1. Gradiente, divergencia, rotacional

1. El gradiente de $\phi(x,y,z) = x^2y + yz^3$ es:

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{e}_z = 2xy\mathbf{e}_x + (x^2+z^3)\mathbf{e}_y + 3yz^2\mathbf{e}_z$$

2. La divergencia de $\mathbf{F}(x,y,z) = x^2\mathbf{e}_x + y^2\mathbf{e}_y + z^2\mathbf{e}_z$ es:

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 2x + 2y + 2z$$

3. El rotacional de $\mathbf{G}(x,y,z) = yz\mathbf{e}_x + zx\mathbf{e}_y + xy\mathbf{e}_z$ es:

$$\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{G} &= \left(\frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z}\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial G_x}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial x}\right)\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z \\ &= (x-x)\mathbf{e}_x + (y-y)\mathbf{e}_y + (z-z)\mathbf{e}_z = \mathbf{0}\end{aligned}$$

4. La divergencia de $\mathbf{F}(r,\theta,z) = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z$ en coordenadas cilíndricas es:

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rF_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2) + 0 + \frac{\partial z}{\partial z} = 2 + 1 = 3$$

5. El gradiente de $\phi(r,\theta,\phi) = r^2\sin(\theta)\cos(\phi)$ en coordenadas esféricas es:

$$\begin{aligned}\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\phi}\mathbf{e}_\phi &= 2r\sin(\theta)\cos(\phi)\mathbf{e}_r + r\cos(\theta)\cos(\phi)\mathbf{e}_\theta - \frac{r\sin(\theta)\sin(\phi)}{\sin(\theta)}\mathbf{e}_\phi \\ &= 2r\sin(\theta)\cos(\phi)\mathbf{e}_r + r\cos(\theta)\cos(\phi)\mathbf{e}_\theta - r\sin(\phi)\mathbf{e}_\phi\end{aligned}$$

2. Flujo de fluido

Un flujo de fluido está descrito por el campo vectorial $\mathbf{u}(x,y,z) = -y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$.

1. La divergencia $\nabla\cdot\mathbf{u}$ es:

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 + 0 + 1 = 1$$

Como la divergencia no es cero, el flujo es compresible.

2. El rotacional $\nabla\times\mathbf{u}$ es:

$$\nabla\times\mathbf{u} = \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z = (0-0)\mathbf{e}_x + (0-0)\mathbf{e}_y + (1+1)\mathbf{e}_z = 2\mathbf{e}_z$$

Como el rotacional no es cero, el flujo tiene vorticidad.

3. Líneas de corriente

Considera un campo de velocidad bidimensional en un flujo estacionario dado por

$$\mathbf{u}(x,y) = (y,-x)$$

1. La ecuación de las líneas de corriente se obtiene resolviendo:

$$\frac{dx}{ds} = y \,, \qquad \frac{dy}{ds} = -x$$

o de forma equivalente

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}$$

lo que podemos escribir

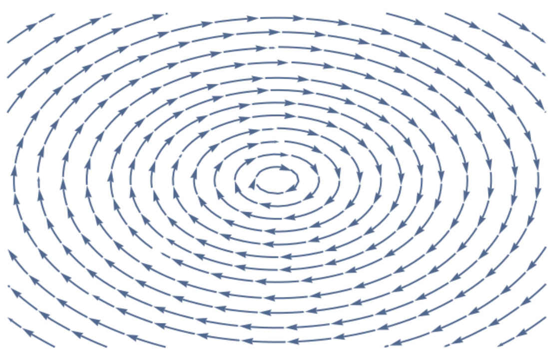
$$xdx + ydy = 0$$

Integrando, se tiene:

$$y^2 + x^2 = C$$

donde C es una constante de integración. Por lo tanto, las líneas de corriente son círculos centrados en el origen.

2.



4. Trayectorias de partículas

En el mismo campo de velocidad $\mathbf{u}(x, y) = (y, -x)$:

1. La trayectoria de una partícula que comienza en el punto $(1, 0)$ en $t = 0$ se encuentra resolviendo:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x$$

Diferenciando una de las ecuaciones con respecto al tiempo y sustituyendo en la otra, se obtiene:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$$

que tiene la solución:

$$x(t) = Ae^{it} + Be^{-it}$$

de lo cual obtenemos

$$y(t) = \frac{dx}{dt} = iAe^{it} - iBe^{-it}$$

usando las condiciones en $t = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} x(0) &= A + B = 1 \\ y(0) &= iA - iB = 0 \end{aligned}$$

lo que implica $A = B = 1/2$, es decir

$$x(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \cos t$$
$$y(t) = \frac{ie^{it} - ie^{-it}}{2} = -\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = -\sin t$$

Por lo tanto, la trayectoria es un círculo de radio 1 centrado en el origen.

2. La trayectoria obtenida coincide con las líneas de corriente, ya que ambas son círculos centrados en el origen. En un flujo estacionario, las trayectorias de las partículas coinciden con las líneas de corriente.

5. Diferencia entre líneas de corriente y trayectorias

Considera un flujo no estacionario dado por el campo de velocidad:

$$\mathbf{u}(x, t) = (1, t)$$

1. Las líneas de corriente en un instante fijo t_0 se obtienen resolviendo:

$$\frac{dy}{u_y} = \frac{dx}{u_x} \implies \frac{dy}{t_0} = \frac{dx}{1}$$

Integrando, se tiene:

$$y = t_0 x + C$$

donde C es una constante de integración. Las líneas de corriente son líneas rectas con pendiente t_0.

2. La trayectoria de una partícula que parte del punto (x_0, y_0) en $t = 0$ se obtiene resolviendo:

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = t$$

Integrando estas ecuaciones:

$$x(t) = t + x_0$$
$$y(t) = \frac{1}{2}t^2 + y_0$$

Por lo tanto, la trayectoria de la partícula es una parábola en función del tiempo.

3. En este caso, las trayectorias de las partículas no coinciden con las líneas de corriente. Las líneas de corriente son rectas, mientras que las trayectorias de las partículas son parábolas. Esto se debe a que el flujo no es estacionario, y la dirección del campo de velocidad cambia con el tiempo.