## 1. Dispersión en una función $\delta$ de Dirac

En ambos lados del potencial, es decir para $x < 0$ y para $x > 0$, la ecuación de Schrödinger es

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} = E\Psi(x)$$

cuya solución es

$$\Psi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$
$$\Psi_2(x) = Ce^{ikx} + De^{-ikx}$$

con $k = 2mE/\hbar^2$. Además, como sabemos que la onda viene de la izquierda $Ae^{ikx}$, podemos tener una onda reflejada $Be^{-ikx}$ y una onda transmitida $Ce^{ikx}$. Por lo tanto debemos considerar la condición $D = 0$.
Estas soluciones deben ser continuas. Por esa razón, debemos considera que

$$\Psi_1(0) = \Psi_2(0)$$

Pero para la condición sobre la derivada debemos tener cuidado, ya que la función de Dirac genera una discontinuidad. Consideramos la ecuación de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{\hbar^2}{m}\Omega\delta(x)\Psi(x) = E\Psi(x)$$

que podemos integrar entre $x = -\epsilon$ y $x = +\epsilon$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\epsilon}^{+\epsilon}\frac{d^2\Psi}{dx^2}dx + \frac{\hbar^2}{m}\Omega\int_{-\epsilon}^{+\epsilon}\delta(x)\Psi(x)dx = E\int_{-\epsilon}^{+\epsilon}\Psi(x)dx$$

Tenemos

$$\int_{-\epsilon}^{+\epsilon}\frac{d^2\Psi}{dx^2}dx = \Psi'(+\epsilon) - \Psi'(-\epsilon)$$

$$\int_{-\epsilon}^{+\epsilon}\delta(x)\Psi(x)dx = \Psi(0)$$

Tomando el límite cuando $\epsilon \to 0$ obtenemos

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Big(\Psi'(+0) - \Psi'(-0)\Big) + \frac{\hbar^2}{m}\Omega\Psi(0) = E\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\epsilon}^{+\epsilon}\Psi(x)dx$$

Pero como la función $\Psi$ es continua, obtenemos

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\epsilon}^{+\epsilon}\Psi(x)dx = 0$$

y por lo tanto obtenemos

$$\Psi'(+0) - \Psi'(-0) = 2\Omega\Psi(0)$$

Es decir que tenemos un salto en la derivada.

En resumen las condiciones son

$$\Psi_1(0) = \Psi_2(0)$$
$$\Psi_1'(0) - \Psi_2'(0) = 2\Omega\Psi_1(0) \quad (= 2\Omega\Psi_2(0))$$

es decir

$$A + B = C$$
$$ik(A - B - C) = 2\Omega(A + B)$$

lo que implica

$$B = -\frac{A\Omega}{\Omega + ik}\,, \quad C = -\frac{ikA}{\Omega + ik}$$

podemos obtener el coeficiente de reflexión

$$R = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \frac{\Omega^2}{\Omega^2 + k^2}$$

aunque el coeficiente de transmisión es

$$T = \left|\frac{C}{A}\right|^2 = \frac{k^2}{\Omega^2 + k^2}$$

En el límite $\Omega \to 0$, tenemos $T \to 1$ y $R \to 0$, y por tanto todas las partículas se transmiten más allá de la barrera $\delta$, mientras que la reflexión es nula. Lo contrario ocurre en el límite $\Omega \to \infty$, conocido como pared opaca.

## 2. Colisión contra una pared en presencia de un potencial de Dirac

La solución del problema, en las regiones $0 < x < a$ y $x > a$, es

$$\Psi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$
$$\Psi_2(x) = Ce^{ikx} + De^{-ikx}$$

con $k = 2mE/\hbar^2$. En este caso la onda viene del infinito $De^{-ikx}$, podríamos tener una onda reflejada $Ce^{ikx}$, una onda transmitida $Be^{-ikx}$ y $Ae^{ikx}$ la onda reflejada contra la pared. Así que debemos guardar todas los términos. Como lo hemos visto, la función de onda no puede pasar una barrera infinita, lo que implica que $\Psi_1(0) = 0$, es decir $A = -B$, lo que nos permite escribir

$$\Psi_1(x) = A\Big(e^{ikx} - e^{-ikx}\Big) = 2iA\sin(kx) \equiv E\sin(kx)$$

En resumen, tenemos

$$\Psi_1(x) = E\sin(kx)$$
$$\Psi_2(x) = Ce^{ikx} + De^{-ikx}$$

Las condiciones en $x = a$, son

$$\Psi_1(a) = \Psi_2(a)$$
$$\Psi_1'(a) - \Psi_2'(a) = 2\Omega\Psi_1(a)$$

lo que implica

$$E\sin(ka) = Ce^{ika} + De^{-ika}$$

$$Ek\cos(ka) - ik\Big(Ce^{ika} - De^{-ika}\Big) = 2\Omega E\sin(ka)$$

es decir

$$E = \frac{2Dk}{ik + \Omega - e^{2iak}\Omega}$$
$$C = -\frac{De^{-iak}(k\cos(ak) + i(k + 2i\Omega)\sin(ak))}{k + i\left(-1 + e^{2iak}\right)\Omega}$$

Podemos ver que el coeficiente de reflexión es siempre 1 ya que todo lo que entra, sale

$$R = \left|\frac{C}{D}\right|^2 = 1$$

La amplitud de la onda dentro de la cavidad en comparación con la amplitud de la onda incidente es

$$A = \left|\frac{E}{D}\right|^2 = \frac{4k^2}{k^2 + 2\Omega^2 - 2\Omega(\Omega\cos(2ak) + k\sin(2ak))}$$

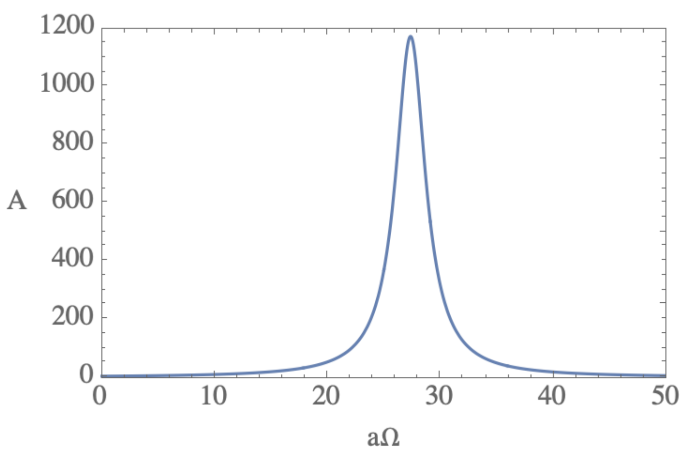
Cuando $\Omega \to \infty$, $A = 0$ es decir que no hay nada dentro, por eso $\Omega$ se llama el coeficiente de opacidad. Para una energía dada $k$, podemos ajustar el parámetro $\Omega$ para aumentar la intensidad de la onda dentro de la cavidad. Para eso debemos pedir que el denominador de $A$ sea mínimo (como funciona de $\Omega$) es decir

$$\Omega = \frac{k\sin(2ak)}{2(\cos(2ak) - 1)}$$

lo que implica

$$A_{\text{máx}} = \frac{4}{\sin^2(ak)}$$

Por ejemplo, para $ak = 3.2$, tenemos




Es el fenómeno de resonancia.