1. La puerta T

En la base estándar, tenemos

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Buscamos una matriz

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tal que $\mathbf{T}|0\rangle = |0\rangle$ y $\mathbf{T}|1\rangle = e^{i\pi/4}|1\rangle$, es decir

$$\mathbf{T}|0\rangle = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lo que implica $a = 1$ y $c = 0$.

$$\mathbf{T}|1\rangle = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = e^{i\pi/4}|1\rangle = e^{i\pi/4}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

lo que implica $b = 0$ y $d = e^{i\pi/4}$. Lo que implica

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix}$$

Podemos deducir

$$\mathbf{T}^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/4} \end{pmatrix}$$

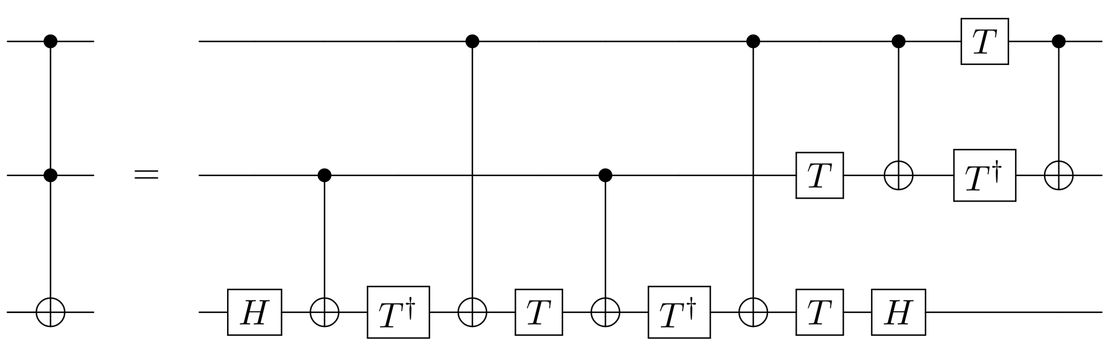
Verificamos

$$\mathbf{T}\mathbf{T}^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{T}^\dagger\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. La puerta de Toffoli



Tenemos

$$
\begin{aligned}
|000\rangle &\to |00+\rangle = \frac{|000\rangle + |001\rangle}{\sqrt{2}} \to \frac{|000\rangle + |001\rangle}{\sqrt{2}} \to \frac{|000\rangle + e^{-i\pi/4}|001\rangle}{\sqrt{2}} \to \frac{|000\rangle + e^{-i\pi/4}|001\rangle}{\sqrt{2}} \\
&\to \frac{|000\rangle + |001\rangle}{\sqrt{2}} \to \frac{|000\rangle + |001\rangle}{\sqrt{2}} \to \frac{|000\rangle + e^{-i\pi/4}|001\rangle}{\sqrt{2}} \to \frac{|000\rangle + e^{-i\pi/4}|001\rangle}{\sqrt{2}} \to \frac{|000\rangle + |001\rangle}{\sqrt{2}} \\
&\to \frac{|00+\rangle + |00-\rangle}{\sqrt{2}} = |000\rangle \to |000\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&|110\rangle \to |11+\rangle \to \frac{|110\rangle + |111\rangle}{\sqrt{2}} \to \frac{|111\rangle + |110\rangle}{\sqrt{2}} \to \frac{e^{-i\pi/4}|111\rangle + |110\rangle}{\sqrt{2}} \to \frac{e^{-i\pi/4}|110\rangle + |111\rangle}{\sqrt{2}} \\
&\to \frac{e^{-i\pi/4}|110\rangle + e^{i\pi/4}|111\rangle}{\sqrt{2}} \to \frac{e^{-i\pi/4}|111\rangle + e^{i\pi/4}|110\rangle}{\sqrt{2}} \to \frac{e^{-i\pi/2}|111\rangle + e^{i\pi/4}|110\rangle}{\sqrt{2}} \to \frac{e^{-i\pi/2}|110\rangle + e^{i\pi/4}|111\rangle}{\sqrt{2}} \\
&\to \frac{e^{-i\pi/4}|110\rangle + e^{3i\pi/4}|111\rangle}{\sqrt{2}} \to \frac{e^{-i\pi/4}|100\rangle + e^{3i\pi/4}|101\rangle}{\sqrt{2}} \to \frac{e^{-i\pi/4}|10+\rangle + e^{3i\pi/4}|10-\rangle}{\sqrt{2}} \\
&\to \frac{|10+\rangle + e^{i\pi}|10-\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|10+\rangle - |10-\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|100\rangle + |101\rangle - |100\rangle + |101\rangle}{2} = |101\rangle \to |111\rangle
\end{aligned}
$$

3. La puerta Z controlada

De forma similar a la puerta CNOT, tenemos una acción sobre el segundo qubit si el primer qubit es $|1\rangle$. Además de que sabemos que la acción de la puerta Z es $Z|0\rangle = |0\rangle$ y $Z|1\rangle = -|1\rangle$. Por lo tanto, tenemos la table de transformaciones siguiente

$$
\begin{aligned}
|00\rangle &\to |00\rangle \\
|01\rangle &\to |01\rangle \\
|10\rangle &\to |10\rangle \\
|11\rangle &\to -|11\rangle
\end{aligned}
$$

Por lo tanto la matriz es

$$
\mathbf{CZ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
$$

3. La puerta SWAP

En la base estándar, tenemos

$$
|00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |01\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |11\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

De lo cual podemos deducir la matriz

$$
\mathbf{SWAP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

4. El circuito H-SWAP

La table de transformaciones es

$$
\begin{aligned}
|00\rangle \to |0+\rangle &= \frac{|00\rangle + |01\rangle}{\sqrt{2}} \to \frac{|00\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}} \\
|01\rangle \to |0-\rangle &= \frac{|00\rangle - |01\rangle}{\sqrt{2}} \to \frac{|00\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} \\
|10\rangle \to |1+\rangle &= \frac{|10\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \to \frac{|01\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \\
|11\rangle \to |1-\rangle &= \frac{|10\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}} \to \frac{|01\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

De la cual podemos deducir la matriz de transformaciones. La otra forma de obtener la matriz es de hacer el producto

$$\mathbf{SWAP} \cdot \mathbf{H}$$

La matriz $\mathbf{H}$ sobre un qubit es

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Sobre los 2 qubits tendremos, ninguna transformación sobre el primero y H sobre el segundo

$$\mathbb{1} \otimes \mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot \mathbf{H} & 0 \cdot \mathbf{H} \\ 0 \cdot \mathbf{H} & 1 \cdot \mathbf{H} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Lo que nos permite obtener

$$\mathbf{SWAP} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$