293.15} \approx 0.078 \text{ kg/m}^3$$

es decir una masa de $m_H = 70$ kg, lo que implica una masa del globo de

$$m_{\text{globo}} = 949 \text{ kg}$$

3. Forma de la superficie de un líquido en rotación

Escribiendo la ecuación en las direcciones $\mathbf{z}$ y $\mathbf{e}_r$, obtenemos

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho\omega^2 r$$
$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$$

Integrando la primera ecuación, obtenemos

$$P(r,z) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 + A(z)$$

con $A(z)$ la "constante" de integración. Usando la segunda ecuación, obtenemos

$$A'(z) = -\rho g$$

es decir $A(z) = -\rho g z + B$ con B la constante de integración. Finalmente tenemos

$$P(r,z) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho g z + B$$

Obviamente, tenemos $B = P(0,0)$ lo que podemos tomar como la presión atmosférica P_0 es decir

$$P(r,z) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho g z + P_0$$

Finalmente, la presión en el aire puede ser considerada como P_0 sobre toda la superficie del agua aunque alguna superficie se encuentra a una cierta altura. Lo que permite encontrar la ecuación de la superficie como el lugar donde las 2 presiones se cancelan, $P(r,z) = P_0$, es decir $\frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho g z$ o

$$z = \frac{\rho\omega^2}{2g} r^2$$