1. El oscilador armónico

a/ Usando las abreviaciones

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{m\omega}{\hbar}$$

La ecuación de Schrödinger se convierte en

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \left(k^2 - \lambda^2 x^2\right)\Psi = 0$$

b/ Haciendo el reemplazo, obtenemos

$$\phi''(x) - 2\lambda x \phi'(x) + \left(k^2 - \lambda\right)\phi(x) = 0 \tag{1}$$

c/ Para $n = 0$, tenemos

$$H_0(z) = (-1)^0 e^{z^2} \frac{d^0}{dz^0}\left(e^{-z^2}\right) = 1$$

Esto implica, a partir de la ecuación (1), que $\lambda = k^2$, lo que significa

$$E_0 = \hbar\omega/2$$

Para la función de onda, tenemos

$$\Psi_0(x) = a\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda x^2}$$

lo cual, a partir de la normalización, nos da el valor de a

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_0|^2 dx = a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x^2} dx = a^2 \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/4}$$

lo cual implica

$$\Psi_0(x) = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/4} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda x^2}, \quad \lambda = \frac{m\omega}{\hbar}$$

d/ Para $n = 1$, obtenemos

$$H_1(z) = (-1)^1 e^{z^2} \frac{d^1}{dz^1}\left(e^{-z^2}\right) = 2z$$

La solución es entonces

$$H_1(\sqrt{\lambda}x) = 2\sqrt{\lambda}x$$

Esto implica, a partir de la ecuación (1), que $3\lambda = k^2$, lo que significa

$$E_1 = 3\hbar\omega/2$$

Para la función de onda, tenemos

$$\Psi_1(x) = a\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda x^2} 2\sqrt{\lambda}x$$

lo cual, a partir de la normalización, nos da el valor de a

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_1|^2 dx = 4\lambda a^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \mathrm{e}^{-\lambda x^2} dx = 4\lambda a^2 \frac{\sqrt{\pi}}{2\lambda^{3/2}} = 2a^2 \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = \Big(\frac{\lambda}{4\pi}\Big)^{1/4}$$

lo cual implica

$$\Psi_1(x) = 2\sqrt{\lambda}\Big(\frac{\lambda}{4\pi}\Big)^{1/4} x \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda x^2}, \quad \lambda = \frac{m\omega}{\hbar}$$

e/ Para $n = 2$, obtenemos

$$H_2(z) = (-1)^2 e^{z^2} \frac{d^2}{dz^2}\left(e^{-z^2}\right) = 4z^2 - 2$$

La solución es entonces

$$H_2(\sqrt{\lambda}x) = 4\lambda x^2 - 2$$

Esto implica, a partir de la ecuación (1), que $5\lambda = k^2$, lo que significa

$$E_2 = 5\hbar\omega/2$$

Para la función de onda, tenemos

$$\Psi_2(x) = a\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda x^2}(4\lambda x^2 - 2)$$

lo cual, a partir de la normalización, nos da el valor de a

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_2|^2 dx = a^2 \int_{-\infty}^{\infty} (4\lambda x^2 - 2)^2 \mathrm{e}^{-\lambda x^2} dx = 8a^2 \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = \Big(\frac{\lambda}{64\pi}\Big)^{1/4}$$

lo cual implica

$$\Psi_2(x) = 2\Big(\frac{\lambda}{64\pi}\Big)^{1/4} (4\lambda x^2 - 2)^2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda x^2}, \quad \lambda = \frac{m\omega}{\hbar}$$

f/ Podemos deducir para los 3 valores de n que hemos estudiado que la fórmula puede ser

$$E_n = \hbar\omega\Big(n + \frac{1}{2}\Big)$$

2. Potencial escalonado

Para resolver el problema, primero escribimos la ecuación de Schrödinger para cada región del potencial:
Región 1: $x < 0$ Aquí el potencial es $V(r) = 0$, y la ecuación de Schrödinger es:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_1}{dx^2} = E\psi_1$$

con solución general:

$$\psi_1(x) = Ae^{ik_1 x} + Be^{-ik_1 x}$$

donde $k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$
Región 2: $0 \leq x \leq a$ Aquí el potencial es $V(r) = V_1$, y la ecuación de Schrödinger es:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_2}{dx^2} = (E - V_1)\,\psi_2$$

con solución general:

$$\psi_2(x) = Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x}$$

donde $k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-V_1)}}{\hbar}$
Región 3: $x > a$ Aquí el potencial es $V(r) = V_2$, y la ecuación de Schrödinger es:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_3}{dx^2} = (E - V_2)\,\psi_3$$

con solución general:

$$\psi_3(x) = Fe^{ik_3x}$$

donde $k_3 = \frac{\sqrt{2m(E-V_2)}}{\hbar}$. Hemos eliminado la solución que representa una onda que viene del infinito.
En los puntos $x = 0$ y $x = a$, las funciones de onda ψ y sus derivadas deben ser continuas. En $x = 0$:

$$\psi_1(0) = \psi_2(0), \quad \left.\frac{d\psi_1}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{d\psi_2}{dx}\right|_{x=0}$$

En $x = a$:

$$\psi_2(a) = \psi_3(a), \quad \left.\frac{d\psi_2}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{d\psi_3}{dx}\right|_{x=a}$$

En $x = 0$: La continuidad de $\psi(x)$ y su derivada en $x = 0$ nos da las ecuaciones:

$$A + B = C + D$$
$$ik_1(A - B) = ik_2(C - D)$$

En $x = a$: Similarmente, en $x = a$ tenemos:

$$Ce^{ik_2a} + De^{-ik_2a} = Fe^{ik_3a}$$
$$ik_2\left(Ce^{ik_2a} - De^{-ik_2a}\right) = ik_3Fe^{ik_3a}$$

Estas ecuaciones pueden ser resueltas porque tenemos 5 variables y 4 ecuaciones pero buscamos el caso cuando $B = 0$ es decir sin reflexión, lo que implica que el determinante de la matriz siguiente es nulo, ya que ahora tenemos 4 variables y 4 ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ ik_1 & -ik_2 & ik_2 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\,ik_2a} & e^{-ik_2a} & -e^{ik_3a} \\ 0 & ik_2e^{ik_2a} & -ik_2e^{-ik_2a} & -ik_3e^{ik_3a} \end{pmatrix}$$

Como el determinante debe ser nulo, lo separamos en una parte real y una parte imaginaria

$$(k_1 + k_2)(k_2 - k_3)\sin(2ak_2) = 0$$
$$(k_1 - k_2)(k_2 + k_3) + (k_1 + k_2)(k_2 - k_3)\cos(2ak_2) = 0$$

lo que implica $\sin(2ak_2) = 0$ es decir

$$2ak_2 = 2\pi n \quad \text{o} \quad 2ak_2 = \pi + 2\pi n\,, \quad \text{con } n \text{ entero}$$

es decir

$$a = \frac{n}{2}\frac{2\pi}{k_2} \quad \text{o} \quad a = \frac{\pi}{2k_2} + \frac{n}{2}\frac{2\pi}{k_2}\,, \quad \text{con } n \text{ entero}$$

donde $2\pi/k_2$ es la longitud de onda de de Broglie en la región 2.