1. Construcción de la función de onda

Según los apuntes de clase, la función de onda del electrón en el átomo de hidrógeno es

$$\psi_{n,\ell,m}(r,\theta,\phi) = \sqrt{\left(\frac{2}{na_0}\right)^3 \frac{(n-\ell-1)!}{2n(n+\ell)!}} \mathrm{e}^{-r/na_0} \left(\frac{2r}{na_0}\right)^\ell L_{n-\ell-1}^{(2\ell+1)}\left(\frac{2r}{na_0}\right) Y_\ell^m(\theta,\phi)$$

con L los polinomios de Laguerre que pueden ser obtenido de la forma siguiente

$$L_k^{(\alpha)}(x) = e^x \frac{x^{-\alpha}}{k!} \frac{d^k}{dx^k}\left(e^{-x}x^{k+\alpha}\right)$$

Obtener la función de onda para $(n,\ell,m) = (1,0,0)$ y $(n,\ell,m) = (2,0,0)$ sabiendo que

$$Y_0^0(\theta,\phi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi}}$$

2. Configuración del estado fundamental

La función de onda del nivel fundamental es

$$\psi_{1,0,0}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}$$

con a_0 el radio de Bohr.

a/ Obtener la distribución de probabilidad de encontrar el electrón en algún radio, sin preocuparse del ángulo. Verificar la predicción de Bohr.

b/ Comparar con la probabilidad de encontrar la partícula en un punto

c/ El valor promedio de la posición del electrón se calcula por

$$\langle r \rangle = \iiint r|\Psi(r,\theta,\phi)|^2 r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$$

Obtener su valor

3. Configuración del estado $n = 2$

Hacer el mismo ejercicio para el caso $n = 2$, es decir

$$\psi_{2,0,0}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi a_0^3}}\left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-r/2a_0}$$

$$\psi_{2,1,-1}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{24 a_0^3}}\left(\frac{r}{a_0}\right) e^{-r/2a_0}\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-i\phi}$$

$$\psi_{2,1,0}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{24 a_0^3}}\left(\frac{r}{a_0}\right) e^{-r/2a_0}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

$$\psi_{2,1,1}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{24 a_0^3}}\left(\frac{r}{a_0}\right) e^{-r/2a_0}\left(-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\right)\sin\theta e^{i\phi}$$