1. Permutation gate

Verificamos el caso siguiente

$$|01101\rangle \to |01111\rangle \to |01110\rangle \to |01010\rangle \to |01010\rangle \to |01010\rangle \to |01011\rangle \to |01011\rangle \to |11011\rangle \to |11001\rangle$$

Funciona...

2. CH gate

Debemos considerar todos los casos, es decir la transformación de $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ y $|11\rangle$. Obtenemos la tabla siguiente

$$\begin{aligned}
|00\rangle &\to |00\rangle \\
|01\rangle &\to |01\rangle \\
|10\rangle &\to |1+\rangle = \frac{|10\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \\
|11\rangle &\to |1-\rangle = \frac{|10\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

De lo cual obtenemos la matriz que representa la puerta

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Claramente

$$\begin{aligned}
M|00\rangle &= |00\rangle \\
M|01\rangle &= |01\rangle \\
M|10\rangle &= \frac{|10\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \\
M|11\rangle &= \frac{|10\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

3. Double-controlled NOT: DCNOT

La tabla es

$$\begin{aligned}
|00\rangle &\to |00\rangle \\
|01\rangle &\to |11\rangle \\
|10\rangle &\to |01\rangle \\
|11\rangle &\to |10\rangle
\end{aligned}$$

De lo cual obtenemos la matriz que representa la puerta

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La otra forma es de considerar que son puertas y que el circuito puede ser representado como el producto tensorial de las matrices que representan cada puerta.
La primera puerta tiene la tabla

$$\begin{aligned} |00\rangle &\to |00\rangle \\ |01\rangle &\to |01\rangle \\ |10\rangle &\to |11\rangle \\ |11\rangle &\to |10\rangle \end{aligned}$$

y por lo tanto la matriz

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La segunda puerta tiene la tabla

$$\begin{aligned} |00\rangle &\to |00\rangle \\ |01\rangle &\to |11\rangle \\ |10\rangle &\to |10\rangle \\ |11\rangle &\to |01\rangle \end{aligned}$$

y por lo tanto tiene la matriz

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De lo cual deducimos que $M = M_2 M_1$, es decir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. La puerta de Peres

La tabla es

$$\begin{aligned} |000\rangle &\to |000\rangle \\ |001\rangle &\to |001\rangle \\ |010\rangle &\to |010\rangle \\ |011\rangle &\to |011\rangle \\ |100\rangle &\to |110\rangle \end{aligned}$$

$$|101\rangle \rightarrow |111\rangle$$
$$|110\rangle \rightarrow |101\rangle$$
$$|111\rangle \rightarrow |100\rangle$$

De la cual podemos deducir la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Peres full-adder gate: PFAG

Para el caso de estudio, tenemos

$$|0101\rangle \rightarrow |0101\rangle \rightarrow |0101\rangle \rightarrow |0110\rangle \rightarrow |0111\rangle \rightarrow |0101\rangle$$

El qubit de la tercera salida es la suma, 0, el cuarto es el acarreo 1, la segunda salida es la suma parcial $A + B$ y la primera salida es A sin modificaciones.