1. Para que sean ortogonales, debemos verificar que el producto escalar entre los 2 vectores es nulo es decir que $\langle v|w\rangle = 0$ o de forma equivalente $\langle w|v\rangle = 0$

$$\langle v| = (1 \ \ -1)$$

lo que implica

$$\langle v|w\rangle = (1 \ \ -1)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 1 - 1 = 0$$

Para calcular las formas normalizadas, debemos calcular la norma de cada vector

$$\langle v|v\rangle = 1 + 1 = 2$$
$$\langle w|w\rangle = 1 + 1 = 2$$

lo que nos da los vectores normalizados $|v\rangle/\sqrt{2}$ y $|w\rangle/\sqrt{2}$

2. Lo podemos hacer de forma formal o por la forma de vectores columnas

$$|1\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|+\rangle - |-\rangle\Big)$$

Sabemos que

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle + |1\rangle\Big)$$
$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle - |1\rangle\Big)$$

Lo que permite obtener, por inversión

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|+\rangle + |-\rangle\Big)$$
$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|+\rangle - |-\rangle\Big)$$

3. Tenemos

$$|\psi\rangle^{\otimes 2} = |\psi\rangle|\psi\rangle = \frac{1}{2}\Big(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle\Big)$$

y

$$\begin{aligned}|\psi\rangle^{\otimes 3} = |\psi\rangle|\psi\rangle|\psi\rangle &= \frac{1}{2^{3/2}}\Big(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle\Big)|\psi\rangle \\ &= \frac{1}{2^{3/2}}\Big(|000\rangle + |010\rangle + |100\rangle + |110\rangle + |001\rangle + |011\rangle + |101\rangle + |111\rangle\Big)\end{aligned}$$

De forma vectorial, tenemos

$$|\psi\rangle^{\otimes 2} = |\psi\rangle|\psi\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

y

$$|\psi\rangle^{\otimes 3} = |\psi\rangle^{\otimes 2}|\psi\rangle = \frac{1}{2^{3/2}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2^{3/2}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

4. Las probabilidades son

$$\begin{aligned}p_0 &= |\langle 0|\Psi\rangle|^2 = |\langle 0|0\rangle|^2 = 1\\ p_1 &= |\langle 1|\Psi\rangle|^2 = |\langle 1|0\rangle|^2 = 0\end{aligned}$$

aunque en la base de Hadamard, tenemos

$$\begin{aligned}p_+ &= |\langle +|\Psi\rangle|^2 = |\langle +|0\rangle|^2 = \frac{1}{2}|(\langle 0| + \langle 1|)|0\rangle|^2 = \frac{1}{2}|\langle 0|0\rangle|^2 = \frac{1}{2}\\ p_- &= |\langle -|\Psi\rangle|^2 = |\langle -|0\rangle|^2 = \frac{1}{2}|(\langle 0| - \langle 1|)|0\rangle|^2 = \frac{1}{2}|\langle 0|0\rangle|^2 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

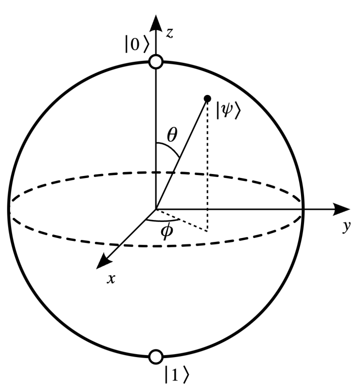
5. Para que sea un estado válido, debemos verificar que el estado es normalizado, es decir que $\langle\psi|\psi\rangle = 1$. Tenemos

$$\langle\psi| = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\langle 0| + e^{-i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\langle 1|$$

lo que implica

$$\begin{aligned}\langle\psi|\psi\rangle &= \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\langle 0| + e^{-i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\langle 1|\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle\right)\\ &= \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\langle 0|0\rangle + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\langle 1|1\rangle = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1\end{aligned}$$

6. Este qubit está definido por 2 ángulos. Por lo tanto, puede describirse mediante un vector en 3 dimensiones $\vec{r} = (\cos\phi\sin\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\theta)$. Esto se llama la representación de la esfera de Bloch.



7. Las matrices de Pauli son

$$X = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

Tenemos

$$X^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = X\,, \quad Y^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = Y\,, \quad Z^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = Z$$

Es decir que son hermíticas. También tenemos

$$\begin{aligned}
X^\dagger X = XX^\dagger = X^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
Y^\dagger Y = YY^\dagger = Y^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
Z^\dagger Z = ZZ^\dagger = Z^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

8. Tenemos

$$\begin{aligned}
|0\rangle\langle 0| &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
|+\rangle\langle +| &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

aunque

$$\begin{aligned}
\langle 0|0\rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \\
\langle +|+\rangle &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1
\end{aligned}$$

Por lo tanto, hay que tener cuidado con la notación, $|\psi\rangle\langle\psi|$ es una matriz aunque $\langle\psi|\psi\rangle$ es un numero.

9. Tenemos

$$U^\dagger = \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \\ \gamma^* & \delta^* \end{pmatrix}$$

lo que nos da

$$U^\dagger U = \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \\ \gamma^* & \delta^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\beta|^2 & \alpha^*\gamma + \beta^*\delta \\ \alpha\gamma^* + \beta\delta^* & |\gamma|^2 + |\delta|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si

$$\begin{aligned}
|\alpha|^2 + |\beta|^2 &= 1 \\
|\gamma|^2 + |\delta|^2 &= 1 \\
\alpha\gamma^* + \beta\delta^* &= 0
\end{aligned}$$

y

$$UU^\dagger = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \\ \gamma^* & \delta^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\gamma|^2 & \alpha\beta^* + \gamma\delta^* \\ \beta\alpha^* + \delta\gamma^* & |\beta|^2 + |\delta|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si

$$\begin{aligned}
|\alpha|^2 + |\gamma|^2 &= 1 \\
|\beta|^2 + |\delta|^2 &= 1 \\
\alpha\beta^* + \gamma\delta^* &= 0
\end{aligned}$$

lo que podemos resumir en

$$
\begin{aligned}
|\alpha|^2 + |\gamma|^2 &= 1 \\
|\beta|^2 + |\delta|^2 &= 1 \\
\alpha\gamma^* + \beta\delta^* &= 0 \\
\alpha\beta^* + \gamma\delta^* &= 0
\end{aligned}
$$