1. Verifique que $|w\rangle \equiv \binom{1}{1}$ y $|v\rangle \equiv \binom{1}{-1}$ son ortogonales. ¿Cuáles son las formas normalizadas de estos vectores?

2. Exprese $|1\rangle$ en la base de Hadamard. Es decir, encuentre los coeficientes α y β tales que $|1\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle$.

3. Hay una notación útil $|\psi\rangle^{\otimes k}$, para $|\psi\rangle$ tensado consigo mismo k veces. Por ejemplo, $|\psi\rangle^{\otimes 2} = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$. Sea

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

Escriba $|\psi\rangle^{\otimes 2}$ y $|\psi\rangle^{\otimes 3}$ explícitamente, tanto en términos de productos tensoriales como $|0\rangle|1\rangle$, como en notación de vectores columna.

4. Considere el estado $|\Psi\rangle = |0\rangle$. ¿Cuáles son las probabilidades p_0, p_1 para medir $|\Psi\rangle$ en la base estándar? ¿Cuáles son las probabilidades $p_+,\ p_-$ para medir $|\Psi\rangle$ en la base de Hadamard?

5. Verifique que

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$$

es un estado válido de qubit.

6. Imagine una forma de representar este qubit como un vector en 3 dimensiones.
7. Demuestre que las matrices de Pauli son hermíticas ($U^\dagger = U$) y unitarias ($UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{1}$)

8. Considere los siguientes estados $|0\rangle$ y $|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$. Calcule $|0\rangle\langle 0|$, $\langle 0|0\rangle$, $|+\rangle\langle +|$, $\langle +|+\rangle$

9. Consideremos la matriz general

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son números complejos. Demuestre que para que U sea unitaria

$$|\alpha|^2 + |\gamma|^2 = |\beta|^2 + |\delta|^2 = 1 \quad \alpha\beta^* + \gamma\delta^* = \alpha\gamma^* + \beta\delta^* = 0$$