1. El oscilador armónico

El objetivo de este problema es de obtener la solución de un oscilador cuántico. Para el oscilador armónico, el potencial se escribe

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\,, \quad \text{con } m \text{ la masa y } \omega \text{ la frecuencia de oscilación}$$

Usando las abreviaciones

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{m\omega}{\hbar}$$

a/ Reescribe la ecuación de Schrödinger

b/ Las soluciones de esta ecuación diferencial se comportan asintóticamente para $|x| \gg k/\lambda$ como $\exp\left(\pm\frac{1}{2}\lambda x^2\right)$. Usamos este comportamiento para reescribir la ecuación. Definimos

$$\Psi(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda x^2}\phi(x)$$

sustituyendo en la ecuación de Schrödinger, encuentra la nueva ecuación para ϕ

c/ La solución para esta ecuación es un polinomio, que se puede escribir como $aH_n(\sqrt{\lambda}x)$ con

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2}\frac{d^n}{dz^n}\left(e^{-z^2}\right)$$

y a es un factor de normalización.

Para $n = 0$, $n = 1$ y $n = 2$, verifica que esta es una solución, encuentra la función de onda normalizada y la energía correspondiente.

d/ Deduce la forma de la energía para cualquier n.

2. Potencial escalonado

Considere el potencial

$$V(r) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ V_1, & 0 \leq x \leq a \\ V_2, & a < x \end{cases}$$

donde $0 < V_1 < V_2$ y una partícula con energía total $E > V_2$ que se aproxima a $x = 0$ en el sentido positivo del eje x. Muestre que la probabilidad de pasar a la región $x > a$ es máxima cuando a es igual a un número entero o semientero de longitudes de onda de de Broglie en la region $0 < x < a$