1. Emisión-Absorción

a/

$$n_i = 2\,, \quad n_f = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) = \frac{3R_H}{4} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 121,5 \text{ nm}$$

donde se ha usado

$$R_H = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 hca_0} = 1.09737\ 10^7\ \text{m}^{-1}$$

Lo que implica

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = 2.47\ 10^{15}\ \text{Hz}$$

b/ Para la serie de Balmer $n_f = 2$

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n_i^2}\right)$$

Lo que implica

$$E = \frac{hc}{\lambda} = R_H hc\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}\right)$$

La longitud de onda más corta es cuando la energía es más alta ya que $E \propto 1/\lambda$, lo que se encuentra para $n = \infty$, es decir

$$E = \frac{R_H hc}{4} = 5.45\ 10^{-19}\ \text{kg m}^2\ \text{s}^{-2} = 5.45\ 10^{-19}\ \text{J} \equiv 3.4\ \text{eV}$$

donde se ha usado que 1 eV $= 1.6\ 10^{-19}$ J.

c/ Sabemos que

$$E = \frac{hc}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{hc}{E}$$

con

$$E = 1.77\ \text{eV}$$
$$hc = 6.63\ 10^{-34} \times 3\ 10^8\ \text{m}^3\ \text{kg s}^{-2} = 1243\ \text{eV nm}$$

lo que implica $\lambda = 702.25$ nm es decir rojo

2. Tamaño de orbitales en átomos de hidrógeno e iones

a/ Tenemos $r = a_0 n^2 = 1.9$ nm

b/ En este caso, tenemos 2 protones y un solo electrón. Podemos hacer el cálculo de la misma forma. Escribiendo la fuerza de Coulomb y el la aceleración centrípeta, tenemos

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2e^2}{r^2}$$
$$a = \frac{v^2}{r}$$

lo que implica

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2e^2}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$
$$r = \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 mv^2}$$

Por otro lado, sabemos que $p = h/\lambda$ y $2\pi r = n\lambda$, la relación de Bohr. Lo que implica

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{hn}{2\pi r} = \frac{\hbar}{r}n$$

Pero como $p = mv$, obtenemos

$$mv = \frac{\hbar}{r}n \qquad \Leftrightarrow \qquad v = \frac{\hbar}{mr}n$$

Lo que implica

$$r = \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 mv^2} = \frac{2e^2mr^2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2n^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad r = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{2e^2m}n^2 = \frac{a_0}{2}n^2$$

Lo que implica $r = 952$ pm.

3. Átomo hidrogenoide

Siguiendo con la misma lógica, tenemos

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Ze^2}{r^2}$$
$$a = \frac{v^2}{r}$$

lo que implica

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Ze^2}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$
$$r = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 mv^2}$$

Por otro lado, sabemos que

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{hn}{2\pi r} = \frac{\hbar}{r}n$$

Pero como $p = mv$, obtenemos

$$mv = \frac{\hbar}{r}n \qquad \Leftrightarrow \qquad v = \frac{\hbar}{mr}n$$

Lo que implica

$$r = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 mv^2} = \frac{Ze^2mr^2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2n^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad r = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{Ze^2m}n^2 = \frac{a_0}{Z}n^2$$

Para la energía, obtenemos

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Ze^2}{r} = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{Ze^2}{r} = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{Z^2e^2}{a_0n^2} = -Z^2\frac{13.6}{n^2}\ \text{eV}$$