

Física 2 (mecánica clásica)

Radouane Gannouji

*Instituto de Física,
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso,
Avenida Universidad 330,
Curauma, Valparaíso, Chile*

*<https://www.fis.ucv.cl/rgannouji>
radouane.gannouji@pucv.cl*

Estos apuntes de clase de la Licenciatura en Matemáticas están basando en varios libros:

- Mathematical Methods of Classical Mechanics, "*Vladimir Arnold*"

Un excelente libro recomendado para este curso, escrito por uno de los expertos y actores de la mecánica.

- Classical Dynamics: a contemporary approach, "*Jorge José, Eugene Saletan*"

Este libro es excelente y cubre los mismos temas que el primero. Su estilo puede parecer un poco más moderno que el de Arnold, pero esto es principalmente una cuestión de preferencia personal.

- Foundations of Mechanics, "*Ralph Abraham and Jerrold Marsden*"

Este libro es considerablemente más avanzado. No está dirigido a quienes están comenzando en el campo, pero podría resultar excelente para aquellos que ya tienen una sólida comprensión de la geometría diferencial.

- Lectures on Classical Dynamics, "*David Tong*"

Estos apuntes en línea contienen una materia cercana a lo que estudiamos en la primera parte de este curso.

Contenido

1. Mecánica newtoniana	3
1.1 Ley de Newton	3
1.2 Momento	5
1.3 Trabajo y energía	5
1.4 Resorte	7
1.5 Péndulo simple	11
1.6 Osciladores acoplados	12
2. Formalismo lagrangiano	18
2.1 El formalismo	18
2.2 Resorte	20
2.3 Cambio de coordenadas	21
2.4 Sistema de referencia en rotación	22
2.5 Unicidad del lagrangiano	24
2.6 Multiplicadores de Lagrange	25
2.7 Teorema de Noether	27
2.7.1 homogeneidad del espacio	29
2.7.2 Isotropía del espacio	29
2.7.3 Homogeneidad en el tiempo	30
2.8 Problema de dos cuerpos	31
2.8.1 Problema de Kepler	34
2.9 Sistema de referencia no inercial	36
2.9.1 Péndulo de Foucault	41
2.10 Sólido rígido	45
2.10.1 Ángulos de Euler	46
2.10.2 Velocidad angular mediante los ángulos de Euler	47
2.10.3 Energía cinética	48
2.10.4 Momento angular	52
2.10.5 Trompo de Lagrange	52
3. Formalismo hamiltoniano	57
3.1 Transformada de Legendre	58
3.2 El hamiltoniano	59
3.3 Teorema de Liouville	61

3.4	Corchete de Poisson	62
3.5	El vector de Laplace-Runge-Lenz-Hermann-Bernoulli-Hamilton-Gibbs	65
3.6	Transformaciones canónicas	70
3.7	Transformaciones infinitesimales	75
3.8	Funciones generatrices	78
3.9	Ecuación de Hamilton-Jacobi	82
4.	Mecánica simpléctica	84
4.1	Motivación	84
4.2	Variedad diferencial	85
4.3	Formas	93
4.4	Derivada de Lie	98
4.5	Notación gráfica de Penrose	102
4.6	Variedad simpléctica y mecánica clásica	105
4.7	Sistemas integrables	110

1. Mecánica newtoniana

1.1 Ley de Newton

El objeto de la mecánica newtoniana es la descripción de la dinámica de las partículas con concepto de distancia, tiempo, velocidad y aceleración. A Newton se deben las leyes fundamentales de la mecánica:

1. Todo cuerpo permanece en reposo o en movimiento uniforme (no acelerado) a menos que actúa una fuerza sobre el cuerpo.
2. Todo cuerpo sobre lo cual actúa una fuerza se mueve de tal forma que la variación de su momento es igual a la fuerza.
3. Cuando dos cuerpos ejercen fuerzas entre si, estas fuerzas son de intensidades iguales y sentidos opuestos.

En realidad, la segunda ley implica las otras.

Sea \vec{r} un vector posición de una partícula (con un cierto origen O) y sea \vec{v} su vector velocidad. Sabemos que

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

La cantidad de movimiento \vec{p} de la partícula es $\vec{p} = m\vec{v}$, con m la masa del cuerpo.

Por consecuencia de interacciones con campos y objetos exteriores, la partícula puede experimentar fuerzas. La suma vectorial de las fuerzas que se ejercen sobre una partícula es la fuerza resultante \vec{F} , de la cual podemos definir la ley de Newton:

Existen sistemas de referencias en los cuales el movimiento de la partícula está descrita por la ecuación diferencial

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

Si la masa es constante, esta ley se transforma en

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \equiv m\vec{a}$$

Obtenemos automáticamente que si no hay fuerzas, no hay aceleración

$$\vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \vec{0}$$

Este resultado corresponde a la primera ley.

La tercera ley es conocida como el principio de acción-reacción. Cuando estamos en reposo, no hay movimiento entre dos partículas es decir que $\vec{a} = \vec{0}$ o de forma equivalente $\vec{F} = \vec{0}$. Pero como son dos fuerzas, tenemos $\vec{F} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}$ con \vec{F}_{12} la fuerza que ejerce el cuerpo 1 sobre el cuerpo 2 y viceversa por \vec{F}_{21} . Por lo tanto, obtenemos de $\vec{F} = \vec{0}$ que $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ lo que corresponde a la tercera ley.

Los sistemas de referencia donde se cumple la segunda ley de Newton se denominan sistemas de *referencia inerciales*. Es decir que en ausencia de fuerzas, una partícula en reposo en un sistema inercial en un instante dado, sigue en reposo en todo instante. En cambio, los sistemas de referencia no inerciales son sistemas de referencia donde aparecen términos adicionales en la segunda ley de Newton, que no son asociados a las fuerzas del sistema. Estos términos adicionales se denominan fuerzas ficticias y son debidos a la aceleración del sistema.

Por ejemplo, una partícula en movimiento rectilíneo con respecto al laboratorio será visto con un movimiento muy complicado por un mosquito. Por lo tanto, en un sistema de referencia inercial, las leyes de la mecánica toman su forma más simple.

Existen una infinidad de sistemas de referencias inerciales, que se mueven los unos con respecto a los otros con movimiento rectilíneo y uniforme. En estos sistemas, las leyes de la mecánica son las mismas. Eso corresponde al principio de relatividad de Galileo.

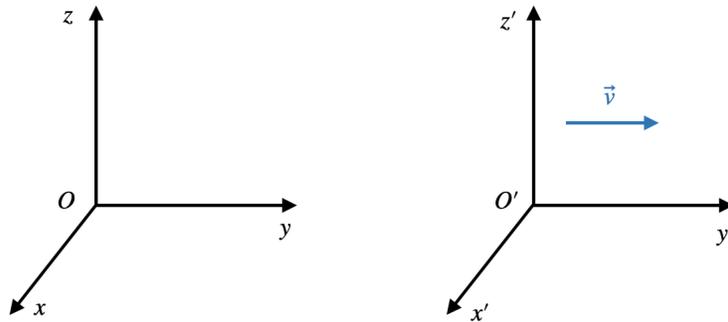


Figure 1: Sistemas de referencia en movimiento relativo rectilíneo y uniforme, con velocidad v en la dirección Oy .

Las ecuaciones de transformación para las coordenadas son

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y - vt \\ z' = z \end{cases} \quad \text{derivando con respecto al tiempo} \quad \begin{cases} \dot{x}' = \dot{x} \\ \dot{y}' = \dot{y} - v \\ \dot{z}' = \dot{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}' = \ddot{x} \\ \ddot{y}' = \ddot{y} \\ \ddot{z}' = \ddot{z} \end{cases}$$

Se observan que las derivadas segundas coinciden es decir que las leyes no cambian entre dos sistemas de referencia en movimiento relativo rectilíneo y uniforme.

1.2 Momento

Podemos obtener varios teoremas de conservación

- Teorema de conservación de la cantidad de movimiento

Cuando la fuerza total se anula: $\vec{F} = \vec{0}$ tenemos $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$ es decir que \vec{p} es constante.

- Teorema de conservación del momento cinético

Sea una partícula de masa m y velocidad \vec{v} localizada en P . El momento cinético respecto a un punto fijo O se define como

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

con \times el producto vectorial. Por otro lado, definimos el momento de una fuerza respecto a un punto O por

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Por lo tanto, tenemos

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d}{dt}(\underbrace{\vec{r} \times (m\vec{v})}_{\vec{L}}) - \frac{d\vec{r}}{dt} \times (m\vec{v})$$

pero como el último término es nulo, obtenemos

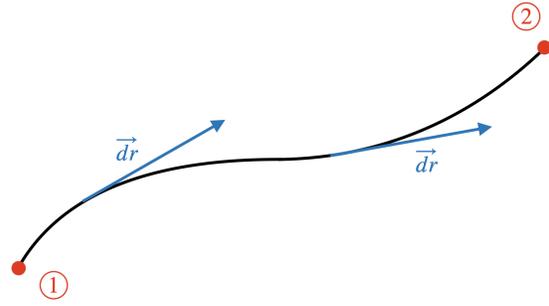
$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

se deduce fácilmente que cuando \vec{N} es nulo, se conserva el momento cinético, $\dot{\vec{L}} = \vec{0}$.

1.3 Trabajo y energía

Sea una partícula de masa m , que se mueve del punto ① al punto ② bajo la acción de la fuerza \vec{F} . Se define el trabajo W de ① a ②

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



con \int_1^2 la integral de camino del punto ① al punto ② y $d\vec{r}$ la tangente a la trayectoria.

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt$$

En la última expresión, hemos asumido que la masa es constante y los tiempos (t_1, t_2) corresponden al los tiempos cuando la partícula se encuentra en ① y ② respectivamente.

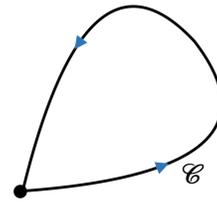
$$W_{12} = m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) dt = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

con $v_i \equiv v(t_i)$ para $i = (1, 2)$. Por lo tanto, observamos la aparición de una cantidad importante llamada energía cinética

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

lo que implica que el trabajo entre los dos puntos es $W_{12} = T_2 - T_1$ es decir que depende solamente de la diferencia entre la energía cinética que posee la partícula en ② y la energía cinética que posee en ①. Cuando esta diferencia no depende del camino tomado, se llama una fuerza conservativa. Deducimos automáticamente que para una fuerza conservativa la integral de la fuerza sobre un camino cerrado es nula.

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$



Usando el teorema de Stokes, obtenemos

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{\mathcal{S}} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = 0$$

con \mathcal{C} un contorno cerrado y \mathcal{S} el área encerrado por \mathcal{C} . Dado que esta relación se aplica a cualquier trayectoria cerrada y, por ende, a cualquier superficie, podemos inferir que

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$$

es decir que

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V$$

con V la energía potencial, el signo es por convención. En el caso de una fuerza conservativa,

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_1^2 \vec{\nabla}V \cdot d\vec{r} = - \int_1^2 \frac{\partial V}{\partial x} dx - \int_1^2 \frac{\partial V}{\partial y} dy - \int_1^2 \frac{\partial V}{\partial z} dz \\ &= - \int_1^2 dV = V_1 - V_2 \end{aligned}$$

Pero como $W_{12} = T_2 - T_1$ para una fuerza conservativa, obtenemos que

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

lo que corresponde a la conservación de la energía total de una partícula

$$E = T + V$$

Las fuerzas que vamos a estudiar en este curso son conservativas como

- gravitacional
- elástica (resorte)

aunque un ejemplo de fuerza no conservativa es la fricción (rozamiento).

1.4 Resorte

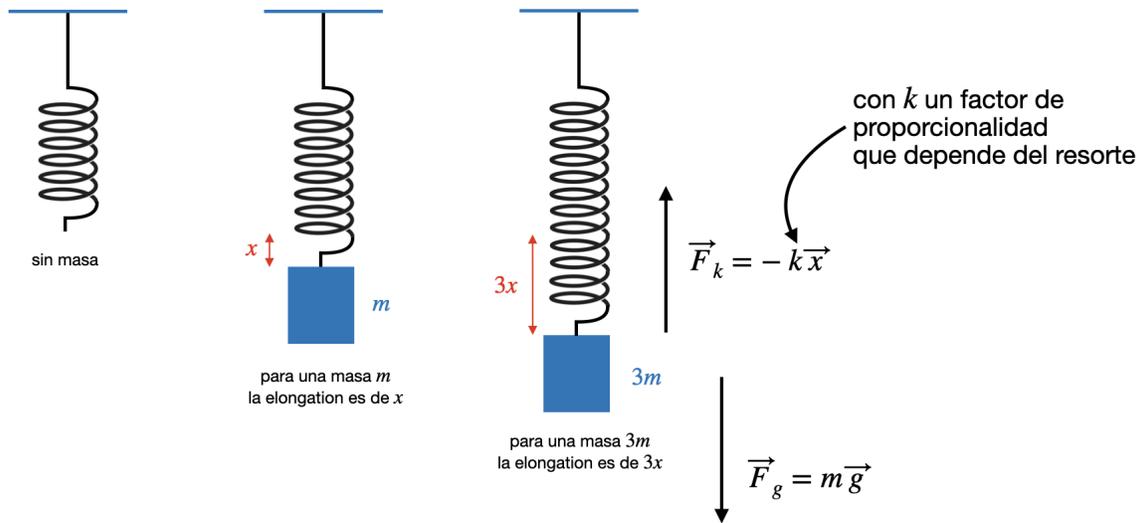
Cuando se obliga a un cuerpo a cambiar de forma, la fuerza deformadora es proporcional a la deformación. Esta fuerza puede consistir en:

- aumento de longitud (resorte helicoidal)
- en una flexión (resorte plano)
- torsión de una banda alrededor de su eje

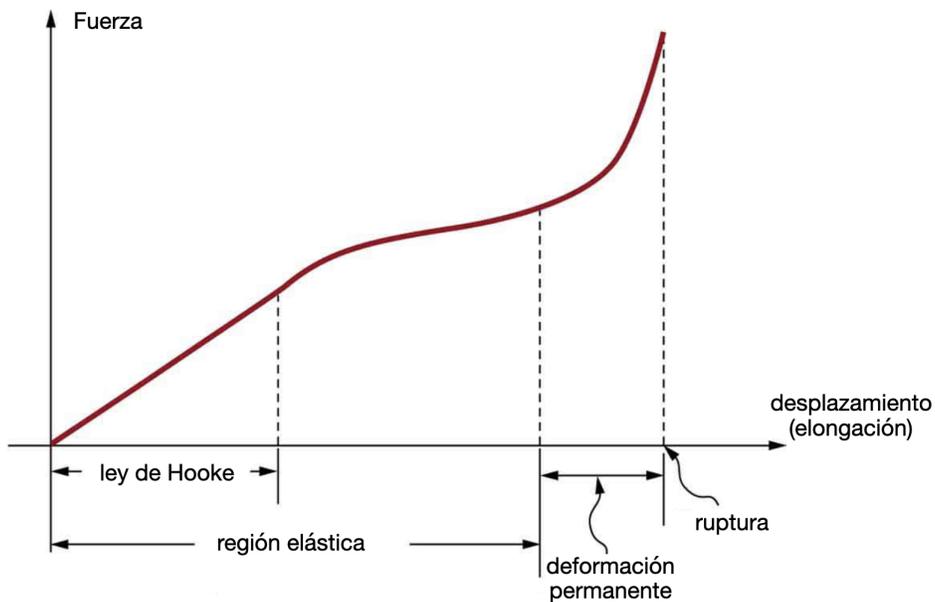
La ley de elasticidad de Hooke nos dice que:

La fuerza es proporcional a la extensión

Es una ley empírica es decir que no tiene fundamentos ni demostración pero funciona. Fue publicado en el año 1678 : *ut tensio, sic vis* (como la extensión, así la fuerza), es decir que la extensión es proporcional a la fuerza.



La ley de Hooke funciona solamente en un régimen de pequeñas elongaciones



Consideramos una masa puntual, m , obligada a moverse según una recta fija, por medio de un resorte elástico, de constante k . El resorte elástico ejerce una fuerza recuperadora, que se opone a la elongación.

$$F = -k(x - x_0)$$

con x_0 la longitud natural del resorte (sin tensión).

Imaginamos una elongación en la dirección x , es decir que $x - x_0 > 0$, pero como la fuerza se opone a la elongación, la fuerza debe estar en la dirección $-\vec{e}_x$, lo que corresponde bien a la forma de la ley

$$\vec{F} = -k(x - x_0)\vec{e}_x$$

El mismo razonamiento se puede hacer en el caso de una compresión, es decir cuando $x - x_0 < 0$.

El movimiento de la masa m , después de la elongación, es solución de

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= \vec{F} \\ \Leftrightarrow m\ddot{x}\vec{e}_x &= -k(x - x_0)\vec{e}_x \\ \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}(x - x_0) &= 0 \end{aligned}$$

Como x_0 es una constante, definimos $\xi = x - x_0$, lo que transforma la ecuación en la ecuación de un *oscilador armónico*

$$\ddot{\xi} + \omega^2\xi = 0$$

donde se ha definido $\omega^2 = k/m > 0$. La solución puede ser escrita de la forma

$$\xi(t) = \alpha \cos(\omega t + \beta)$$

o

$$x(t) = x_0 + \alpha \cos(\omega t + \beta)$$

Observamos que la partícula oscila alrededor de la posición de equilibrio x_0 con periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

La energía cinética de la masa es

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}k\alpha^2 \sin^2(\omega t + \beta)$$

La energía potencial puede ser obtenida calculando el trabajo necesario para desplazar la masa m a una distancia x . Como

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

obtenemos

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{x} = k(x - x_0) dx = k\xi d\xi$$

lo que nos permite obtener

$$W = \frac{1}{2}k\xi^2 + \text{constante}$$

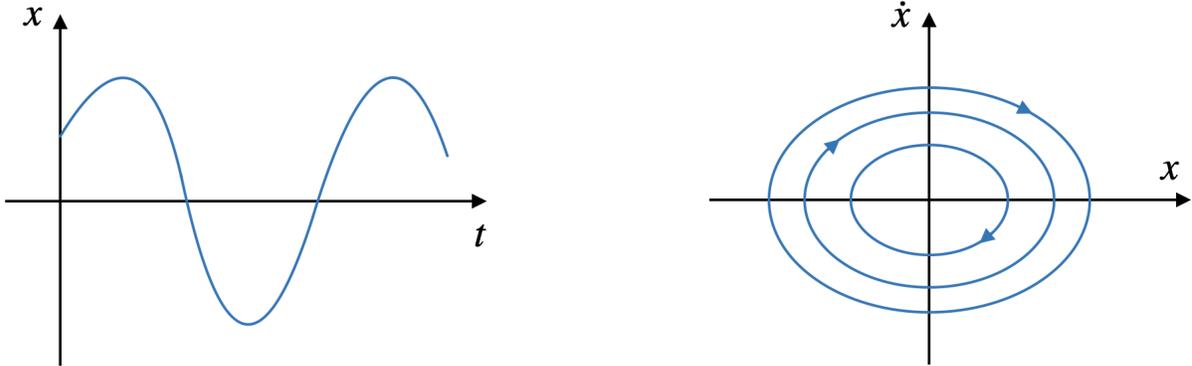
de lo cual identificamos la energía potencial

$$V = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 = \frac{1}{2}k\alpha^2 \cos^2(\omega t + \beta)$$

Es ahora fácil verificar que la energía total es constante

$$E = T + V = \frac{1}{2}k\alpha^2 [\sin^2(\omega t + \beta) + \cos^2(\omega t + \beta)] = \frac{1}{2}k\alpha^2$$

Hay dos maneras de representar la solución.



En la primera representación, consideramos la evolución de la posición en el tiempo o en la segunda tenemos una representación paramétrica en el cual el parámetro es el tiempo. Tenemos

$$\begin{aligned}x(t) &= \alpha \cos(\omega t + \beta) \\ \dot{x}(t) &= -\alpha\omega \sin(\omega t + \beta)\end{aligned}$$

es decir que

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\dot{x}}{\alpha\omega}\right)^2 = 1$$

pero como $E = k\alpha^2/2$, es decir

$$\frac{x^2}{2E/k} + \frac{\dot{x}^2}{2E/m} = 1$$

lo que representa una familia de elipses, llamadas curvas de Lissajous. Este espacio es llamado el espacio de fase. Cada trayectoria del espacio de fase corresponde a un valor de la energía del oscilador. Por lo tanto, dos trayectorias del espacio de fase no pueden cortarse.

1.5 Péndulo simple

Consideramos un péndulo simple (a diferencia de un péndulo físico) definido por una masa puntual m , suspendida mediante un hilo inextensible y sin peso de longitud L .

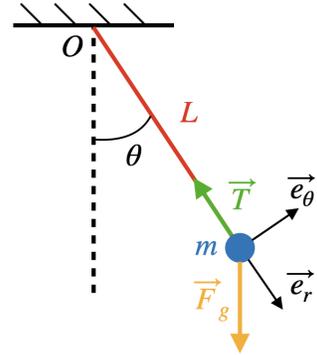
La masa m esta sujeta a dos fuerzas:

- La gravitación

$$\vec{F}_g = mg(\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

- La tensión del hilo

$$\vec{T} = -T\vec{e}_r$$



lo que nos permite obtener a partir de la ley de Newton

$$m\vec{a} = -T\vec{e}_r + mg(\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

Para obtener la aceleración en el sistema de coordenadas polares, consideramos las derivadas del vector \overrightarrow{OM} que conecta el centro O de la masa en el punto M .

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= L\vec{e}_r \\ \Rightarrow \vec{v} &= L\dot{\theta}\vec{e}_\theta \\ \Rightarrow \vec{a} &= L\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - L\dot{\theta}^2\vec{e}_r \end{aligned}$$

lo que implica

$$\begin{cases} mL\ddot{\theta} = -mg \sin \theta \\ -mL\dot{\theta}^2 = -T + mg \cos \theta \end{cases}$$

La segunda ecuación nos permite calcular la tensión del hilo sobre la masa

$$T = mg \cos \theta + mL\dot{\theta}^2$$

Aunque la segunda ecuación, nos da la dinámica de la masa m .

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

Es interesante observar que la ecuación es independiente de la masa m . Es una ecuación no-lineal, se puede resolver numéricamente. Pero si consideramos pequeñas oscilaciones alrededor de $\theta = 0$ es decir $\theta \ll 1$ podemos hacer una expansión en serie

$$\sin \theta \simeq \theta$$

lo que implica

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = 0$$

es decir un oscilador armónico de frecuencia $\omega^2 = g/L$. La solución es

$$\theta(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

de la cual podemos obtener el periodo de oscilaciones

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

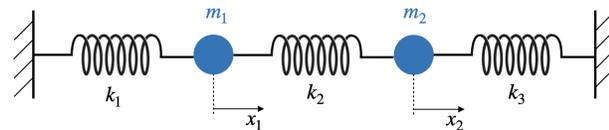
Observamos que cuando L aumenta, el periodo aumenta.

1.6 Osciladores acoplados

Consideramos tres resortes con constantes (k_1, k_2, k_3) y dos masas (m_1, m_2) .

Queremos estudiar las oscilaciones (el

movimiento) de las dos masas. Llamemos (x_1, x_2) los desplazamientos de cada una de las masas a partir de su posición de equilibrio. Las variables (x_1, x_2) son positivas cuando se mueven hacia la derecha.



Si x_1 y x_2 se mueven hacia la derecha

- el resorte k_1 se estira de x_1
- el resorte k_2 se deforma de $x_2 - x_1$
- el resorte k_3 se comprime de x_2

Se considera que los resortes tienen una masa despreciable. Por lo tanto, las únicas masas son m_1 y m_2 . Ocupamos la ley de Newton para estas dos masas. Para la masa m_1 , hay dos fuerzas

$$\begin{aligned} & -k_1 x_1 \vec{e}_x \\ & + k_2 (x_2 - x_1) \vec{e}_x \end{aligned}$$

y las fuerzas sobre la masa m_2 son

$$\begin{aligned} & -k_3 x_2 \vec{e}_x \\ & - k_2 (x_2 - x_1) \vec{e}_x \end{aligned}$$

Aplicando la segunda ley de Newton a cada una de las dos partículas obtenemos:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= -k_3 x_2 - k_2 (x_2 - x_1) \end{aligned}$$

Hemos obtenido dos ecuaciones diferenciales acopladas. Para el estudio, consideramos un caso particular, cuando $m_1 = m_2 \equiv m$ y $k_1 = k_3 \equiv k$

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= -k x_1 + k_2 (x_2 - x_1) \\ m \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= -k x_2 - k_2 (x_2 - x_1) \end{aligned}$$

Sumando y restando las dos ecuaciones, tenemos

$$\begin{aligned} m \frac{d^2}{dt^2} (x_1 + x_2) &= -k (x_1 + x_2) \\ m \frac{d^2}{dt^2} (x_1 - x_2) &= -(2k_2 + k) (x_1 - x_2) \end{aligned}$$

Son dos ecuaciones diferenciales de segundo orden, desacopladas. Definimos

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2k_2}{m}}$$

La solución es

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= A \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ x_1 - x_2 &= B \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{aligned}$$

es decir

$$x_1 = \frac{A}{2} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + \frac{B}{2} \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$x_2 = \frac{A}{2} \cos(\omega_1 t + \phi_1) - \frac{B}{2} \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

(A, B, ϕ_1, ϕ_2) son constantes de integración y representan las condiciones iniciales. Por ejemplo, imaginamos que inicialmente se desplazan las masas de $x_1^{(0)}$ y $x_2^{(0)}$ y las velocidades iniciales son nulas, obtenemos

$$x_1(t) = \frac{x_1^{(0)} + x_2^{(0)}}{2} \cos(\omega_1 t) + \frac{x_1^{(0)} - x_2^{(0)}}{2} \cos(\omega_2 t)$$

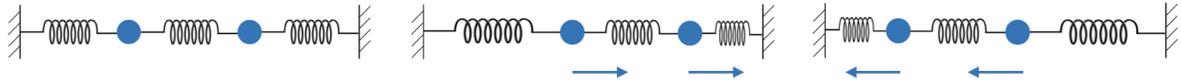
$$x_2(t) = \frac{x_1^{(0)} + x_2^{(0)}}{2} \cos(\omega_1 t) - \frac{x_1^{(0)} - x_2^{(0)}}{2} \cos(\omega_2 t)$$

Si $x_1^{(0)} = x_2^{(0)}$, obtenemos

$$x_1(t) = x_1^{(0)} \cos(\omega_1 t)$$

$$x_2(t) = x_1^{(0)} \cos(\omega_1 t)$$

lo que implica $x_1(t) = x_2(t)$ es decir que se mueven en fase. El resorte central no sufre ninguna deformación y por lo tanto, no ejerce ninguna fuerza sobre las partículas, se mueven como si no estuvieran acoplados



Se llama un modo normal (movimiento asociado a una sola frecuencia, en este caso ω_1).

Hay un segundo modo normal, asociado a la segunda frecuencia. Se encuentra por $x_1^{(0)} = -x_2^{(0)}$, lo que implica

$$x_1 = -x_2^{(0)} \cos(\omega_2 t)$$

$$x_2 = x_2^{(0)} \cos(\omega_2 t)$$

es decir $x_1(t) = -x_2(t)$, lo que corresponde a un movimiento en oposición de fase



Estos dos modos normales son los modos fundamentales del sistema. Cualquier otro movimiento es una combinación de estos modos. Por ejemplo

$$x_1(t) = \underbrace{\frac{x_1^{(0)} + x_2^{(0)}}{2} \cos(\omega_1 t)}_{\text{modo normal 1}} + \underbrace{\frac{x_1^{(0)} - x_2^{(0)}}{2} \cos(\omega_2 t)}_{\text{modo normal 2}}$$

Otro caso interesante que podemos ver es cuando $x_2^{(0)} = 0$

$$x_1 = \frac{x_1^{(0)}}{2} [\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)]$$

$$x_2 = \frac{x_1^{(0)}}{2} [\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)]$$

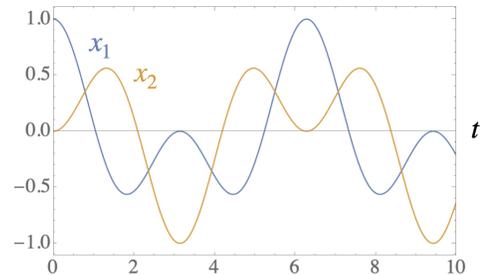
Es una cierta combinación lineal de los dos modos normales. Usando las relaciones de los coseno/seno, obtenemos

$$x_1 = x_1^{(0)} \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)$$

$$x_2 = -x_1^{(0)} \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)$$

Por la ilustración, consideramos $x_1^{(0)} = 1, \omega_1 = 1$ y $\omega_2 = 2$

Observamos una diferencia de fase entre los dos movimientos y por lo tanto un intercambio de energía. De hecho, si la energía total es constante, podemos identificar una energía de intercambio

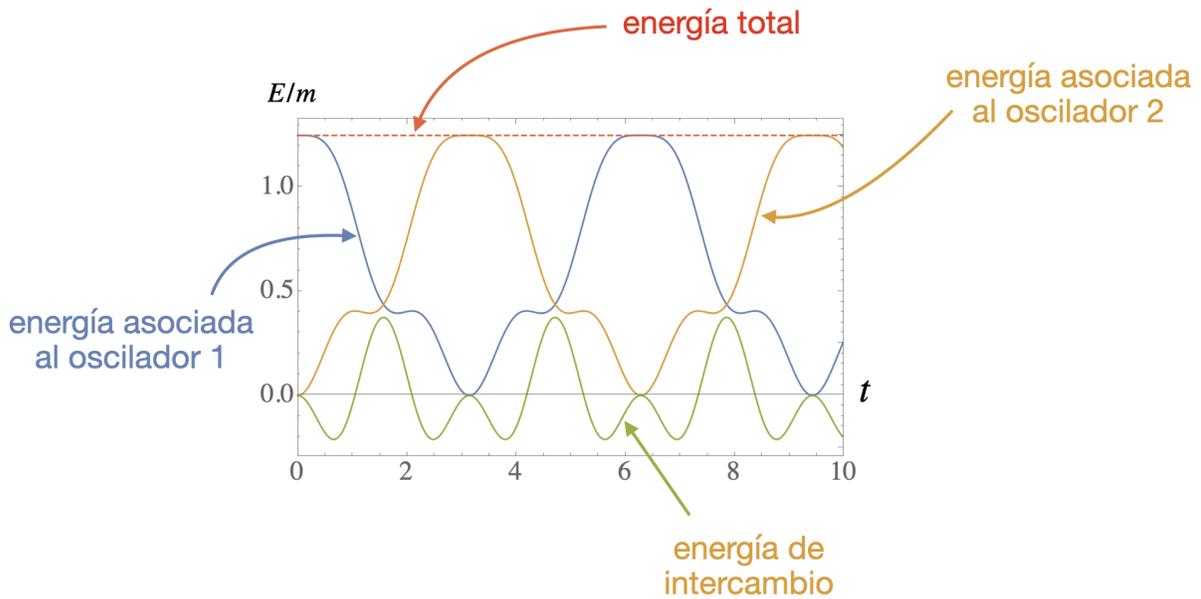


$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 + \frac{1}{2} k (x_2 - x_1)^2$$

$$= \frac{1}{4} m (x_1^{(0)})^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2) \equiv c^{\text{ste}}$$

Podemos escribir

$$\frac{1}{2} k (x_2 - x_1)^2 = \underbrace{\frac{1}{2} k_1 x_1^2}_{\text{energía potencial asociada al oscilador uno}} + \underbrace{\frac{1}{2} k_2 x_2^2}_{\text{energía potencial asociada al oscilador dos}} - \underbrace{k_2 x_1 x_2}_{\text{energía de intercambio}}$$



Una segunda manera para estudiar estos problemas es de usar matrices. Tenemos las ecuaciones siguientes

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k_2(x_2 - x_1) \end{cases}$$

Para simplificar aún más, consideramos $k_1 = k_2 = k_3 \equiv k$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -2kx_1 + kx_2 \\ m\ddot{x}_2 = kx_1 - 2kx_2 \end{cases}$$

Podemos definir un vector $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, una matriz $M = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$ y una matriz

$$K = \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix}$$

$$M\ddot{X} = -KX$$

Buscamos soluciones de la forma $X(t) = Ae^{i\Omega t}$ con A un vector constante. Obtenemos

$$-\Omega^2 MA = -KA \quad \Rightarrow \quad \underbrace{(\Omega^2 M - K)}_{\text{matriz}} \underbrace{A}_{\text{vector}} = 0$$

Hay una solución trivial $A = \vec{0}$ es decir $x_1(t) = x_2(t) = 0$. Una solución más interesante es cuando

$$\det(\Omega^2 M - K) = 0$$

es decir

$$\det(\Omega^2 M - K) = \det \begin{pmatrix} m\Omega^2 - 2k & k \\ k & m\Omega^2 - 2k \end{pmatrix} = (2k - m\Omega^2)^2 - k^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2k - m\Omega^2 = \pm k \quad \Leftrightarrow \quad \Omega^2 = \begin{cases} k/m \\ 3k/m \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \Omega = \begin{cases} \pm\sqrt{k/m} \\ \pm\sqrt{3k/m} \end{cases} \equiv \begin{cases} \pm\omega_1 \\ \pm\omega_2 \end{cases}$$

con (ω_1, ω_2) los modos normales. Los vectores propios corresponden al vector A . Es fácil verificar que el vector propio asociado a ω_1 es

$$A = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con α una constante. Mientras que para el segundo valor propio, ω_2 , tenemos

$$A = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

con β otra constante. La solución final es una combinación lineal de estas soluciones

$$X(t) = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_1 t} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\omega_1 t} + \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\omega_2 t} + \beta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-i\omega_2 t}$$

lo que podemos escribir

$$X(t) = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

Pero como $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$, obtenemos

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \alpha \cos(\omega_1 t + \phi_1) + \beta \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_2(t) &= \alpha \cos(\omega_1 t + \phi_1) - \beta \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{aligned}$$

Si queremos resolver el problema genérico, podemos calcular el determinante

$$\det \begin{pmatrix} k_1 + k_2 - m_1 \Omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - m_2 \Omega^2 \end{pmatrix} = 0$$

es decir que los dos modos normales del sistema son

$$\Omega_{\pm}^2 = \frac{m_1(k_2 + k_3) + m_2(k_1 + k_2) \pm \sqrt{\Delta}}{2m_1 m_2}$$

con

$$\Delta = [m_1(k_2 + k_3) + m_2(k_1 + k_2)]^2 - 4m_1 m_2 (k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3)$$

2. Formalismo lagrangiano

2.1 El formalismo

A menudo se prefiere la mecánica lagrangiana a la newtoniana por:

- Generalización a distintos sistemas de coordenadas: El formalismo lagrangiano proporciona un marco más elegante y general que puede aplicarse a una amplia gama de sistemas de coordenadas, incluidas las coordenadas generalizadas, que a menudo son más naturales para describir ciertos sistemas (por ejemplo, las coordenadas polares para el movimiento de rotación). Esto hace que la mecánica lagrangiana sea especialmente útil en ámbitos como la mecánica celeste, donde a menudo se emplean sistemas de coordenadas no cartesianos.
- Simetría y leyes de conservación: La formulación lagrangiana de la mecánica está íntimamente ligada al principio de mínima acción, que a menudo conduce a simetrías en los sistemas físicos. Estas simetrías, a su vez, corresponden a leyes de conservación a través del teorema de Noether. Esto facilita la identificación y explotación de simetrías y principios de conservación en sistemas complejos.
- Tratamiento de restricciones: El formalismo lagrangiano es muy adecuado para tratar sistemas sujetos a restricciones o ligaduras. Las restricciones pueden incorporarse al lagrangiano mediante multiplicadores de Lagrange, lo que permite derivar ecuaciones de movimiento que satisfacen automáticamente dichas restricciones.
- Útil para la mecánica cuántica: El formalismo lagrangiano es altamente compatible con los principios de la mecánica cuántica y la teoría cuántica de campos, lo que lo convierte en el formalismo preferido de la física teórica para describir las interacciones de las partículas y los campos cuánticos.
- Elegancia y simplicidad: Desde un punto de vista puramente estético, muchos consideran que el formalismo lagrangiano es más elegante y conciso desde el punto de vista matemático que la mecánica newtoniana, sobre todo cuando se trata de sistemas complejos o espacios de mayor dimensión.

Para una fuerza conservativa, hemos visto que la fuerza puede ser expresada a partir de un potencial

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial x^i}$$

lo que nos permite escribir la ley de Newton de la forma siguiente

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial V}{\partial x^i}$$

con p_i el momento de la partícula. Queremos definir una función a partir de la cual obtener esta ley. Por eso, definimos las coordenadas generalizadas $q_i \equiv \{q_1, q_2, \dots, q_N\}$ que representan el estado de un sistema, por ejemplo $(x, y, z), (r, \theta, \phi) \dots$ y sus velocidades generalizadas $\dot{q}_i \equiv \frac{dq_i}{dt}$. A partir de lo cual se define el lagrangiano

$$L \equiv L(q_i, \dot{q}_i, t) = T(\dot{q}_i, t) - V(q_i, t)$$

con T la energía cinética y V la energía potencial. La ecuación de Euler-Lagrange es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q^i} \quad (2.1)$$

Por ejemplo, en el caso de una partícula de masa m sometida a un potencial $V(q)$, tenemos

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q)$$

lo que implica

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m \dot{q}, \quad \frac{\partial L}{\partial q} = -V'(q)$$

usando la ecuación (2.1) obtenemos

$$m \ddot{q} = -V'(q)$$

es decir la ecuación de Newton.

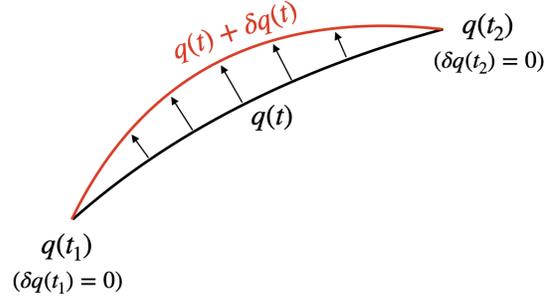
Podemos definir la acción para N partículas, como la integral del lagrangiano

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt \quad i = \{1, \dots, N\}$$

El *principio de mínima acción* (no se busca realmente el mínimo, pero solamente un extremo) nos dice que de todas las trayectorias entre $q_i(t_1)$ y $q_i(t_2)$ el sistema escoge aquella que extremiza la acción S .

Consideramos el caso de $N = 1$, es decir $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$. Si tenemos un camino $q(t)$, podemos modificarlo un poco $q(t) + \delta q(t)$ para ver si el camino era un extremo, es decir que buscamos $\delta S = 0$ donde " δ " es una pequeña variación de la acción

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0$$



con la condición de que $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ es decir que iniciamos y terminamos siempre en los mismos puntos. Son trayectorias con el mismo estado inicial y final.

$$\begin{aligned} \delta S &\simeq \int_{t_1}^{t_2} \left[L(q, \dot{q}, t) + \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right] dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \\ &\simeq \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt \end{aligned}$$

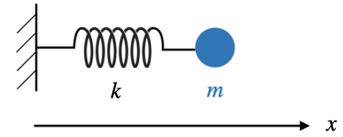
Pero como $\delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q$, se puede hacer una integración por partes

$$\begin{aligned} &\simeq \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \right] dt \\ &\simeq \int_{t_1}^{t_2} \delta q \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] dt + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2}}_{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q(t_2) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q(t_1) = 0} \\ &\simeq \int_{t_1}^{t_2} \delta q \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] dt \end{aligned}$$

El principio de mínima-acción pide que δS sea nulo para cualquier variación δq , lo que implica la ecuación de Euler-Lagrange.

2.2 Resorte

Como primer ejemplo, consideramos un resorte de constante k y una masa m . Llamamos la posición de la masa x , de lo cual definimos la energía cinética por $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ y su energía potencial $\frac{1}{2}kx^2$, lo que nos permite definir el lagrangiano



$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

lo que implica

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x}$$

y la ecuación de Euler-Lagrange (2.1) nos da

$$m\ddot{x} = -kx \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{con} \quad \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

con solución

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

2.3 Cambio de coordenadas

La ecuación de Euler-Lagrange es la misma en cualquier sistema de coordenadas. Si de las coordenadas $\{q_i\}$ pasamos a coordenadas $\{Q_i\}$ tal que $Q_i \equiv Q_i(q_1, \dots, q_N, t)$, obtenemos

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial Q_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

Para que sea un buen nuevo sistema de coordenadas, la relación entre $\{q_i, Q_i\}$ debe ser invertible es decir que debemos tener $q_i \equiv q_i(Q_1, \dots, Q_N, t)$, es decir

$$\dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \dot{Q}_j$$

Por lo tanto, como $L(q_i, \dot{q}_i, t)$, obtenemos

$$\frac{\partial L}{\partial Q_i} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_i} + \frac{\partial L}{\partial t} \underbrace{\frac{\partial t}{\partial Q_i}}_{=0}$$

el último termino es nulo porque t no depende de las coordenadas. Además podemos modificar el segundo termino usando

$$\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \right) = \frac{\partial^2 q_j}{\partial Q_i \partial t} + \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 q_j}{\partial Q_i \partial Q_k} \dot{Q}_k$$

y

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} + 0 + 0$$

Pero como,

$$\dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \dot{Q}_j \Rightarrow \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_j} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_j}$$

tenemos

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial q_j}{\partial Q_i}$$

es decir

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} \right) = \sum_{j=1}^N \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 q_j}{\partial t \partial Q_i} + \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 q_j}{\partial Q_k \partial Q_i} \dot{Q}_k \right)}_{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \right)} \right]$$

lo que nos permite encontrar

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial Q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} \right) &= \sum_{j=1}^N \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \left[\frac{\partial^2 q_j}{\partial Q_i \partial t} + \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 q_j}{\partial Q_i \partial Q_k} \dot{Q}_k \right] \\
&\quad - \sum_{j=1}^N \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{\partial^2 q_j}{\partial t \partial Q_i} + \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 q_j}{\partial Q_k \partial Q_i} \dot{Q}_k \right) \right] \\
&= \sum_{j=1}^N \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \frac{\partial q_j}{\partial Q_i}
\end{aligned}$$

Lo que nos permite concluir que si

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial Q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j} \right) = 0$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange guardan la misma forma en todos los sistemas de referencia, no solamente inerciales.

2.4 Sistema de referencia en rotación

Queremos estudiar una partícula libre en un sistema de referencia en rotación. En las coordenadas cartesianas

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

Consideramos un sistema de coordenadas (x', y', z') en rotación a velocidad angular constante alrededor del eje z , es decir

$$\begin{cases} x' = x \cos(\omega t) + y \sin(\omega t) \\ y' = -x \sin(\omega t) + y \cos(\omega t) \\ z' = z \end{cases}$$

o al revés

$$\begin{cases} x = x' \cos(\omega t) - y' \sin(\omega t) \\ y = x' \sin(\omega t) + y' \cos(\omega t) \\ z = z' \end{cases}$$

lo que implica

$$\begin{aligned}
\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 &= [\dot{x}' \cos(\omega t) - \dot{y}' \sin(\omega t) - \omega x' \sin(\omega t) - \omega y' \cos(\omega t)]^2 \\
&\quad + [\dot{x}' \sin(\omega t) + \dot{y}' \cos(\omega t) + \omega x' \cos(\omega t) - \omega y' \sin(\omega t)]^2 + \dot{z}'^2 \\
&= \dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \omega^2 x'^2 + \omega^2 y'^2 - 2\omega \dot{x}' y' + 2\omega \dot{y}' x' + \dot{z}'^2 \\
&= (\dot{x}' - \omega y')^2 + (\dot{y}' + \omega x')^2 + \dot{z}'^2
\end{aligned}$$

En conclusión en este sistema de coordenadas, el lagrangiano se escribe

$$L = \frac{1}{2}m \left[(\dot{x}' - \omega y')^2 + (\dot{y}' + \omega x')^2 + \dot{z}'^2 \right]$$

Pero como las ecuaciones de Lagrange no cambian de forma, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x'} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}'} \right) \Rightarrow m\omega (\dot{y}' + \omega x') = m \frac{d}{dt} (\dot{x}' - \omega y') \\ &\Rightarrow \ddot{x}' - 2\omega \dot{y}' - \omega^2 x' = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y'} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}'} \right) \Rightarrow -m\omega (\dot{x}' - \omega y') = m \frac{d}{dt} (\dot{y}' + \omega x') \\ &\Rightarrow \ddot{y}' + 2\omega \dot{x}' - \omega^2 y' = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z'} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}'} \right) \Rightarrow m \frac{d}{dt} \dot{z}' = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{z}' = 0 \end{aligned}$$

Lo que corresponde a las ecuaciones de Newton con fuerzas ficticias. Es decir que podemos reescribir nuestras ecuaciones de la forma siguiente

$$\ddot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' = 0, \quad \text{con } \vec{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

El segunda término está relacionado a la fuerza de Coriolis mientras que el tercero a la fuerza centrífuga. Está ecuación podía ser obtenida directamente a partir del lagrangiano. De hecho podemos ver que

$$L = \frac{1}{2}m \left[(\dot{x}' - \omega y')^2 + (\dot{y}' + \omega x')^2 + \dot{z}'^2 \right] = \frac{1}{2}m \left(\dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' \right)^2$$

Por un lado, tenemos

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}'} = m \left(\dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' \right)$$

y nos falta calcular $\frac{\partial L}{\partial \vec{r}'}$ o en componente $\frac{\partial L}{\partial r'_p}$

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m \left(\dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' \right)^2 = \frac{1}{2}m \sum_i \left(\dot{r}'_i + (\vec{\omega} \times \vec{r}')_i \right) \left(\dot{r}'_i + (\vec{\omega} \times \vec{r}')_i \right) \\ &= \frac{1}{2}m \left(\dot{r}'_i + (\vec{\omega} \times \vec{r}')_i \right) \left(\dot{r}'_i + (\vec{\omega} \times \vec{r}')_i \right), \quad \text{notación de Einstein} \\ &= \frac{1}{2}m \left(\dot{r}'_i + \varepsilon_{ijk} \omega_j r'_k \right) \left(\dot{r}'_i + \varepsilon_{ilm} \omega_l r'_m \right) \end{aligned}$$

En la notación de Einstein, se suma sobre los índices repetidos

$$\sum_i a_i b_i c_j \equiv a_i b_i c_j, \text{ el índice } j \text{ no es sumado}$$

Obtenemos

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}'_p} = m \varepsilon_{ijp} \omega_j (\dot{r}'_i + \varepsilon_{ilm} \omega_l r'_m) = m \left[(\dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}') \times \vec{\omega} \right]_p$$

es decir

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}'_p} &= m \left(\dot{\vec{r}}' \times \vec{\omega} + (\vec{\omega} \times \vec{r}') \times \vec{\omega} \right) \\ &= -m \left(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \right) \end{aligned}$$

Lo que nos da

$$\frac{d}{dt} \left[m \left(\dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' \right) \right] = m \left[-\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \right]$$

y finalmente

$$m \left[\ddot{\vec{r}}' + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \right] = \vec{0}$$

2.5 Unicidad del lagrangiano

El lagrangiano no es único, de hecho podemos siempre agregar la derivada total con respecto al tiempo de una función sin cambiar las ecuaciones de movimiento

$$L' = L + \frac{d}{dt} f(q, t)$$

con f una función cualquiera.

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L' dt = S + \int_{t_1}^{t_2} \frac{df(a, t)}{dt} dt = S + f(q(t_2), t_2) - f(q(t_1), t_1) = S + \text{constante}$$

lo que implica trivialmente que $\delta S' = \delta S$. Lo podemos demostrar también al nivel de las ecuaciones

$$\frac{\partial L'}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{d}{dt} f \right) - \frac{d}{dt} \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} \right] \right)}_{\substack{=0 \\ \partial f / \partial q}}$$

De forma similar $L' = \alpha L$ con α constante, permite obtener las mismas ecuaciones.

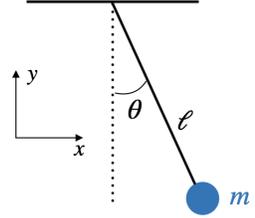
2.6 Multiplicadores de Lagrange

En algunas situaciones, existen ecuaciones de ligadura, por ejemplo en el caso de un movimiento circular, (x, y) no son libre, tenemos la restricción $x^2 + y^2 = c^{ste}$ o de forma genérica $f(x, y) = 0$ con $f(x, y) = x^2 + y^2 - c^{ste}$ en este caso. Las ecuaciones de ligadura de tipo $f(q_i, t) = 0$ se llaman ligadura holonómica aunque las ecuaciones de tipo $f(q_i, \dot{q}_i, t) = 0$ o ecuaciones de tipo $f(q_i, t) \geq 0$ se llaman no holonómicas.

Vamos a estudiar solamente el caso de ligaduras holonómicas. Si tenemos un sistema con N variables $\{q_i\}$ $i = 1 \dots N$ y P ligaduras $f_j(q_i, t) = 0$ con $j = 1 \dots P$, se dice que el sistema tiene $N - P$ grados de libertad.

En el caso presentado en el dibujo, tenemos dos variables (x, y) y una ligadura $x^2 + y^2 - \ell^2 = 0$ es decir que hay un grado de libertad.

En el caso de las ligaduras holonómicas, se puede satisfacer la restricción con un cambio de variable. Por ejemplo, en el caso previo, podemos considerar $y = -\ell \cos \theta$, $x = \ell \sin \theta$ (con θ el único grado de libertad). El lagrangiano es $L = T - V$, con



$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$$

$$V = mgy = -mg\ell \cos \theta$$

es decir

$$L = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell \cos \theta$$

lo que nos da

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg\ell \sin \theta, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\ell^2\dot{\theta}$$

y finalmente

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0$$

En este caso, fue fácil imaginar nuevas variables (θ) que cumple con esta ligadura. Pero imaginamos que la ecuación de ligadura es complicada y no podemos hacer un cambio de variable simple que nos resuelve la ecuación $f(x, y) = 0$. Por ejemplo si tenemos $x^{10} + x^3/y + xy^3 - 2 = 0$. En estos casos, existe una metodología (que no existe en el formalismo de Newton).

Se introducen multiplicadores de Lagrange $\{\lambda_i\}$. Si tenemos p ligaduras, $f_j(q_i, t)$, se introducen p multiplicadores de Lagrange y se define un nuevo lagrangiano

$$L' = L(q_i, \dot{q}_i, t) + \sum_{j=1}^p \lambda_j f_j(q_i, t)$$

Los $\{\lambda_j\}$ se consideran como nuevas variables, es decir

$$L' \equiv L'(q_i, \dot{q}_i, \lambda_i, t)$$

Por lo tanto, podemos hacer la variación con respecto a $\{q_i\}$ y $\{\lambda_i\}$. La variación con respecto a λ_i , nos da

$$\frac{\partial L'}{\partial \lambda_i} = f_i(q, t), \quad \frac{\partial L'}{\partial \dot{\lambda}_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad f_i(q, t) = 0$$

hemos por lo tanto recuperado la ecuación de ligadura, mientras que la variación con respecto a $\{q_i\}$ es

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{\partial L'}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i}$$

lo que nos da la nueva ecuación

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i} = 0$$

Como ejemplo, podemos estudiar de nuevo el péndulo simple, tenemos

$$L' = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy + \lambda(x^2 + y^2 - \ell^2)$$

de lo cual obtenemos

$$x^2 + y^2 - \ell^2 = 0 \tag{2.2}$$

$$m\ddot{x} - 2\lambda x = 0 \tag{2.3}$$

$$m\ddot{y} + mg - 2\lambda y = 0 \tag{2.4}$$

Queremos eliminar λ , por eso combinamos (2.3). x + (2.4). y

$$\lambda = \frac{m(x\ddot{x} + y\ddot{y} + gy)}{2\ell^2}$$

Pero tomando dos derivadas de la ecuación de ligadura, tenemos

$$x\ddot{x} + y\ddot{y} + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{m(gy - \dot{x}^2 - \dot{y}^2)}{2\ell^2}$$

y finalmente

$$\begin{cases} \ddot{x} - \frac{x}{\ell^2}(gy - \dot{x}^2 - \dot{y}^2) = 0 \\ \ddot{y} + g - \frac{y}{\ell^2}(gy - \dot{x}^2 - \dot{y}^2) = 0 \end{cases}$$

es decir las mismas ecuaciones pero en coordenadas cartesianas. De hecho si consideramos $x = \ell \sin \theta$ y $y = -\ell \cos \theta$, tendríamos

$$\ell \ddot{\theta} \cos \theta - \ell \dot{\theta}^2 \sin \theta - \frac{\ell \sin \theta}{\ell^2} \left(-g\ell \cos \theta - \ell^2 \dot{\theta}^2 \right) = 0$$

o

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0$$

A partir de las ecuaciones (2.3,2.4) podemos identificar una fuerza de tipo

$$2\lambda x \vec{e}_x + 2\lambda y \vec{e}_y = 2\lambda r \vec{e}_r$$

lo que corresponde a la fuerza de tensión del hilo quién es el origen de la ligadura.

Para terminar esta sección, consideramos el caso de un lagrangiano que no depende de una coordenada, por ejemplo q_2 , $L = L(q_1, q_3, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N, t)$. En este caso q_2 se llama una variable cíclica. La ecuación de movimiento por esta variable es simple

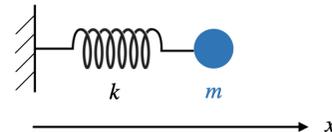
$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) = 0$$

lo que implica una integral de movimiento

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = C^{\text{ste}}$$

2.7 Teorema de Noether

En varias situaciones, tenemos cantidades conservadas, por ejemplo para un resorte por lo cual la ecuación de movimiento es $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$, la energía es conservada $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$. De hecho



$$\frac{dE}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = -kx\dot{x} + kx\dot{x} = 0$$

Esta cantidad conservada (E) es relacionada a una simetría del lagrangiano, $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$. El lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, es decir que $L(t + \delta t) = L(t)$ es una simetría.

Es el punto central de este teorema. Por lo tanto, si se observa en la naturaleza una cantidad conservada (energía, carga, momento, ...) sabemos que el lagrangiano debe ser construido con esta simetría.

Consideramos una familia de aplicaciones

$$q_i(t) \mapsto Q_i(\alpha, t) \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \text{con} \quad Q_i(0, t) = q_i(t)$$

tal que sea una simetría **continua** del lagrangiano, es decir que

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} L \left(Q_i(\alpha, t), \dot{Q}_i(\alpha, t), t \right) = 0$$

el lagrangiano no cambia cuando α cambia. En este caso el teorema de Noether implica que

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial Q_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \text{ es constante}$$

De hecho

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} \frac{\partial \dot{Q}_i}{\partial \alpha} \right]$$

pero como $\frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0$, tenemos $\frac{\partial L}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = 0$, lo que implica

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial L}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} \frac{\partial \dot{Q}_i}{\partial \alpha} \right] \Big|_{\alpha=0} = \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{Q}_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \right] \\ &= \sum_i \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial Q_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{Q}_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \right] \\ &= \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial Q_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \right) \end{aligned}$$

es decir

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial Q_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = C^{\text{ste}}$$

Podemos generalizar un poco el teorema, no necesitamos que

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} L \left(Q_i(\alpha, t), \dot{Q}_i(\alpha, t), t \right) = 0$$

pero solamente que

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} L \left(Q_i(\alpha, t), \dot{Q}_i(\alpha, t), t \right) = \frac{dG}{dt}$$

ya que una derivada total no cambia el problema lo que implica

$$\frac{dG}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \frac{\partial Q_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \right)$$

es decir que

$$Q = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial Q_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} - G$$

es constante. Q se llama la carga de Noether.

2.7.1 homogeneidad del espacio

Consideramos el caso de un espacio homogéneo, y un sistema de N partículas interactuando, descrito por el lagrangiano

$$L = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$$

Este lagrangiano es claramente invariante bajo traslaciones

$$\vec{r}_i \mapsto \vec{r}_i + \alpha \vec{n}, \quad \text{con } \vec{n} \text{ un vector}$$

es decir que tenemos $\vec{Q}_i = \vec{r}_i + \alpha \vec{n}$. Podemos fácilmente verificar que

$$L(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t) = L(\vec{r}_i + \alpha \vec{n}, \dot{\vec{r}}_i, t)$$

es decir que la carga de Noether es

$$Q = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \frac{\partial \vec{Q}_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \sum_i m \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{n} = \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{n}$$

es decir que el momento total en la dirección \vec{n} es conservado, pero como \vec{n} es cualquier dirección, el momento total es conservado. En conclusión, la homogeneidad del espacio implica la invarianza por traslación de L es decir la conservación del momento lineal total.

2.7.2 Isotropía del espacio

La isotropía del espacio, significa que tenemos invarianza por rotación del lagrangiano. Como la carga se calcula con $\frac{\partial Q_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}$ podemos considerar solamente una rotación de ángulo pequeño (α as el ángulo)

Cuando hacemos una rotación alrededor de un eje \vec{n} de ángulo infinitesimal α , el vector cambia $\vec{r}_i \mapsto \vec{r}_i + \alpha \vec{n} \times \vec{r}_i$. Por ejemplo, para una rotación de ángulo α y eje $\vec{n} = \vec{e}_z$, tenemos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

es decir

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \\ z' = z \end{cases}$$

o para $\alpha \ll 1$

$$\begin{cases} x' = x - \alpha y = x + \alpha (\vec{e}_z \times \vec{r})_x \\ y' = y + \alpha x = y + \alpha (\vec{e}_z \times \vec{r})_y \\ z' = z = z + \alpha (\vec{e}_z \times \vec{r})_z \end{cases}$$

Por lo tanto, para un lagrangiano que tiene esta simetría, tenemos

$$Q_i = \vec{r}_i + \alpha \vec{n} \times \vec{r}_i \Rightarrow Q = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot (\vec{n} \times \vec{r}_i) \text{ es constante}$$

pero como $\vec{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i}$, obtenemos

$$Q = \sum_i \vec{p}_i \cdot (\vec{n} \times \vec{r}_i) = \sum_i \vec{n} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \vec{n} \cdot \vec{L}$$

con \vec{L} el momento angular. Como \vec{n} es cualquier, tenemos conservación del momento angular total. En conclusión, la isotropía del espacio implica la invarianza por rotación de L y por lo tanto la conservación del momento angular total.

2.7.3 Homogeneidad en el tiempo

Para terminar, consideramos la homogeneidad en el tiempo, es decir que consideramos que $t \mapsto t + \alpha$ no cambia nuestro lagrangiano. Para pequeñas traslaciones en el tiempo, obtenemos

$$\begin{aligned} q_i(t) &\mapsto q_i(t + \alpha) \simeq q_i(t) + \alpha \dot{q}_i \equiv Q_i(\alpha, t) \\ \text{y } \dot{q}_i(t) &\mapsto \dot{q}_i(t + \alpha) \simeq \dot{q}_i(t) + \alpha \ddot{q}_i \end{aligned}$$

lo que implica que nuestro lagrangiano cambia de la forma siguiente

$$\begin{aligned} L(q_i, \dot{q}_i, t) &\mapsto L(q_i + \alpha \dot{q}_i, \dot{q}_i + \alpha \ddot{q}_i, t + \alpha) \\ &\mapsto L(q_i, \dot{q}_i, t) + \alpha \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial q_i} + \alpha \ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \alpha \frac{\partial L}{\partial t} \\ &\mapsto L(q_i, \dot{q}_i, t) + \alpha \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial q_i} + \alpha \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \alpha \dot{q}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \alpha \frac{\partial L}{\partial t} \\ &\mapsto L(q_i, \dot{q}_i, t) + \alpha \dot{q}_i \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right)}_{=0} + \alpha \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \alpha \frac{\partial L}{\partial t} \\ &\mapsto L(q_i, \dot{q}_i, t) + \alpha \frac{dL}{dt} \end{aligned}$$

es decir

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = \frac{dL}{dt}$$

Lo que implica que la carga conservada es

$$Q = \sum_i \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial Q_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} - L$$

lo que corresponde a la energía. Por ejemplo, si $L = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - \frac{1}{2}kx^2$, tenemos

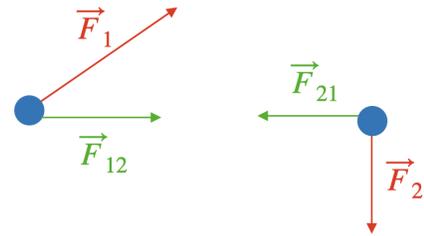
$$Q = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \cdot \vec{v} - L = m\vec{v}^2 - \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

⚠ El teorema de Noether no aplica a simetrías **discretas** como por ejemplo la simetría de reflexión $\vec{r}_i \mapsto -\vec{r}_i$

2.8 Problema de dos cuerpos

Queremos estudiar un problema de dos cuerpos con un potencial de interacción proporcional a la distancia entre estos cuerpos. Sobre cada una de estas partículas actúan las fuerzas exteriores al sistema y las fuerzas de interacción mutua entre las partículas del sistema.

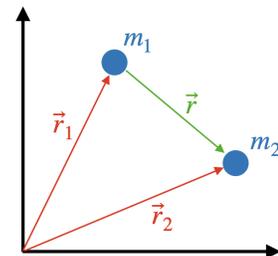
$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}_1}{dt} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_{12} \\ \frac{d\vec{p}_2}{dt} &= \vec{F}_2 + \vec{F}_{21} = \vec{F}_2 - \vec{F}_{12} \\ \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \equiv \frac{d\vec{p}}{dt} \end{aligned}$$



donde \vec{p} es el momento lineal total del sistema y $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_{\text{ext}}$ es la resultante de las fuerzas exteriores. El movimiento del sistema de partículas viene determinado solamente por las fuerzas exteriores. Nosotros, estudiaremos un sistema aislado es decir cuando $\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$ o $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$.

Sea $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ el vector entre las dos partículas, es una coordenada conveniente para nuestro estudio además de la posición del centro de masa

$$\begin{aligned} \vec{r}_{\text{CM}} &= \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \\ \vec{r} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \end{aligned}$$



en términos de las cuales las coordenadas originales se escriben

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \vec{r}_{\text{CM}} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \\ \vec{r}_2 &= \vec{r}_{\text{CM}} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}\end{aligned}$$

lo que implica

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = (m_1 + m_2) \ddot{\vec{r}}_{\text{CM}} = \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$$

En ausencia de fuerzas externas, el centro de masa se moverá a velocidad constante, por esa razón es un sistema de coordenadas interesante.

El lagrangiano del sistema se define por

$$\begin{aligned}L &= \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^2 - U(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) \\ &= \frac{1}{2} m_1 \left[\dot{\vec{r}}_{\text{CM}} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} \right]^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[\dot{\vec{r}}_{\text{CM}} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} \right]^2 - U(r) \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\vec{r}}_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}}^2 - U(r)\end{aligned}$$

Observamos que la energía cinética (T) es la suma de la energía cinética del movimiento del centro de masa más la energía cinética del movimiento en torno al centro de masa (T').

$$T' = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2'^2 \quad \text{con} \quad \vec{r}_1' = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad \text{y} \quad \vec{r}_2' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

Definiendo la masa total del sistema, $M = m_1 + m_2$ y la masa reducida $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ (o $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$) obtenemos

$$L = \frac{1}{2} M \dot{\vec{r}}_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - U(r)$$

Los seis grados de libertad (tres para \vec{r}_1 y tres para \vec{r}_2) se describen mediante las componentes de los vectores \vec{r} y \vec{r}_{CM} . Pero las componentes de \vec{r}_{CM} son coordenadas cíclicas

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_{\text{CM}}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad M \dot{\vec{r}}_{\text{CM}} = \text{constante}$$

El centro de masa se moverá con velocidad constante (no hay fuerzas externas) y es entonces posible describir el movimiento con respecto a un sistema inercial en el cual el

centro de masa es el centro, es decir $\vec{r}_{\text{CM}} = \vec{0}$. En consecuencia de lo cual, el lagrangiano se reduce a

$$L = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - U(r)$$

es decir que hemos reducido el problema de dos cuerpos a un problema de un cuerpo equivalente de masa μ en el campo central $U(r)$. Una vez que se ha obtenido \vec{r} , podemos obtener los movimientos individuales con ($r_{\text{CM}} = \vec{0}$)

$$\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}$$

Tenemos con este lagrangiano, varias simetrías y por lo tanto cantidades conservadas. Como la energía potencial sólo depende de la distancia de la partícula al centro de fuerzas, y no de la orientación, este sistema posee simetría esférica, lo que implica que el momento angular del sistema es conservado

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \text{constante}$$

Eso implica que el vector que une a las dos partículas, \vec{r} , permanece siempre en un plano normal a \vec{L} . Es decir que nuestro problema es planar y por lo tanto se reduce a dos dimensiones (espacio ortogonal a \vec{L}). Podemos usar las coordenadas polares, $\vec{r} = r\vec{e}_r$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r \\ &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \\ \dot{\vec{r}}^2 &= \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

El lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - U(r) \quad (2.5)$$

Veamos que θ es una coordenada cíclica $p_\theta \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \text{constante} = \mu r^2 \dot{\theta}$, es el momento angular del sistema. Podemos escribir $\mu r^2 \dot{\theta} = \ell$, con ℓ la norma del vector momento angular. De forma trivial, $\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$ es conservado. Es la velocidad areolar área barrida por el vector de posición por unidad de tiempo.

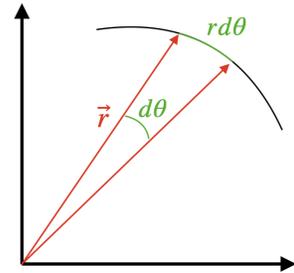
El área barrida en un tiempo dt es

$$dA = \frac{1}{2}r(rd\theta) = \frac{1}{2}r^2 d\theta$$

lo que implica

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \text{constante}$$

Es conocido como la segunda ley de Kepler (1609)



"El radio vector que une un planeta y el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales"

Nosotros, hemos encontrado que esta ley existe para cualquier potencial $U(r)$ y no solamente para el potencial de interacción entre un planeta y el Sol ($U \propto 1/r$).

La variación del lagrangiano (2.5) con respecto a las dos coordenadas (r, θ) nos da

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= \frac{\partial L}{\partial r} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{\partial L}{\partial \theta}\end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned}\mu \ddot{r} &= \mu r \dot{\theta}^2 - U'(r) \\ \mu r^2 \dot{\theta} &= \ell\end{aligned}$$

lo que podemos reducir a una sola ecuación

$$\mu \ddot{r} = \frac{\ell^2}{\mu r^3} - U'(r)$$

Veamos que el problema de dos cuerpos, puede ser reducido de forma genérica a un problema en una sola dimensión. Podemos interpretar esta ecuación como el movimiento de una partícula de masa μ en el potencial efectivo

$$\begin{aligned}U_{\text{ef}}(r) &= U(r) + \frac{\ell^2}{2\mu r^2} \\ \mu \ddot{r} &= -U'_{\text{ef}}(r)\end{aligned}$$

2.8.1 Problema de Kepler

Queremos estudiar el problema anterior en el caso de una fuerza de gravitacional entre un planeta y el Sol, en este caso

$$U(r) = -\frac{k}{r}$$

con k una constante que depende de la masa del Sol y del planeta, $k = GMm$

$$\mu \ddot{r} = \frac{\ell^2}{\mu r^3} - \frac{k}{r^2} \quad (2.6)$$

Para muchos problemas de este tipo es más interesante estudiar $r(\theta)$ en vez de $r(r)$. Haciendo este cambio de variable, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} r'(\theta) = \frac{\ell}{\mu r^2} r'(\theta) \\ \frac{d^2r}{dt^2} &= \frac{\ell^2}{\mu^2 r^2} \left(\frac{r''(\theta)}{r(\theta)^2} - 2 \frac{r'(\theta)^2}{r(\theta)^3} \right)\end{aligned}$$

lo que transforma la ec.(2.6)

$$\frac{r''(\theta)}{r(\theta)^2} - 2\frac{r'(\theta)^2}{r(\theta)^3} = \frac{1}{r} - \frac{k\mu}{\ell^2}$$

el problema es aún más interesante si usamos la variable $u = 1/r$

$$u''(\theta) + u(\theta) - \frac{k\mu}{\ell^2} = 0$$

cuya solución es

$$u(\theta) = \frac{k\mu}{\ell^2} + A \cos(\theta - \theta_0) \equiv \frac{k\mu}{\ell^2} (1 + e \cos(\theta - \theta_0))$$

con $e = A\ell^2/\mu k$ una constante, lo que implica

$$r(\theta) = \frac{\ell^2/k\mu}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}$$

La constante θ_0 corresponde solamente al ángulo desde cuando empezamos a medir nuestro ángulo θ , por lo tanto lo podemos fijar a $\theta_0 = 0$. También podemos ver que si tomamos $\theta_0 = \pi$, es similar al reemplazo $e \rightarrow -e$. Por lo tanto, podemos considerar $e \geq 0$. Aparecen 4 casos

- $e = 0$, en este caso la trayectoria es circular $r(\theta) = \frac{\ell^2}{k\mu}$
- $0 < e < 1$, la trayectoria es un elipse, en este caso e se llama la excentricidad.
- $e = 1$, la trayectoria no es acotada, tenemos una parábola.
- $e > 1$, la trayectoria es una hipérbola.

En el caso de un elipse, sabemos que $\dot{\theta} = \ell/\mu r^2$, es decir

$$\dot{\theta} = \frac{k^2\mu}{\ell^3}(1 + e \cos \theta)^2$$

lo que implica que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2} = \frac{k^2\mu}{\ell^3} \int dt = \frac{k^2\mu}{\ell^3} T$$

con T el periodo de nuestro movimiento. Como

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2} = \frac{2\pi}{(1 - e^2)^{3/2}}$$

obtenemos

$$T = \frac{\ell^3}{k^2\mu} \frac{2\pi}{(1 - e^2)^{3/2}}$$

pero sabemos que el semieje mayor, a , es obtenido con la relación $2a = r(\theta = 0) + r(\theta = \pi)$, es decir

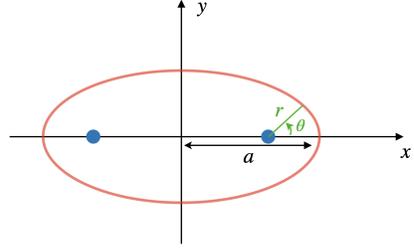
$$a = \frac{\ell^2/k\mu}{1 - e^2}$$

lo que nos permite concluir que

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}}a^{3/2} \Leftrightarrow T^2 = 4\pi^2\frac{\mu}{k}a^3$$

es decir la tercera ley de Kepler (1618)

Para cualquier planeta, el cuadrado de su periodo orbital es directamente proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de su órbita elíptica.



2.9 Sistema de referencia no inercial

Consideramos dos sistemas de referencia, (I) un sistema inercial y (M) un sistema en rotación alrededor de un eje común entre (I) y (M) , en este caso el eje \hat{z} .

Se define la *velocidad angular* $\vec{\omega} = \dot{\phi}\vec{e}_z$. Este vector mide el cambio del ángulo $\phi(t)$ con una dirección definida por la regla de la mano derecha.

Un vector \vec{r} , fijo en (M) , se desplaza en (I) por la rotación. Para un desplazamiento infinitesimal $d\phi$, el vector se transforma en $\vec{r} + d\vec{r}$ con $dr = r \sin \theta d\phi$ y una dirección indicada en el gráfico. $d\vec{r}$ es ortogonal al plano $(\vec{\omega}, \vec{r})$

$$d\vec{r} = d\vec{\phi} \times \vec{r}, \quad \text{con} \quad d\vec{\phi} = d\phi\vec{e}_z$$

De hecho,

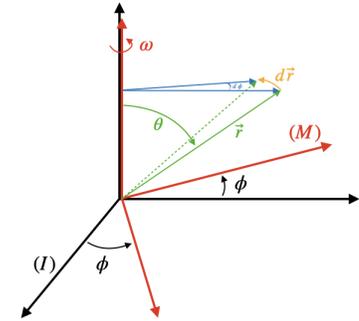
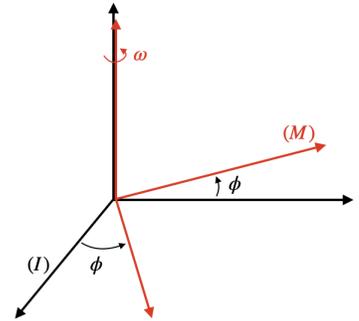
$$\begin{aligned} d\vec{\phi} \times \vec{r} &= d\phi\vec{e}_z \times \left(r \cos \theta \vec{e}_z + r \sin \theta \cos \phi \vec{e}_x + r \sin \theta \sin \phi \vec{e}_y \right) \\ &= r \sin \theta d\phi \underbrace{(\cos \phi \vec{e}_y - \sin \phi \vec{e}_x)}_{\text{ortogonal a } \vec{\omega} \text{ y } \vec{r}} \end{aligned}$$

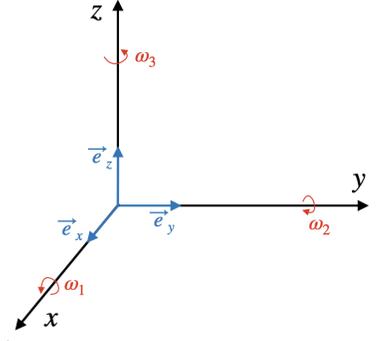
De esta relación, concluimos que

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{\text{fijo}} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad \text{con} \quad \vec{\omega} \equiv \dot{\phi}\vec{e}_z$$

De manera mas genérica, consideramos el caso con

$$\vec{\omega} = \omega_1\vec{e}_x + \omega_2\vec{e}_y + \omega_3\vec{e}_z$$





Estudiamos primero el efecto de la rotación $\vec{\omega}_1$ sobre los vectores unitarios. Obviamente, en este caso, \vec{e}_x no cambia. El vector \vec{e}_y cambia de $d\vec{e}_y$ lo que corresponde a una rotación de ángulo $d\theta_1$, ($\vec{\omega}_1 = \dot{\theta}_1 \vec{e}_x$).

$$\begin{aligned}\vec{e}_y + d\vec{e}_y &= \cos(d\theta_1) \vec{e}_y + \sin(d\theta_1) \vec{e}_z \simeq \vec{e}_y + d\theta_1 \vec{e}_z \\ \Rightarrow d\vec{e}_y &= d\theta_1 \vec{e}_z \\ \vec{e}_z + d\vec{e}_z &= -\sin(d\theta_1) \vec{e}_y + \cos(d\theta_1) \vec{e}_z \simeq -d\theta_1 \vec{e}_y + \vec{e}_z \\ \Rightarrow d\vec{e}_z &= -d\theta_1 \vec{e}_y\end{aligned}$$

De manera similar, considerando una rotación por $\vec{\omega}_2 = \dot{\theta}_2 \vec{e}_y$. El vector \vec{e}_y no cambia mientras que el vector \vec{e}_x se transforma en

$$\begin{aligned}\vec{e}_x + d\vec{e}_x &= -\sin(d\theta_2) \vec{e}_z + \cos(d\theta_2) \vec{e}_x \\ \Rightarrow d\vec{e}_x &= -d\theta_2 \vec{e}_z \\ \vec{e}_z + d\vec{e}_z &= \cos(d\theta_2) \vec{e}_z + \sin(d\theta_2) \vec{e}_x \\ \Rightarrow d\vec{e}_z &= d\theta_2 \vec{e}_x\end{aligned}$$

Finalmente considerando la rotación con respecto a $\vec{\omega}_3$, tenemos

$$\begin{aligned}d\vec{e}_x &= d\theta_3 \vec{e}_y \\ d\vec{e}_y &= -d\theta_3 \vec{e}_x\end{aligned}$$

Considerando el efecto infinitesimal, de las tres rotaciones, tenemos

$$\begin{cases} d\vec{e}_x = d\theta_3 \vec{e}_y - d\theta_2 \vec{e}_z \\ d\vec{e}_y = d\theta_1 \vec{e}_z - d\theta_3 \vec{e}_x \\ d\vec{e}_z = d\theta_2 \vec{e}_x - d\theta_1 \vec{e}_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\vec{e}}_x = \omega_3 \vec{e}_y - \omega_2 \vec{e}_z \\ \dot{\vec{e}}_y = \omega_1 \vec{e}_z - \omega_3 \vec{e}_x \\ \dot{\vec{e}}_z = \omega_2 \vec{e}_x - \omega_1 \vec{e}_y \end{cases}$$

es decir

$$\frac{d\vec{e}_i}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e}_i, \quad \text{con } i = \{x, y, z\}$$

Consideramos ahora un vector $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$, en un sistema de referencia no inercial, es decir que $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ son los vectores unitarios de este sistema de referencia. Queremos conocer su variación en el sistema de referencia fijo (inercial)

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{\text{fijo}} &= \underbrace{\frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z}_{\text{velocidad en el sistema de referencia en rotación}} + \underbrace{x\frac{d\vec{e}_x}{dt} + y\frac{d\vec{e}_y}{dt} + z\frac{d\vec{e}_z}{dt}}_{\vec{\omega} \times \vec{r}} \\ &\equiv \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{\text{rotación}}\end{aligned}$$

es decir

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{\text{fijo}} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{\text{rotación}} + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (2.7)$$

Aunque hemos obtenido esta relación para el vector posición \vec{r} , es válida para cualquier vector \vec{Q}

$$\left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_{\text{fijo}} = \left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_{\text{rotación}} + \vec{\omega} \times \vec{Q}$$

En particular, si consideramos $\vec{Q} = \vec{\omega}$, tenemos

$$\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{\text{fijo}} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{\text{rotación}}$$

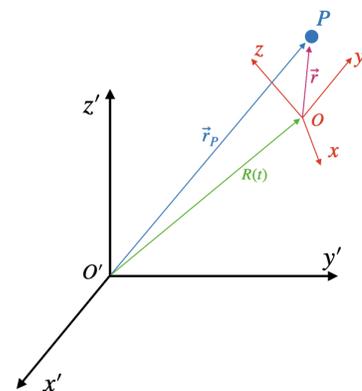
Es decir que la aceleración angular $\dot{\vec{\omega}}$ es la misma en ambos sistemas de referencia.

Ahora consideramos dos sistemas de referencias sin centro O en común, con $(\mathcal{R}') = (O'x'y'z')$ un sistema de referencia inercial aunque $(\mathcal{R}) = (Oxyz)$ no es inercial. De $\vec{r}_P = \vec{R}(t) + \vec{r}$, obtenemos

$$\left(\frac{d\vec{r}_P}{dt}\right)_{\text{fijo}} = \left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_{\text{fijo}} + \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{\text{fijo}}$$

pero

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{\text{fijo}} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{\text{rotación}} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$



lo que implica

$$\left(\frac{d\vec{r}_P}{dt}\right)_{\text{fijo}} = \left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_{\text{fijo}} + \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{\text{rotación}} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Definimos

- $\vec{v}_P \equiv \left(\frac{d\vec{r}_P}{dt}\right)_{\text{fijo}}$, la velocidad de P en (\mathcal{R}')
- $\vec{v} \equiv \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{\text{rotación}}$, la velocidad de P en (\mathcal{R})
- $\vec{V}(t) \equiv \left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_{\text{fijo}}$, la velocidad de O en (\mathcal{R})

es decir

$$\vec{v}_P = \vec{V}(t) + \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Con esta relación podemos ahora armar el lagrangiano. En el sistema inercial (\mathcal{R}'), tenemos $L = \frac{1}{2}m\vec{v}_P^2 - U$ para una partícula con masa m , velocidad \vec{v}_P y bajo un potencial U . Sabemos que $\vec{v}_P = \vec{V}(t) + \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r}$ con $\vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r} \equiv \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{\text{fijo}}$, es decir

$$\vec{v}_P^2 = \vec{V}(t)^2 + \vec{v}^2 + (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 + 2\vec{V}(t) \cdot \underbrace{(\vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r})}_{\equiv \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{\text{fijo}}} + 2\vec{v} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

lo que nos permite obtener

$$L = \underbrace{\frac{1}{2}m\vec{V}(t)^2}_{\equiv \frac{dF(t)}{dt}} + \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + \frac{1}{2}m(\vec{\omega} \times \vec{r})^2 + \underbrace{m\vec{V}(t) \cdot \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{\text{fijo}}}_{\frac{d}{dt}(m\vec{V}(t) \cdot \vec{r}) - \underbrace{\frac{d\vec{V}(t)}{dt} \cdot \vec{r}}_{\equiv \vec{A}(t)}}} + m\vec{v} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) - U$$

El primero termino depende solamente del tiempo y es conocido, por lo tanto se puede escribir usando una cierta función, como $F'(t)$.

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + \frac{1}{2}m(\vec{\omega} \times \vec{r})^2 + m\vec{v} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) - m\vec{r} \cdot \vec{A}(t) - U + \underbrace{\frac{d}{dt}[F(t) + m\vec{V}(t) \cdot \vec{r}]}_{\text{puede ser eliminado}} \\ &= \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + \frac{1}{2}m(\vec{\omega} \times \vec{r})^2 + m\vec{v} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) - m\vec{r} \cdot \vec{A}(t) - U \\ &\equiv L(\vec{r}, \vec{v}, t) \end{aligned}$$

Sabemos que la ecuación de Euler-Lagrange es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}$$

Obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} &= m\vec{v} + m\vec{\omega} \times \vec{r} \\ \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \right) &= m\vec{a} + m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + m\vec{\omega} \times \vec{v} \end{aligned}$$

Para calcular $\frac{\partial L}{\partial \vec{r}}$, tenemos que usar las formulas

$$\begin{aligned} (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 &= \vec{\omega}^2 \vec{r}^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r})^2 \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \vec{r}} (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 &= 2\vec{\omega}^2 \vec{r} - 2(\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{\omega} \end{aligned}$$

también tenemos $\vec{v} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{\omega})$ lo que implica

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} (\vec{v} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r})) = \vec{v} \times \vec{\omega}$$

es decir

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = m\vec{\omega}^2 \vec{r} - m(\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{\omega} + m\vec{v} \times \vec{\omega} - m\vec{A}(t) - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}}$$

lo que implica

$$\begin{aligned} m\vec{a} + \underbrace{m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}}_{-m\vec{r} \times \dot{\vec{\omega}}} + \underbrace{m\vec{\omega} \times \vec{v}}_{-m\vec{v} \times \vec{\omega}} &= m\vec{\omega}^2 \vec{r} - m(\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{\omega} + m\vec{v} \times \vec{\omega} - m\vec{A}(t) - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \\ m\vec{a} &= \underbrace{m\vec{\omega}^2 \vec{r} - m(\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{\omega}}_{m(\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{\omega}} + 2m\vec{v} \times \vec{\omega} + m\vec{r} \times \dot{\vec{\omega}} - m\vec{A}(t) - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \end{aligned}$$

y finalmente

$$m\vec{a} = m(\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{\omega} + 2m\vec{v} \times \vec{\omega} + m\vec{r} \times \dot{\vec{\omega}} - m\vec{A}(t) - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}}$$

Los términos de la parte derecha pueden ser interpretado en el formalismo newtoniano como fuerzas (ficticias), con $m(\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{\omega}$ la fuerza centrífuga, $2m\vec{v} \times \vec{\omega}$ la fuerza de Coriolis y finalmente $m\vec{r} \times \dot{\vec{\omega}}$ la fuerza de Euler.

Demostramos las formules ocupadas previamente

$$\begin{aligned} (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 &= (\vec{\omega} \times \vec{r})_i \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r})_i = \varepsilon_{ijk}\omega_j r_k \varepsilon_{ilm}\omega_l r_m \\ &= \underbrace{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}}_{\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}} \omega_j \omega_l r_k r_m \\ &= \delta_{jl}\delta_{km}\omega_j \omega_l r_k r_m - \delta_{jm}\delta_{kl}\omega_j \omega_l r_k r_m \\ &= \omega_j \omega_j r_k r_k - \omega_j r_j \omega_l r_l \\ &= (\vec{\omega})^2 (\vec{r})^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r})^2 \end{aligned}$$

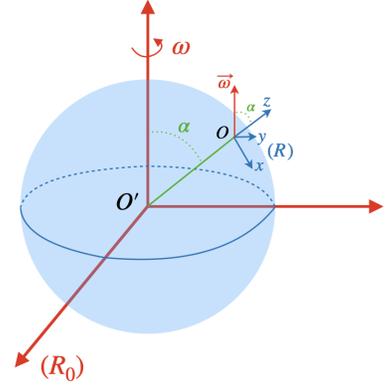
$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= v_i (\vec{\omega} \times \vec{r})_i = v_i \varepsilon_{ijk}\omega_j r_k \\ &= \varepsilon_{ijk} v_i \omega_j r_k \\ &= \varepsilon_{jki} v_i \omega_j r_k = \omega_j (\vec{r} \times \vec{v})_j = \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) \\ &= \varepsilon_{kij} v_i \omega_j r_k = r_k (\vec{v} \times \vec{\omega})_k = \vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{\omega}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\omega}^2 \vec{r} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \vec{\omega} &= \omega_i \omega_i \vec{r} - \omega_i r_i \vec{\omega} \\
&= \omega_i \omega_i r_j \vec{e}_j - \omega_i r_i \omega_j \vec{e}_j \\
&= (\omega_i \omega_i r_j - \omega_i \omega_j r_i) \vec{e}_j \\
&= (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{kj}) \omega_i \omega_k r_l \vec{e}_j \\
&= \varepsilon_{mij} \varepsilon_{mkl} \omega_i \omega_k r_l \vec{e}_j \\
&= \varepsilon_{mij} \omega_i (\vec{\omega} \times \vec{r})_m \vec{e}_j \\
&= \varepsilon_{jmi} \omega_i (\vec{\omega} \times \vec{r})_m \vec{e}_j \\
&= ((\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{\omega})_j \cdot \vec{e}_j \\
&= (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{\omega}
\end{aligned}$$

2.9.1 Péndulo de Foucault

Como aplicación, estudiamos el péndulo de Foucault. Queremos estudiar un péndulo simple en el sistema de referencia del laboratorio (no inercial).

(\mathcal{R}_0) es un sistema fija (con direcciones hacia estrellas lejanas) y (\mathcal{R}) es el sistema de referencia no inercial asociado al laboratorio. Tenemos



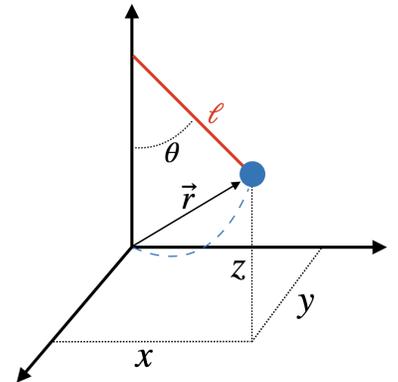
$$\vec{\omega} = \omega (-\sin \alpha \vec{e}_x + \cos \alpha \vec{e}_z)$$

Queremos estudiar el movimiento de este péndulo con una masa que se encuentra en la posición $\vec{r} = (x, y, z)$, por lo tanto $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$. Sabemos que

$$L = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + \frac{1}{2} m (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 + m \vec{v} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) - m \vec{r} \cdot \vec{A}(t) - U$$

La energía potencial de gravitación es

$$U = -m \vec{g} \cdot \vec{r} = -m (-g \vec{e}_z) \cdot (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z) = mgz$$



y también

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}m\vec{v}^2 &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \\
\vec{\omega} \times \vec{r} &= \omega(-\sin\alpha\vec{e}_x + \cos\alpha\vec{e}_z) \times (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z) \\
&= \omega(-y\sin\alpha\vec{e}_z + z\sin\alpha\vec{e}_y + x\cos\alpha\vec{e}_y - y\cos\alpha\vec{e}_x) \\
(\vec{\omega} \times \vec{r})^2 &= \omega^2(y^2\cos^2\alpha + (z\sin\alpha + x\cos\alpha)^2 + y^2\sin^2\alpha) \\
&= \omega^2(y^2 + (z\sin\alpha + x\cos\alpha)^2) \\
\vec{v} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= \omega(\dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z) \cdot (-y\cos\alpha\vec{e}_x + (z\sin\alpha + x\cos\alpha)\vec{e}_y - y\sin\alpha\vec{e}_z) \\
&= \omega(-y\dot{x}\cos\alpha + \dot{y}z\sin\alpha + \dot{y}x\cos\alpha - \dot{z}y\sin\alpha)
\end{aligned}$$

Nos queda calcular $\vec{A}(t)$, es decir la aceleración de O en (\mathcal{R}_0)

$$\vec{O'O} = R_{\oplus}\vec{e}_z$$

con R_{\oplus} el radio de la Tierra y

$$\vec{e}_z = \cos\alpha\vec{e}'_z + \sin\alpha\cos\phi\vec{e}'_x + \sin\alpha\sin\phi\vec{e}'_y$$

lo que implica

$$\begin{aligned}
\vec{V}(t) &= R_{\oplus}\dot{\phi}\left[-\sin\alpha\sin\phi\vec{e}'_x + \sin\alpha\cos\phi\vec{e}'_y\right], \quad \text{con } \dot{\phi} = \omega \\
\Rightarrow \vec{A}(t) &= R_{\oplus}\dot{\omega}\left[-\sin\alpha\sin\omega\vec{e}'_x + \sin\alpha\cos\omega\vec{e}'_y\right] - R_{\oplus}\omega^2\left[\sin\alpha\cos\omega\vec{e}'_x + \sin\alpha\sin\omega\vec{e}'_y\right]
\end{aligned}$$

La rotación de la Tierra es casi uniforme $\dot{\omega} \simeq 0$ y $\omega^2 \ll 1$ de hecho $\omega = \frac{2\pi}{1 \text{ día}} = 0,000073 \text{ rad/s}$ por lo tanto podemos aproximar

$$\vec{A}(t) \simeq \vec{0} \quad \text{y} \quad (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 \simeq 0$$

El lagrangiano de una partícula libre es

$$L \simeq \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + m\omega(-y\dot{x}\cos\alpha + \dot{y}z\sin\alpha + \dot{y}x\cos\alpha - \dot{z}y\sin\alpha) - mgz$$

pero estudiamos un péndulo, es decir que (x, y, z) no son independiente

$$\begin{aligned}
(l - z)^2 + x^2 + y^2 &= l^2 \\
\Leftrightarrow z &= l\left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{l^2}}\right)
\end{aligned}$$

Esta expresión de z es una ecuación de ligadura y la podemos reemplazar en el lagrangiano. Pero también queremos estudiar las pequeñas oscilaciones es decir $x \ll 1, y \ll 1$.

$$\Rightarrow z = l \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{l^2}} \right) \simeq l \left(1 - \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{2l^2} \right) \right) \simeq \frac{x^2 + y^2}{2l}$$

es decir que z es de orden dos. Para evaluar el orden de cada termino del lagrangiano, obtenemos

$$\begin{aligned} L &\simeq \frac{1}{2}m \left(\underbrace{\dot{x}^2}_{\text{orden 2}} + \underbrace{\dot{y}^2}_{\text{orden 2}} + \underbrace{\dot{z}^2}_{\text{orden 4}} \right) + m\omega \left(\underbrace{-\dot{y}x}_{\text{orden 2}} \cos \alpha + \underbrace{\dot{y}z}_{\text{orden 3}} \sin \alpha + \underbrace{\dot{y}x}_{\text{orden 2}} \cos \alpha - \underbrace{\dot{z}y}_{\text{orden 3}} \sin \alpha \right) \\ &\quad - mg \underbrace{z}_{\text{orden 2}} \\ &= \frac{1}{2}m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m \underbrace{\omega \cos \alpha}_{\equiv \beta} (x\dot{y} - y\dot{x}) - \frac{1}{2}m \underbrace{\frac{g}{l}}_{\equiv \omega_0^2} (x^2 + y^2) + \text{términos de orden superior} \end{aligned}$$

lo que nos da finalmente

$$L \equiv L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m\beta(x\dot{y} - y\dot{x}) - \frac{1}{2}m\omega_0^2 (x^2 + y^2)$$

Tenemos 2 ecuaciones de Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial x} \Rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{x} - m\beta y) = m\beta\dot{y} - m\omega_0^2 x \\ &\Rightarrow \ddot{x} - 2\beta\dot{y} + \omega_0^2 x = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial y} \Rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{y} + m\beta x) = -m\beta\dot{x} - m\omega_0^2 y \\ &\Rightarrow \ddot{y} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 y = 0 \end{aligned}$$

Son dos osciladores acoplados, con el acoplamiento $\beta = \omega \cos \alpha$. Se observa que no hay acoplamiento en el ecuador ($\alpha = \pi/2$).

Para resolver estas ecuaciones, se define $\xi = x + iy$

$$\ddot{\xi} + 2i\beta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = 0$$

Podemos buscar soluciones de la forma $e^{\gamma t}$

$$\xi(t) = e^{-i\beta t} \left(A e^{i\sqrt{\beta^2 + \omega_0^2} t} + B e^{-i\sqrt{\beta^2 + \omega_0^2} t} \right)$$

con A y B las condiciones iniciales. Podemos considerar que el péndulo se encuentra en una posición sin velocidad inicial $\dot{\xi}(0) = 0$

$$\dot{\xi}(t) = -i\beta e^{-i\beta t} \left(A e^{i\sqrt{\beta^2 + \omega_0^2} t} + B e^{-i\sqrt{\beta^2 + \omega_0^2} t} \right) + i\sqrt{\beta^2 + \omega_0^2} e^{-i\beta t} \left(A e^{i\sqrt{\beta^2 + \omega_0^2} t} - B e^{-i\sqrt{\beta^2 + \omega_0^2} t} \right)$$

$$\dot{\xi}(0) = -i\beta(A + B) + i\sqrt{\beta^2 + \omega_0^2}(A - B) = 0$$

es decir

$$B = \frac{\sqrt{\beta^2 + \omega_0^2} - \beta}{\sqrt{\beta^2 + \omega_0^2} + \beta} A$$

lo que implica

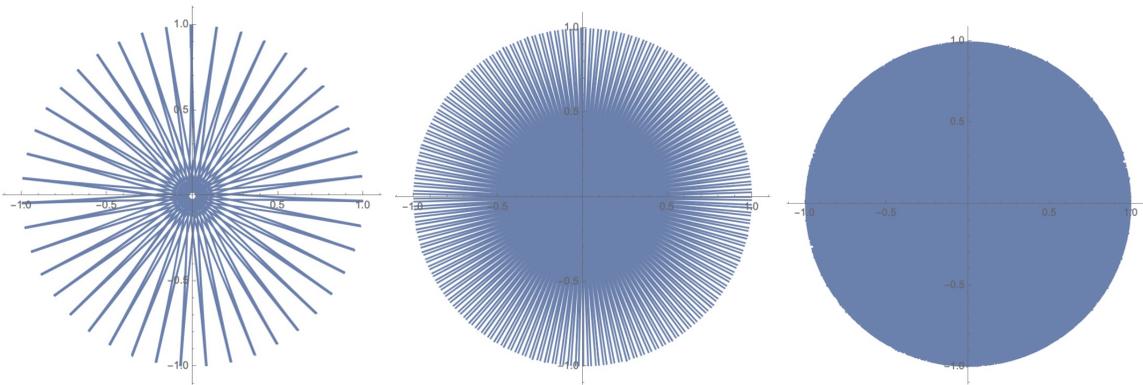
$$\xi(t) = \frac{2A}{\sqrt{\beta^2 + \omega_0^2} + \beta} e^{-i\beta t} \underbrace{\left[\sqrt{\beta^2 + \omega_0^2} \cos \left(\sqrt{\beta^2 + \omega_0^2} t \right) + i\beta \sin \left(\sqrt{\beta^2 + \omega_0^2} t \right) \right]}_{\text{ecuación de un elipse en el espacio complejo}}$$

De hecho para un elipse $x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$ es decir $z = x + iy = a \cos \theta + ib \sin \theta$, lo que nos permite concluir que $\sqrt{\beta^2 + \omega_0^2}$ es el eje mayor y β el eje menor. El factor $e^{-i\beta t}$ es un factor de rotación, hace que el elipse tiene rotación en el tiempo.

Durante un día, $\omega t = 2\pi$ por lo tanto, el péndulo gira de

$$\beta t = \omega t \cos \alpha \equiv 2\pi \cos \alpha$$

El péndulo gira de $2\pi \cos \alpha$ cada día.

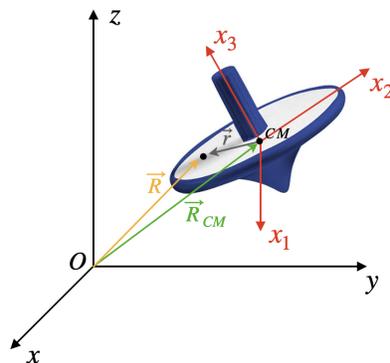


Movimiento del péndulo en el plano (x, y) para $\alpha = 45^\circ$ y $\ell = \{1000 \text{ km}, 100 \text{ km}, 100 \text{ m}\}$

2.10 Sólido rígido

Un cuerpo rígido es un sistema de partículas cuyas distancias mutuas son fijas, es decir que no varían en el tiempo. La descripción del movimiento se puede hacer en términos de la posición de su centro de masa y de la orientación relativa del cuerpo en el espacio. Esto requiere de dos sistemas de coordenadas:

- Un sistema inercial (laboratorio) denotado por (x, y, z) .
- Un sistema en movimiento, fijo en el cuerpo, con origen en el centro de masa, identificado por (x_1, x_2, x_3) .



La posición \vec{R} de cualquier punto P del cuerpo rígido en un instante dado con respecto al sistema de referencia del laboratorio (x, y, z) es

$$\vec{R} = \vec{R}_{CM} + \vec{r}$$

con \vec{r} la posición de P con respecto al sistema fijo en el cuerpo. Considerando un desplazamiento infinitesimal de P en el laboratorio,

$$\vec{dR} = \vec{dR}_{CM} + \vec{dr} \quad (2.8)$$

Un cambio infinitesimal \vec{dr} en las coordenadas (x_1, x_2, x_3) sólo puede deberse a un cambio de dirección del vector \vec{r} no a un cambio de su magnitud (puesto que la distancia de P al centro de masa es fija). Es decir que un cambio \vec{dr} debe ser el resultado de una rotación infinitesimal alrededor de un eje dado instantáneo que pasa por el centro de masa.

Como lo hemos obtenido en la ec.(2.7)

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{\text{fijo}} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{\text{rotación}} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

pero en un sólido rígido, los puntos no se mueven dentro del sólido, es decir

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{\text{rotación}} = 0$$

lo que implica

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{\text{fijo}} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

es decir, a partir (2.8)

$$\vec{v} = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

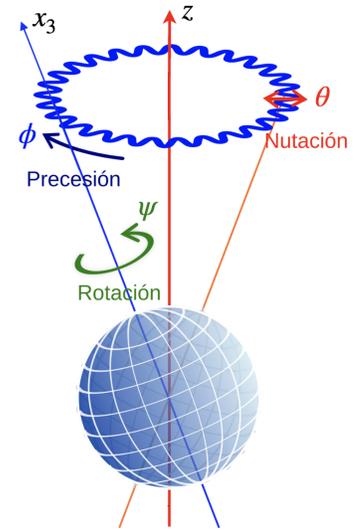
con $\vec{\omega}$ la velocidad angular instantánea de rotación, $\vec{v} = d\vec{R}/dt$ la velocidad de P en el laboratorio (x, y, z) , $\vec{v}_{CM} = d\vec{R}_{CM}/dt$ la velocidad del centro de masa en el laboratorio (x, y, z) .

En un instante dado, todos los puntos del cuerpo están girando con la misma velocidad angular $\vec{\omega}$. Obviamente, la dirección y la magnitud de $\vec{\omega}$ pueden cambiar durante el movimiento.

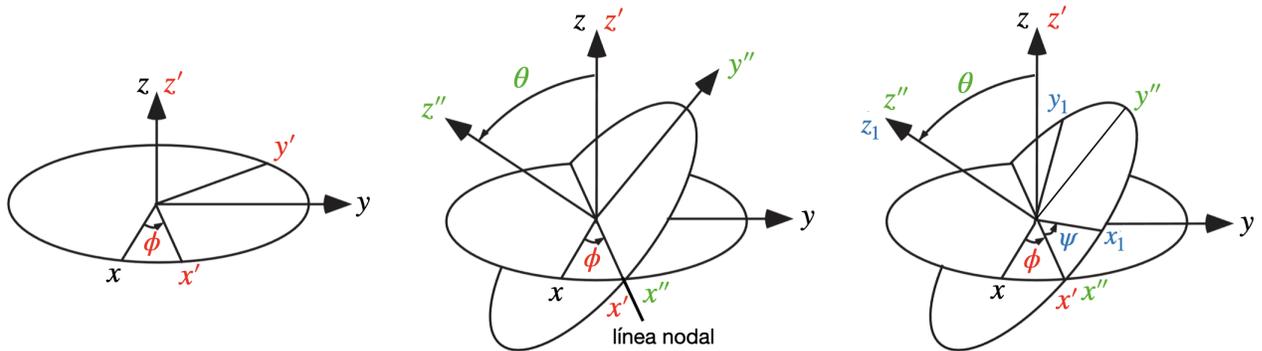
2.10.1 Ángulos de Euler

La dirección de \vec{r} está dada por la orientación relativa de los ejes (x_1, x_2, x_3) con respecto a los ejes (x, y, z) . La descripción de la orientación relativa entre dos sistemas de coordenadas cartesianas requiere de tres ángulos entre los respectivos ejes de cada sistema.

- Precesión: rotación alrededor de un eje fijo en el laboratorio
- Nutación: inclinación con respecto al eje fijo
- Rotación: rotación del cuerpo sobre sí mismo



Necesitamos por lo tanto tres rotaciones.



Tenemos 3 rotaciones, que descomponemos en 3 ángulos (ϕ, θ, ψ) . La primera rotación, nos permite pasar de (x, y, z) a (x', y', z')

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \Lambda_\phi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{con } \Lambda_\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en la segunda rotación, pasamos de (x', y', z') a (x'', y'', z'')

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \Lambda_\theta \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad \text{con } \Lambda_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

y finalmente la rotación para pasar de (x'', y'', z'') a (x_1, y_1, z_1) es

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \Lambda_\psi \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}, \quad \text{con } \Lambda_\psi = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

lo que implica la transformación

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \Lambda_\psi \Lambda_\theta \Lambda_\phi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv \Lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

con

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & \cos \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \sin \psi & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \cos \psi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{pmatrix}$$

2.10.2 Velocidad angular mediante los ángulos de Euler

Podemos definir la velocidad angular en el sistema de coordenadas $(\hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{z}_1)$. Sabemos que

$$\vec{\omega} = \dot{\phi} \hat{z} + \dot{\theta} \hat{x}' + \dot{\psi} \hat{z}''$$

Por ejemplo, tenemos $\hat{z}'' = \hat{z}_1$, lo que implica que

$$\dot{\psi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

De forma similar

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \Lambda_\psi \Lambda_\theta \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

lo que implica $\hat{x}' = \cos \psi \hat{x}_1 - \sin \psi \hat{y}_1$, es decir

$$\dot{\vec{\theta}} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos \psi \\ -\dot{\theta} \sin \psi \\ 0 \end{pmatrix}$$

y finalmente

$$\dot{\vec{\phi}} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \\ \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \\ \dot{\phi} \cos \theta \end{pmatrix}$$

La velocidad angular instantánea $\vec{\omega}$ de un cuerpo rígido es por lo tanto $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ con

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \end{cases}$$

2.10.3 Energía cinética

A partir de la velocidad angular, podemos deducir la energía cinética

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i^2$$

con m_i la masa de cada partícula y \vec{v}_i la velocidad de cada partícula "i" del solido. Pero sabemos que

$$\vec{v}_i = \vec{V}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

lo que implica

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\vec{V}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left\{ \vec{V}_{CM}^2 + 2\vec{V}_{CM} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) + (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 \right\}$$

Descomponiendo el calculo, obtenemos

$$\frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{V}_{CM}^2 = \frac{1}{2} V_{CM}^2 \sum_i m_i = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 \equiv T_{CM}, \quad \text{con } M \text{ la masa del solido.}$$

Es la energía cinética del centro de masa con la masa total del cuerpo. Para el segundo termino, ocupamos la relación

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$\sum_i m_i \vec{V}_{CM} (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \left(\vec{V}_{CM} \times \vec{\omega} \right) \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}_i}_{=\vec{0}} = \vec{0}$$

porque el origen es el centro de masa. Finalmente, para el último calculo, usamos la relación

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d}) \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$$

lo que implica

$$\frac{1}{2} m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i [\vec{\omega}^2 \vec{r}_i^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)^2] \equiv T_{\text{rot}}$$

Es la energía de rotación ya que depende de ω . En conclusión, tenemos

$$T = T_{\text{CM}} + T_{\text{rot}}$$

Le energía cinética de rotación puede ser expresada de otra forma. Definimos las coordenadas de una partícula "i" en el punto P_i como

$$\vec{r}_i = \left(x_1(P_i), x_2(P_i), x_3(P_i) \right)$$

lo que implica

$$\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i = \sum_j \omega_j x_j(P_i)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)^2 &= \left[\sum_j \omega_j x_j(P_i) \right] \left[\sum_k \omega_k x_k(P_i) \right] \\ &= \sum_{j,k} \omega_j \omega_k x_j(P_i) x_k(P_i) \end{aligned}$$

y también

$$\vec{\omega}^2 = \sum_j \omega_j \omega_j = \sum_{j,k} \omega_j \omega_k \delta_{jk}$$

lo que implica

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \left[\sum_{j,k} (\omega_j \omega_k \delta_{jk} \vec{r}_i^2 - \omega_j \omega_k x_j(P_i) x_k(P_i)) \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j,k} \omega_j \omega_k \sum_i m_i (\vec{r}_i^2 \delta_{jk} - x_j(P_i) x_k(P_i)) \\ &\equiv \frac{1}{2} \sum_{j,k} I_{jk} \omega_j \omega_k \end{aligned}$$

donde hemos definido el tensor de inercia del cuerpo rígido

$$I_{jk} = \sum_i m_i (\vec{r}_i^2 \delta_{jk} - x_j x_k)$$

Este objeto puede ser expresado como una matriz

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i m_i (x_2^2 + x_3^2) & -\sum_i m_i x_1 x_2 & -\sum_i m_i x_1 x_3 \\ -\sum_i m_i x_2 x_1 & \sum_i m_i (x_1^2 + x_3^2) & -\sum_i m_i x_2 x_3 \\ -\sum_i m_i x_3 x_1 & -\sum_i m_i x_3 x_2 & \sum_i m_i (x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix}$$

I es simétrico $I_{jx} = I_{kj}$ lo que implica que tenemos 6 componentes independientes. Cada componente del tensor expresa la resistencia o inercia de un cuerpo a ser rotado en torno a un eje dado. Por ejemplo, I_{33} mide la resistencia del cuerpo a ser rotado alrededor del eje x_3 . Para una distribución continua de masa, pasamos al límite continuo es decir que reemplazamos la suma por una integral.

$$\sum_i m_i \rightarrow \int \rho d^3x$$

con ρ la densidad de masa del cuerpo.

$$I_{jk} = \int \rho(\vec{r}) (\vec{r}^2 \delta_{jk} - x_j x_k) d^3x$$

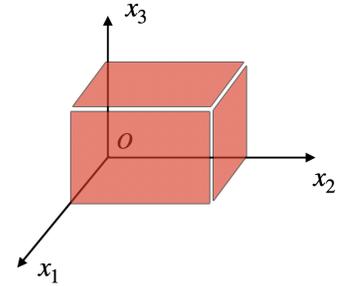
Por ejemplo, si queremos calcular el momento de inercia asociado a un cubo homogéneo. Es decir que ρ es constante

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int \rho (x_2^2 + x_3^2) d^3x = \rho \int_0^b dx_3 \int_0^b dx_2 (x_2^2 + x_3^2) \int_0^b dx_1 \\ &= \frac{2}{3} \rho b^5 = \frac{2}{3} M b^2 \end{aligned}$$

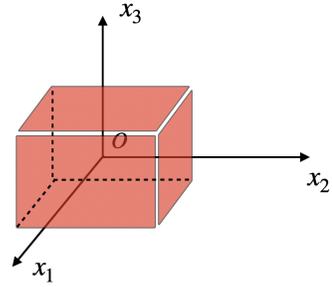
$$I_{12} = -\rho \int_0^b x_1 dx_1 \int_0^b x_2 dx_2 \int_0^b dx_3 = -\frac{1}{4} \rho b^5 = -\frac{1}{4} M b^2$$

las demás componentes se calculan de la misma forma

$$I = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\beta & -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{1}{4}\beta & \frac{2}{3}\beta & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta & \frac{2}{3}\beta \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \beta = M b^2$$



a partir de lo cual podemos calcular la energía cinética de rotación. Es importante entender que el tensor depende del centro con respecto a lo cual lo calculamos. De hecho, tomando como centro, el centro del cubo obtenemos



$$\begin{aligned}
 I_{12} &= \int \rho (r^2 \delta_{12} - x_1 x_2) d^3x \\
 &= \rho \int_{-b/2}^{b/2} x_1 dx_1 \int_{-b/2}^{b/2} x_2 dx_2 \int_{-b/2}^{b/2} dx_3 = 0 \\
 I_{11} &= \rho \int_{-b/2}^{b/2} dx_3 \int_{-b/2}^{b/2} dx_2 (x_2^2 + x_3^2) \int_{-b/2}^{b/2} dx_1 = \frac{\beta}{6}
 \end{aligned}$$

de lo cual obtenemos

$$I = \frac{\beta}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Existe una relación entre los 2 tensores, es el *teorema de los ejes paralelos*.

Sea I_{jk} el tensor de inercia de un cuerpo rígido expresado en el sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) con origen en el centro de masa del solido. En un sistema diferente de coordenadas fijas (x'_1, x'_2, x'_3) cuyo origen O' se encuentra en una posición \vec{a} con respecto al centro de masa del cuerpo, el tensor de inercia es

$$I'_{jk} = I_{jk} + \sum_i m_i [a^2 \delta_{jk} - a_j a_k]$$

Se demuestra considerando $\vec{r}_j = \vec{a} + \vec{r}'_j \dots$

Por ejemplo para el cubo

$$\vec{a} = \left(-\frac{b}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{b}{2} \right)$$

Vimos por ejemplo que $I_{11} = \beta/6$, lo que implica

$$\begin{aligned}
 I'_{11} &= \frac{\beta}{6} + \rho \int \underbrace{(a^2 - a_1^2)}_{\frac{3}{4}b^2 - \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{2}} d^3x \\
 &= \frac{\beta}{6} + M \frac{b^2}{2} = \frac{2}{3} \beta
 \end{aligned}$$

En termino de clasificación, cuando tenemos $I_{11} = I_{22} = I_{33}$ y $I_{ij} = 0$ para $i \neq j$ se llama el trompo esférico (como la esfera). Los cuerpos como la varilla tienen $I_{11} = I_{22} \neq I_{33}$ se

llaman trompo simétrico y aquellos como la caja de cerillas, que cumplen la condición $I_{11} \neq I_{22} \neq I_{33}$ se denominan trompo asimétrico.

Obviamente esta clasificación depende del punto que se considere en el sólido. Una esfera homogénea es un trompo esférico en el centro de masa y un trompo simétrico en otro punto.

2.10.4 Momento angular

Hemos visto que el tensor de inercia nos permite calcular la energía cinética de rotación. Nos permite también calcular el momento angular. Calculamos \vec{L} con origen en el centro de masa

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i) = \sum_i \vec{r}_i \times (m_i \vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

usando $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ tenemos

$$\vec{L} = \sum_i m_i (\vec{r}_i^2 \vec{\omega} - (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) \vec{r}_i)$$

La componente k es

$$\begin{aligned} L_k &= \sum_i m_i (\vec{r}_i^2 \omega_k - (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) x_k(P_i)) \\ &= \sum_i m_i \left[\sum_j r_i^2 \omega_j \delta_{jk} - \sum_j x_j(P_i) \omega_j x_k(P_i) \right] \\ &= \sum_j \omega_j \sum_i m_i (r_i^2 \delta_{jk} - x_j x_k) = \sum_j I_{kj} \omega_j \end{aligned}$$

es decir

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$$

Lo que nos permite reescribir la energía de rotación

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{jk} I_{jk} \omega_j \omega_k = \frac{1}{2} \sum_k L_k \omega_k = \frac{1}{2} \vec{L} \cdot \vec{\omega}$$

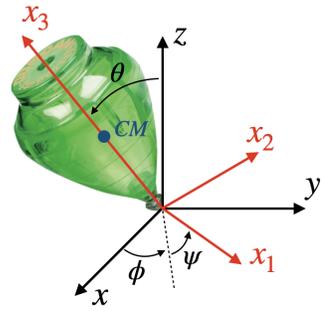
Las ecuaciones pueden plantearse en términos de los ángulos de Euler, que describen los grados de libertad

$$\begin{aligned} L &= T - V = L(\theta, \phi, \psi, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}, t) \\ T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} I_{ij} \Omega_i \Omega_j \end{aligned}$$

2.10.5 Trompo de Lagrange

Consideramos un trompo de masa m en el campo gravitacional y cuyo punto inferior O está fijo. Es un trompo simétrico con respecto al centro de masa, $I_{11} = I_{22} \neq I_{33}$ con (x, y, z) las coordenadas del laboratorio y (x_1, x_2, x_3) las coordenadas fijas con el cuerpo. Ambos sistemas de referencia tienen origen en el punto O , lo que implica que

$$T_{\text{traslación}} = 0$$



En el sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) , el centro de masa es fijo, por lo tanto, no hay energía cinética asociada, excepto la energía cinética de rotación

$$\begin{aligned} T &= T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \left(I_{11}\omega_1^2 + I_{22}\omega_2^2 + I_{33}\omega_3^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} I_{11} (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} I_{33}\omega_3^2 \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_2 &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_3 &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \end{aligned}$$

lo que implica

$$T = \frac{1}{2} I_{11} (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_{33} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2$$

aunque la energía potencial del trompo, con respecto a 0 es

$$V = mgz = mga \cos \theta$$

Lo que nos permite armar el lagrangiano del sistema

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} I_{11} (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_{33} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - mga \cos \theta$$

No vamos a derivar todas las ecuaciones. Observamos en particular que las coordenadas (ψ, ϕ) son cíclicas lo que nos permite obtener

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} &= \text{constante} \\ \Leftrightarrow I_{33} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) &= I_{33} \omega_3 = \text{constante} \equiv L_3 \end{aligned}$$

lo que corresponde a la conservación del momento angular alrededor del eje \hat{x}_3 .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} &= \text{constante} \\ \Leftrightarrow I_{11} \dot{\phi} \sin^2 \theta + I_{33} \cos \theta (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \end{aligned}$$

En las coordenadas (x, y, z) , corresponde a la conservación de L_z . Lo podemos fácilmente demostrar a partir de las relaciones

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_2 &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_3 &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \end{aligned}$$

y de $\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$, tenemos

$$\begin{aligned} L_1 &= I_{11} (\sin \theta \sin \psi \dot{\phi} + \cos \psi \dot{\theta}) \\ L_2 &= I_{11} (\sin \theta \cos \psi \dot{\phi} - \sin \psi \dot{\theta}) \\ L_3 &= I_{33} (\dot{\psi} + \cos \theta \dot{\phi}) \end{aligned}$$

lo que nos permite obtener

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$$

de lo cual podemos obtener L_z con Λ la matriz de rotación. Finalmente, en vez de obtener la ecuación para θ , usaremos la conservación de la energía como tercera ecuación

$$E = \frac{1}{2} I_{11} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_{33} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 + mga \cos \theta$$

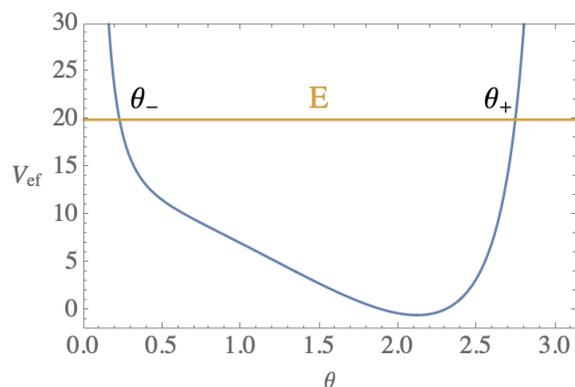
Pero tenemos

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{L_z - L_3 \cos \theta}{I_{11} \sin^2 \theta} \\ \dot{\psi} &= \frac{L_3}{I_{33}} - \frac{(L_z - L_3 \cos \theta) \cos \theta}{I_{11} \sin^2 \theta} \end{aligned}$$

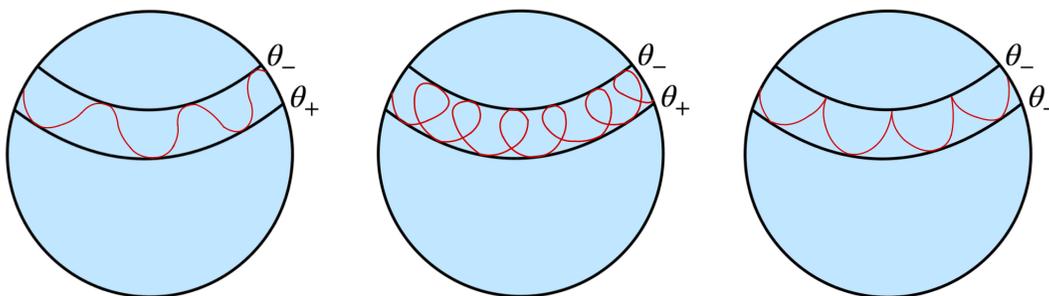
lo que nos permite escribir una expresión con solamente θ

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} I_{11} \dot{\theta}^2 + \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{2 I_{11} \sin^2 \theta} + \frac{L_3^2}{2 I_{33}} + mga \cos \theta = \text{constante} \\ &\equiv \frac{1}{2} I_{11} \dot{\theta}^2 + V_{ef}(\theta) \end{aligned}$$

con V_{ef} el potencial efectivo. Observamos a partir del gráfico de V_{ef} que siempre θ oscila entre dos valores excepto cuando la energía es mínima.



De la expresión de $\theta(t)$ se pueden obtener las otras coordenadas, en particular podemos observar que el signo de $\dot{\phi}$ depende de $L_z - L_3 \cos \theta$. Es obvio que tenemos $L_z - L_3 \cos \theta_- < L_z - L_3 \cos \theta_+$, lo que implica que si $L_z - L_3 \cos \theta_- > 0$, $\dot{\phi} > 0$, aunque si $L_z - L_3 \cos \theta_- < 0$, ϕ no tiene una evolución monótona y finalmente existe el caso extremo $L_z - L_3 \cos \theta_- = 0$. Estos 3 casos están ilustrado en los gráficos siguientes en los cuales observamos la punta del trompo proyectado sobre una esfera.



Observamos además de la nutación (variación de θ), una precesión es decir la variación de ϕ . El fenómeno de precesión ocurre por la Tierra que podemos representar como una esfera achatada por los polos es decir un trompo simétrico. El periodo de precesión es de aproximadamente 26000 años.

La nutación puede ser eliminada, es decir si $\theta = \theta_0$ es decir si $V'_{ef}(\theta_0) = 0$.

$$\frac{L_3(L_z - L_3 \cos \theta_0)}{I_{11} \sin \theta_0} - \frac{(L_z - L_3 \cos \theta_0)^2 \cos \theta_0}{I_{11} \sin^3 \theta_0} - mga \sin \theta_0 = 0$$

Definimos $X = L_z - L_3 \cos \theta_0$

$$\cos \theta_0 X^2 - L_3 \sin^2 \theta_0 X + mgaI_{11} \sin^4 \theta_0 = 0$$

Esta ecuación tiene una solución si el discriminante es positivo es decir

$$L_3^2 \geq 4mgaI_{11} \cos \theta_0$$

pero como $L_3 = I_{33}\omega_3$, tenemos

$$\omega_3 \geq \frac{2}{I_{33}} \sqrt{mgaI_{11} \cos \theta_0}$$

Puede ocurrir un movimiento con θ fijo (sin nutación) si ω_3 es suficientemente grande. Usualmente no se cumple esta condición después de un cierto tiempo, por fricción, lo que empieza a producir nutación.

3. Formalismo hamiltoniano

El formalismo hamiltoniano no esta tan usado para resolver problemas como el formalismo lagrangiano, pero nos permite entender mucho mas la estructura de la mecánica clásica y ser la base para la mecánica cuántica.

En la mecánica lagrangiana, tenemos n coordenadas generalizadas $\{q_i\}$ y las velocidades generalizadas $\{\dot{q}_i\}$ tal que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

Son n ecuaciones diferenciales de segundo orden por las cuales se necesitan $2n$ condiciones iniciales $\{q_i(t=0), \dot{q}_i(t=0)\}$. La idea de Hamilton es considerar q_i y \dot{q}_i de forma similar, y no como \dot{q}_i que es la derivada de q_i .

En esta dirección, se ocupa el momento generalizado

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad \left(\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \right)$$

tal que las variables (q_i, \dot{q}_i) se reemplazan por (q_i, p_i) .

En vez de posición y velocidad (espacio de configuración, es decir las posiciones solamente porque las velocidades no son independientes), pasamos a posición y momento (espacio de fase).

Por ejemplo, si consideramos un péndulo

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta$$

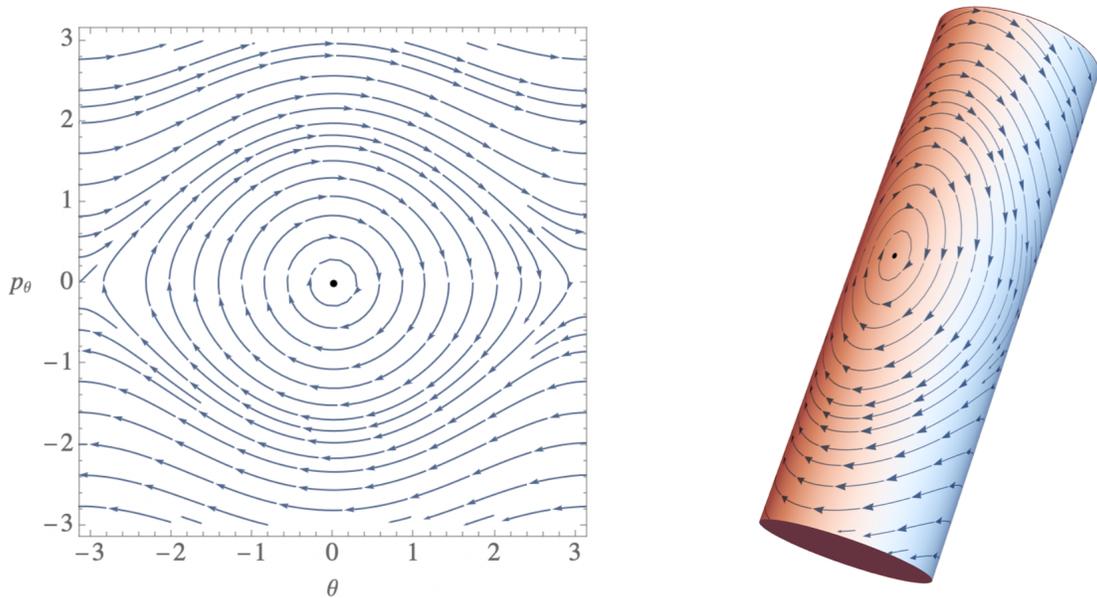
tenemos

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}$$

la ecuación de Euler-Lagrange es

$$\dot{p}_\theta = -mgl \sin \theta \quad \left(\equiv ml^2\ddot{\theta} \right)$$

Con estas ecuaciones podemos dibujar el espacio de fase, con líneas que representan soluciones diferentes es decir con condiciones iniciales diferentes. El espacio de fase representa por lo tanto el espectro de todas las soluciones. En el caso del péndulo, la variable θ es periódica, lo que implica que el espacio de fase es un cilindro.



Cada punto del espacio de fase representa la posición (θ) y el momento ($p_\theta = ml^2\dot{\theta}$) en un tiempo t . Por eso, las líneas en el espacio de fase no se cruzan. De hecho, dado estas coordenadas, la solución de la ecuación diferencial es única.

Queremos encontrar una función en el espacio de fase, es decir una función de (q_i, p_i) que determina de forma única la evolución del sistema. Por lo tanto, necesitamos una función que contiene la misma información que el lagrangiano $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ (quien determina la evolución en el espacio de configuración) pero con las variables (q_i, p_i) en vez de (q_i, \dot{q}_i) . Ese proceso se llama la transformada de Legendre.

3.1 Transformada de Legendre

Consideramos una función $f(x, y)$ tal que, $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ y definimos una nueva función $g(x, y, u) \equiv ux - g(x, y)$

$$dg = udx + xdu - \frac{\partial f}{\partial x}dx - \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

donde u es una variable independiente, pero vamos a considerar el caso particular $u = \frac{\partial f}{\partial x}$. En ese caso

$$dg = xdu - \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

es decir que g es una función de (u, y) . En conclusión, hemos pasado de (x, y) a (u, y) definiendo una función

$$g(u, y) = ux - f(x, y) \quad \text{con} \quad u = \frac{\partial f}{\partial x}$$

Por ejemplo, en termodinámica se considera el cambio de energía

$$dU = TdS - PdV$$

que esta relacionado con un cambio de entropía y de volumen, es decir $U(S, V)$. Podemos definir una función de (T, V) por ejemplo $F = TS - U$ (por razones históricas, se define $F = U - TS$) con $T = \frac{\partial U}{\partial S}$, llamada la energía libre

$$dF = TdS + SdT - dU = TdS + SdT - TdS + PdV = SdT + PdV$$

3.2 El hamiltoniano

A partir de la sección anterior, definimos el hamiltoniano como la transformada de Legendre del lagrangiano

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t) \quad \text{con} \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Por ejemplo si

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r})$$

tenemos

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m \dot{\vec{r}}$$

lo que nos permite definir el hamiltoniano

$$\begin{aligned} H &= \vec{p} \cdot \dot{\vec{r}} - L = \vec{p} \left(\frac{\vec{p}}{m} \right) - \frac{1}{2} m \left(\frac{\vec{p}}{m} \right)^2 + V(\vec{r}) \\ &= \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r}) \end{aligned}$$

Una vez conocido el hamiltoniano, necesitamos conocer la dinámica en el espacio de fase. Sabemos que $H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t)$, lo que implica

$$\begin{aligned} dH &= \sum_i \left[\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right] - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_i \left[\dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i \right] - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad \left(p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \\ &= \sum_i [\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i] - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad \left(\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) \end{aligned}$$

pero sabemos también que $H(q_i, p_i, t)$, lo que implica

$$dH = \sum_i \left[\frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i \right] + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

lo que nos permite obtener las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{3.1}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{3.2}$$

también tenemos

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

En el ejemplo anterior, $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r})$, obtenemos con las ecuaciones de Hamilton

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p}}{m} \\ \dot{\vec{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} = -\vec{\nabla}V(\vec{r}) \end{aligned}$$

lo que una vez combinado, nos da

$$m\ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$$

es decir la ecuación de Newton para este sistema. Con el formalismo hamiltoniano, reemplazamos n ecuaciones diferenciales de segundo orden por $2n$ ecuaciones diferenciales de primer orden.

Nota que las ecuaciones de Hamilton se pueden escribir de forma tal que (q, p) aparecen "similares". Si definimos, el vector de dimensión $2n$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

las ecuaciones de Hamilton se escriben

$$\dot{\vec{X}} = J \frac{\partial H}{\partial \vec{X}}$$

con

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{n \times n} \\ -\mathbb{1}_{n \times n} & 0 \end{pmatrix}$$

Esta forma de escribir las ecuaciones de Hamilton es llamada la notación simpléctica (del griego συμπλεκτικός (symplektikos): entrelazado).

Con el hamiltoniano, las leyes de conservación son más fácil. Por ejemplo si $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ el hamiltoniano H es conservado y es la energía. De hecho

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial H}{\partial p} \dot{p} = \frac{\partial H}{\partial t} - \dot{p} \dot{q} + \dot{q} \dot{p} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

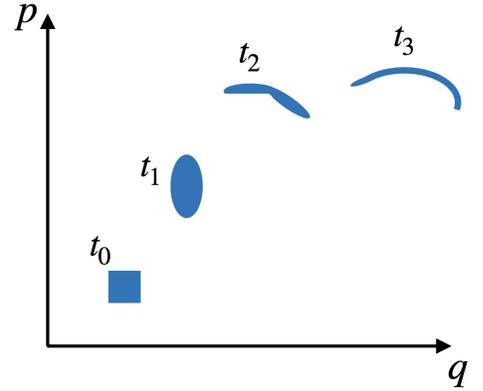
También, si una variable es cíclica es decir que q_i no aparece en el lagrangiano, obtenemos $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0$ es decir que p_i es conservado.

3.3 Teorema de Liouville

El formalismo hamiltoniano nos permite también descubrir el teorema de Liouville. Si consideramos una región del espacio de fase a un tiempo t y lo dejamos evolucionar, su forma puede cambiar pero su volumen nunca cambia.

Consideramos el volumen infinitesimal $V = dqdp$, después de un tiempo δt , tenemos

$$\begin{aligned} q &\longmapsto q + \dot{q} \delta t \equiv \tilde{q} \\ p &\longmapsto p + \dot{p} \delta t \equiv \tilde{p} \end{aligned}$$



Por lo tanto el nuevo volumen es

$$\begin{aligned} \tilde{V} &= d\tilde{q}d\tilde{p} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q} & \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q} & \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} \end{pmatrix} dqdp \quad (\text{usando el jacobiano}) \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} \delta t & \frac{\partial \dot{q}}{\partial p} \delta t \\ \frac{\partial \dot{p}}{\partial q} \delta t & 1 + \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} \delta t \end{pmatrix} dqdp \\ &\simeq \left(1 + \left(\frac{\partial \dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} \right) \delta t + O(\delta t^2) \right) dqdp \\ &\simeq \left(1 + \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} - \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} \right) \delta t + O(\delta t^2) \right) dqdp \simeq dqdp \end{aligned}$$

De la misma forma para n variables (q_i, p_i) , si $V = dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n$, obtenemos $\tilde{V} = \det \mathcal{J} \cdot V$, con \mathcal{J} el jacobiano

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q_j} & \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial p_j} \\ \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial q_j} & \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial p_j} \end{pmatrix}$$

lo que corresponde a una matriz $2n \times 2n$. Como sabemos que

$$\begin{aligned} \tilde{q}_i &= q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta t \\ \tilde{p}_i &= p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta t \end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \det \mathcal{J} &= \det \begin{pmatrix} \delta_{ij} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j} \delta t & \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} \delta t \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_j} \delta t & \delta_{ij} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_j} \delta t \end{pmatrix} \\ &\equiv \det(\mathbf{1} + \delta t M) \simeq 1 + \delta t \underbrace{\text{tr}(M)}_{=0} + O(\delta t^2) = 1 + O(\delta t^2) \end{aligned}$$

3.4 Corchete de Poisson

La derivada temporal de cualquier cantidad $f = f(q, p, t)$ tiene la forma

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right)$$

pero usando las ecuaciones de Hamilton (3.1,3.2), obtenemos

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)$$

lo que nos motiva a definir un objeto que nos indicara la evolución temporal de una función.

Consideramos dos funciones en el espacio de fase, $f(q, p)$ y $g(q, p)$. El corchete de Poisson se define como

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i}$$

Este corchete tiene varias propiedades:

* Anticonmutativa, $\{f, g\} = -\{g, f\}$

* Linealidad, $\{\alpha f + \beta g, h\} = \alpha\{f, h\} + \beta\{g, h\} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

* Regla de Leibniz, $\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g$

* Identidad de Jacobi, $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$

Son relaciones fáciles de demostrar aunque pueden ser un poco largas.

Podemos deducir que

$$\begin{aligned}\{q_i, q_j\} &= 0 \\ \{p_i, p_j\} &= 0 \\ \{q_i, p_j\} &= \delta_{ij}\end{aligned}$$

Es también fácil verificar que

$$\{q_i, f(p)\} = \frac{\partial f(p)}{\partial p_i}$$

y

$$\{p_i, f(q)\} = -\frac{\partial f(q)}{\partial q_i}$$

Con este nuevo formalismo, para cualquier función $f(q_i, p_i, t)$, tenemos

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i}$$

es decir

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}$$

Por lo tanto si una función es independiente del tiempo, tenemos

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\}$$

lo que implica que f es una constante del movimiento si "Poisson conmuta" con el hamiltoniano, es decir si $\{f, H\} = 0$. En particular si H es independiente del tiempo, H es constante ya que $\{H, H\} = 0$.

También, si q_i es una variable cíclica, tenemos

$$\{p_i, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0$$

lo que significa que $\frac{dp_i}{dt} = 0$ es decir que p_i es conservado.

Una vez encontrado cantidades conservadas, o constantes del movimiento, podemos deducir otras usando los corchetes de Poisson. Por ejemplo, si I y J son constantes del movimiento $\{I, J\}$ es también una constante del movimiento. Para eso, debemos demostrar que $\{\{I, J\}, H\} = 0$, con H el hamiltoniano. Pero

$$\{\{I, J\}, H\} = \underbrace{\{I, \{J, H\}\}}_{=0} + \underbrace{\{\{I, H\}, J\}}_{=0} = 0$$

Por ejemplo, si dos momentos angulares son conservados, el tercero es una constante del movimiento también. De hecho, como $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, tenemos

$$L_1 = r_2 p_3 - r_3 p_2$$

$$L_2 = r_3 p_1 - r_1 p_3$$

$$L_3 = r_1 p_2 - r_2 p_1$$

lo que implica

$$\begin{aligned} \{L_1, L_2\} &= \{r_2 p_3 - r_3 p_2, r_3 p_1 - r_1 p_3\} \\ &= \{r_2 p_3, r_3 p_1\} - \{r_2 p_3, r_1 p_3\} - \{r_3 p_2, r_3 p_1\} + \{r_3 p_2, r_1 p_3\} \end{aligned}$$

pero tenemos

$$\begin{aligned} \{r_2 p_3, r_1 p_3\} &= r_2 \{p_3, r_1 p_3\} + \{r_2, r_1 p_3\} p_3 \\ &= r_2 \left[r_1 \underbrace{\{p_3, p_3\}}_{=0} + \underbrace{\{p_3, r_1\}}_{=0} p_3 \right] + \left[r_1 \underbrace{\{r_2, p_3\}}_{=0} + \underbrace{\{r_2, r_1\}}_{=0} p_3 \right] p_3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

lo que implica

$$\{L_1, L_2\} = r_2 \underbrace{\{p_3, r_3\}}_{-1} p_1 + p_2 \underbrace{\{r_3, p_3\}}_{+1} r_1 = -r_2 p_1 + r_1 p_2 \equiv L_3$$

Es decir que si dos componentes de \vec{L} son conservadas \vec{L} es conservado. También, tenemos

$$\{\vec{L}^2, L_i\} = 0$$

con $\vec{L}^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$. Por ejemplo

$$\begin{aligned} \{L^2, L_3\} &= \{L_1^2, L_3\} + \{L_2^2, L_3\} + \underbrace{\{L_3^2, L_3\}}_{=0} \\ &= L_1 \underbrace{\{L_1, L_3\}}_{-L_2} + \underbrace{\{L_1, L_3\}}_{-L_2} L_1 + L_2 \underbrace{\{L_2, L_3\}}_{L_1} + \underbrace{\{L_2, L_3\}}_{L_1} L_2 \\ &= -L_1 L_2 - L_2 L_1 + L_2 L_1 + L_1 L_2 = 0 \end{aligned}$$

Con este formalismo podemos ver fácilmente que el momento angular es conservado para un problema de fuerza central. Tenemos

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r)$$

y debemos verificar que $\{L_x, H\} = \{L_y, H\} = \{L_z, H\} = 0$

$$\begin{aligned} \{L_x, H\} &= \left\{ L_x, \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + V(r) \right\} \\ &= \frac{1}{m} \left[p_x \{L_x, p_x\} + p_y \{L_x, p_y\} + p_z \{L_x, p_z\} \right] + \{L_x, V(r)\} \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned} \{L_x, p_x\} &= \{yp_z - zp_y, p_x\} = 0 \\ \{L_x, p_y\} &= \{yp_z - zp_y, p_y\} = p_z \\ \{L_x, p_z\} &= \{yp_z - zp_y, p_z\} = -p_y \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \{L_x, V(r)\} &= \{yp_z - zp_y, V(r)\} = y \{p_z, V(r)\} - z \{p_y, V(r)\} \\ &= y \left(-\frac{\partial V}{\partial z} \right) - z \left(-\frac{\partial V}{\partial y} \right) = -yV'(r)\frac{z}{r} + zV'(r)\frac{y}{r} = 0 \end{aligned}$$

lo que implica

$$\{L_x, H\} = \frac{1}{m} (p_y p_z - p_z p_y) = 0$$

De forma similar, tenemos $\{L_y, H\} = \{L_z, H\} = 0$, es decir

$$\{\vec{L}, H\}$$

lo que implica que el momento angular es conservado.

3.5 El vector de Laplace-Runge-Lenz-Hermann-Bernoulli-Hamilton-Gibbs

El formalismo nos permite buscar otras cantidades conservadas es decir que Poisson conmutan con el hamiltoniano. Por ejemplo, un vector que ha sido redescubierto por muchos autores sin saber que era ya conocido. El vector es más conocido como el vector de Laplace-Runge-Lenz aunque no son los primeros ha haberlo descubierto.

$$\vec{A} = \frac{1}{m} \vec{p} \times \vec{L} - k\hat{r}, \quad \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} \text{ el vector unitario}$$

Podemos fácilmente demostrar que este vector es conservado $\{A_i, H\} = 0$. La conservación de \vec{A} esta relacionada a la conservación de la excentricidad de la trayectoria. Para demostrarlo, usaremos la notación con el tensor de Levi-Civita, el momento angular puede ser escrito $L_i = \varepsilon_{imn} r_m p_n$, lo que nos permite escribir

$$\vec{A} = \frac{1}{m} \vec{p} \times \vec{L} - k \hat{r} \Rightarrow A_j = \frac{1}{m} \varepsilon_{jmn} p_m L_n - k \frac{r_j}{r}$$

lo que implica

$$\{H, A_i\} = \frac{1}{m} \varepsilon_{ijk} \{H, p_j\} L_k - k \left\{ H, \frac{r_i}{r} \right\}$$

ya que el hamiltoniano conmuta con el momento angular

$$\begin{aligned} \{H, A_i\} &= -\frac{k}{m} \varepsilon_{ijk} \left\{ \frac{1}{r}, p_j \right\} L_k - \frac{k}{2m} \left\{ \vec{p}^2, \frac{r_i}{r} \right\} \\ &= -\frac{k}{m} \varepsilon_{ijk} \left\{ \frac{1}{r}, p_j \right\} L_k - \frac{k}{m} p_j \left\{ p_j, \frac{r_i}{r} \right\} \end{aligned}$$

pero

$$\left\{ p_j, \frac{r_i}{r} \right\} = -\frac{\partial}{\partial r_j} \left(\frac{r_i}{r} \right) = -\frac{1}{r} \delta_{ij} + \frac{r_i}{r^2} \frac{\partial r}{\partial r_j} = -\frac{1}{r} \delta_{ij} + \frac{r_i r_j}{r^3}$$

y también

$$\left\{ p_j, \frac{1}{r} \right\} = -\frac{\partial}{\partial r_j} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial r_j} = \frac{r_j}{r^3}$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} \{H, A_i\} &= \frac{k}{m} \varepsilon_{ijk} \frac{r_j}{r^3} L_k - \frac{k}{m} p_j \left(-\frac{1}{r} \delta_{ij} + \frac{r_i r_j}{r^3} \right) \\ &= \frac{k}{m} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} \frac{r_j}{r^3} r_m p_n - \frac{k}{m} \left(-\frac{p_i}{r} + \frac{r_i r_j p_j}{r^3} \right) \\ &= \frac{k}{m} \left(\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm} \right) \frac{r_j}{r^3} r_m p_n - \frac{k}{m} \left(-\frac{p_i}{r} + \frac{r_i r_j p_j}{r^3} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

es decir que \vec{A} es conservado. La norma de \vec{A} es fácil de calcular, usando $L = mr^2 \dot{\theta}$ y $r = \frac{L^2/km}{1+e \cos \theta}$, encontramos $A = k|e|$. Lo que implica la conservación de la excentricidad. El tipo de trayectoria permanece durante el movimiento. Por ejemplo, no podemos pasar de una trayectoria elíptica a una trayectoria parabólica en un problema de fuerza central.

El sistema tiene varias propiedades interesantes, como por ejemplo las relaciones

$$\{L_i, A_j\} = \varepsilon_{ijk} A_k \quad (3.3)$$

$$\{A_i, A_j\} = -\frac{2}{m} \left(\frac{\bar{p}^2}{2m} - \frac{k}{r} \right) \varepsilon_{ijk} L_k \quad (3.4)$$

Por lo tanto si tenemos un hamiltoniano en un problema de fuerza central con potencial $V = -k/r$, i.e. $H = \frac{\bar{p}^2}{2m} - \frac{k}{r}$, obtenemos

$$\{A_i, A_j\} = -\frac{2}{m} H \varepsilon_{ijk} L_k$$

es decir que tenemos

$$\{A_x, A_y\} = -\frac{2}{m} H L_z$$

pero tenemos también que

$$\{H, L_z\} = 0$$

lo que nos permite concluir que

$$\{H, \{A_x, A_y\}\} = 0$$

es decir que $\{A_x, A_y\}$ es una constante de movimiento. Estas relaciones que hemos obtenido son

$$\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k, \quad \{L_i, A_j\} = \varepsilon_{ijk} A_k, \quad \{A_i, A_j\} = -\frac{2}{m} H \varepsilon_{ijk} L_k$$

Para una orbita dada, H es constante, es la energía E . Si es una orbita cerrada, sabemos que $E < 0$, lo que nos permite definir $D_i = \frac{A_i}{\sqrt{-2E/m}}$, lo que nos da

$$\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k, \quad \{L_i, D_j\} = \varepsilon_{ijk} D_k, \quad \{D_i, D_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k$$

Lo que corresponde a una representación de la álgebra $SO(4)$ (matrices 4×4 , antisimétricas, es decir que tienen 6 generadores). Es decir que tenemos dos tipos de momentos angulares. Ha sido por ejemplo usado en mecánica cuántica para encontrar los niveles de energía del átomo de hidrógeno.

Para terminar este capítulo, demostraremos las relaciones (3.3,3.4)

$$\begin{aligned} \{L_i, A_j\} &= \frac{1}{m} \varepsilon_{jmn} \{L_i, p_m L_n\} - k \left\{ L_i, \frac{r_j}{r} \right\} \quad \text{usando } L_i = \varepsilon_{imn} r_m p_n \\ &= \frac{1}{m} \varepsilon_{jmn} \left[p_m \underbrace{\{L_i, L_n\}}_{\varepsilon_{ins} L_s} + \underbrace{\{L_i, p_m\}}_{\varepsilon_{ist} \{r_s p_t, p_m\}} L_n \right] - k \varepsilon_{imn} \underbrace{\left\{ r_m p_n, \frac{r_j}{r} \right\}}_{r_m \{p_n, \frac{r_j}{r}\}} \end{aligned}$$

pero para el último termino, podemos demostrar de nuevo que

$$\left\{ p_n, \frac{r_j}{r} \right\} = -\frac{\partial}{\partial r_n} \left(\frac{r_j}{r} \right) = -\frac{1}{r} \delta_{jn} + \frac{r_j}{r^2} \frac{\partial r}{\partial r_n} = -\frac{1}{r} \delta_{jn} + \frac{r_n r_j}{r^3}$$

lo que nos permite obtener que

$$\begin{aligned} \{L_i, A_j\} &= \frac{1}{m} \underbrace{\varepsilon_{jmn} \varepsilon_{ins}}_{\delta_{im} \delta_{sj} - \delta_{ij} \delta_{sm}} p_m L_s + \frac{1}{m} \underbrace{\varepsilon_{jmn} \varepsilon_{imt}}_{\delta_{ij} \delta_{nt} - \delta_{jt} \delta_{in}} p_t L_n - \frac{k}{r^3} \varepsilon_{imn} r_m (r_j r_n - r^2 \delta_{jn}) \\ &= \frac{1}{m} (p_i L_j - \delta_{ij} p_m L_m + \delta_{ij} p_m L_m - p_j L_i) - \frac{k}{r^3} \varepsilon_{imn} r_m r_n r_j + \frac{k}{r} \varepsilon_{imj} r_m \end{aligned}$$

pero el penúltimo termino es nulo porque es el producto de un termino antisimétrico por un termino simétrico

$$\{L_i, A_j\} = \frac{1}{m} (p_r L_j - p_j L_i) - \frac{k}{r} \varepsilon_{ijm} r_m = \varepsilon_{ijm} \underbrace{\left[\frac{1}{m} \varepsilon_{mkl} p_k L_l - \frac{k}{r} r_m \right]}_{A_m}$$

Hemos bien demostrado la primera relación

$$\{L_i, A_j\} = \varepsilon_{ijm} A_m$$

Para la segunda relación, tenemos

$$\begin{aligned} \{A_i, A_j\} &= \left\{ \frac{1}{m} \varepsilon_{irs} p_r L_s - k \frac{r_i}{r}, A_j \right\} = \left\{ \frac{1}{m} \varepsilon_{irs} p_r L_s, A_j \right\} + \left\{ -k \frac{r_i}{r}, A_j \right\} \\ &= \frac{1}{m} \varepsilon_{irs} \left[p_r \underbrace{\{L_s, A_j\}}_{\varepsilon_{sjk} A_k} + \{P_r, A_j\} L_s \right] - k \left\{ \frac{r_i}{r}, A_j \right\} \end{aligned}$$

Descomponiendo un poco este calculo, tenemos

$$\begin{aligned} \{p_r, A_j\} &= \left\{ p_r, \frac{1}{m} \varepsilon_{jkl} p_k L_l - k \frac{r_j}{r} \right\} = \frac{1}{m} \varepsilon_{jkl} p_k \underbrace{\{p_r, L_l\}}_{\varepsilon_{rlm}} - k \left\{ p_r, \frac{r_j}{r} \right\} \\ &= \frac{1}{m} \varepsilon_{lrm} \varepsilon_{lkj} p_m p_k - k \left(-\frac{1}{r} \delta_{jr} + \frac{r_j r_r}{r^3} \right) \\ &= \frac{1}{m} (p_j p_r - \delta_{rj} p^2) + \frac{k}{r} \delta_{jr} - k \frac{r_j r_r}{r^3} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\left\{\frac{r_i}{r}, A_j\right\} &= \left\{\frac{r_i}{r}, \frac{1}{m}\varepsilon_{jkl}p_k L_l - k\frac{r_j}{r}\right\} = \frac{1}{m}\varepsilon_{jkl}\left\{\frac{r_i}{r}, p_k L_l\right\} \\ &= \frac{1}{m}\varepsilon_{jkl}\left[p_k\left\{\frac{r_i}{r}, L_l\right\} + \underbrace{\left\{\frac{r_i}{r}, p_k\right\}}_{\frac{\delta_{ik} - \frac{r_i r_k}{r^3}}{r}} L_l\right]\end{aligned}$$

pero el primer corchete es

$$\left\{\frac{r_i}{r}, L_l\right\} = \varepsilon_{lmn}\left\{\frac{r_i}{r}, r_m p_n\right\} = \varepsilon_{lmn} r_m \underbrace{\left\{\frac{r_i}{r}, p_n\right\}}_{\frac{\delta_{in} - \frac{r_i r_n}{r^3}}{r}}$$

lo que implica

$$\left\{\frac{r_i}{r}, A_j\right\} = \frac{1}{m}\varepsilon_{jkl}\left[\varepsilon_{lmi}\frac{r_m}{r}p_k - \underbrace{\varepsilon_{lmn} \cdot r_m r_n}_{=0}\frac{r_i}{r^3}p_k + \frac{\delta_{ik}}{r}L_l - \frac{r_i r_k}{r^3}L_l\right]$$

Juntando todo, obtenemos

$$\begin{aligned}\{A_i, A_j\} &= \frac{1}{m}\varepsilon_{irs}\left[\varepsilon_{sjk}A_k p_r + \left(\frac{1}{m}(p_j p_r - \delta_{rj}\vec{p}^2) + \frac{k}{r}\delta_{jr} - k\frac{r_j r_r}{r^3}\right)L_s\right] \\ &\quad - \frac{k}{m}\varepsilon_{jkl}\left[\varepsilon_{lmi}\frac{r_m}{r}p_k + \frac{\delta_{ik}}{r}L_l - \frac{r_i r_k}{r^3}L_l\right] \\ &= \frac{1}{m}\left[\delta_{ij}\vec{A} \cdot \vec{p} - A_i p_j + \frac{1}{m}\varepsilon_{irs}p_r p_j L_s - \frac{1}{m}\varepsilon_{ijs}\vec{p}^2 L_s + \frac{k}{r}\varepsilon_{ijs}L_s - \frac{k}{r^3}\varepsilon_{irs}r_j r_r L_s\right] \\ &\quad - \frac{k}{m}\left[\frac{r_j}{r}p_i - \delta_{ij}\frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r} + \varepsilon_{jil}\frac{L_p}{r} - \frac{1}{r^3}\varepsilon_{jkl}r_i r_k L_l\right]\end{aligned}$$

Usando la definición de \vec{A} , obtenemos

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{p} &= -\frac{k}{r}\vec{r} \cdot \vec{p} \\ A_i p_j &= \frac{1}{m}\varepsilon_{irs}p_r p_j L_s - \frac{k}{r}r_i p_j\end{aligned}$$

que usamos en la expresión previa para obtener

$$\{A_i, A_j\} = \frac{k}{r_m}(r_i p_j - r_j p_i) + 2\frac{k}{mr}\varepsilon_{ijl}L_l - \frac{\vec{p}^2}{m^2}\varepsilon_{ijl}L_l + \frac{k}{mr^3}\varepsilon_{jkl}r_i r_k L_l - \frac{k}{mr^3}\varepsilon_{ikl}r_j r_k L_l$$

El penúltimo termino se simplifica en

$$\begin{aligned}\varepsilon_{jkl}r_i r_k L_l &= \varepsilon_{jkl}r_i r_k \varepsilon_{lmn}r_m p_n = \varepsilon_{jkl}\varepsilon_{lmn}r_i r_k r_m p_n \\ &= (\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km})r_i r_k r_m p_n = r_i r_j \vec{r} \cdot \vec{p} - r_i p_j r^2\end{aligned}$$

y el último

$$\varepsilon_{ikl} r_j r_k L_l = r_i r_j \vec{r} \cdot \vec{p} - r_j p_i \vec{r}^2$$

lo que nos permite obtener

$$\begin{aligned} \{A_i, A_j\} &= \frac{k}{rm} (r_i p_j - r_j p_i - r_i p_j + r_j p_i) + \varepsilon_{ijl} \left[2 \frac{k}{mr} - \frac{\vec{p}^2}{m^2} \right] L_l \\ &= -\frac{2}{m} \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{k}{r} \right) \varepsilon_{ijl} L_l \end{aligned}$$

3.6 Transformaciones canónicas

Hemos visto en el formalismo lagrangiano que para cualquier transformación $q_i \mapsto Q_i(q_j)$ las ecuaciones de Lagrange guardan su forma. Queremos hacer lo mismo con las variables (q_i, p_i) es decir considerando las transformaciones de las variables

$$\begin{aligned} q_i &\mapsto Q_i(q, p) \\ p_i &\mapsto P_i(q, p) \end{aligned}$$

Pero una transformación tan genérica de este tipo (mucho mas genérica que para L) no deja siempre las ecuaciones de Hamilton idénticas. Las transformaciones que dejan las ecuaciones de Hamilton similares se llaman transformaciones canónicas. Hemos visto que las ecuaciones de Hamilton se pueden escribir

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= J \cdot \frac{\partial H}{\partial \vec{x}} \\ \text{con } \vec{x} &= (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)^\top \end{aligned}$$

y J la matriz simpléctica. Por lo tanto, la transformación de coordenadas, se escribe $x_i \mapsto y_i(x)$

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \dot{x}_j = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} J_{jk} \frac{\partial H}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial H}{\partial x_k} = \frac{\partial H}{\partial y_m} \frac{\partial y_m}{\partial x_k} \\ &= \frac{\partial y_i}{\partial x_j} J_{jk} \frac{\partial y_m}{\partial x_k} \frac{\partial H}{\partial y_m} \end{aligned}$$

Si

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} J_{jk} \frac{\partial y_m}{\partial x_k} = J_{im}$$

la ecuación de Hamilton será

$$\dot{y}_i = J_{im} \frac{\partial H}{\partial y_m}$$

es decir que guarda su forma. Por lo tanto, una transformación es canónica si

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} J_{jk} \frac{\partial y_m}{\partial x_k} = J_{im}$$

Sabiendo que $\frac{\partial y_i}{\partial x_j}$ define una matriz, el jacobiano, \mathcal{J} . Concluimos que la transformación es canónica si el jacobiano de la transformación es simpléctico, i.e.

$$\mathcal{J} \mathcal{J} \mathcal{J}^\top = J$$

Por ejemplo, la transformación siguiente es canónica

$$Q_1 = q_1, \quad Q_2 = p_2, \quad P_1 = p_1, \quad P_2 = -q_2$$

de hecho, el jacobiano es

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_1}{\partial q_2} & \frac{\partial Q_1}{\partial p_1} & \frac{\partial Q_1}{\partial p_2} \\ \frac{\partial Q_2}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_2}{\partial q_2} & \frac{\partial Q_2}{\partial p_1} & \frac{\partial Q_2}{\partial p_2} \\ \frac{\partial P_1}{\partial q_1} & \frac{\partial P_1}{\partial q_2} & \frac{\partial P_1}{\partial p_1} & \frac{\partial P_1}{\partial p_2} \\ \frac{\partial P_2}{\partial q_1} & \frac{\partial P_2}{\partial q_2} & \frac{\partial P_2}{\partial p_1} & \frac{\partial P_2}{\partial p_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

lo que implica

$$\mathcal{J} \mathcal{J} \mathcal{J}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J$$

El corchete de Poisson es invariante bajo transformaciones canónicas, es decir que tenemos con las nuevas variables

$$\{Q_i, Q_j\} = 0, \quad \{P_i, P_j\} = 0, \quad \{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}$$

Además de que cualquier transformación que tiene estas relaciones, es canónica. Lo que nos permite demostrar si una transformación es canónica. Por ejemplo, con la

transformación previa, $Q_1 = q_1, Q_2 = p_2, P_1 = p_1, P_2 = -q_2$, obtenemos

$$\begin{aligned}\{Q_1, Q_2\} &= \{q_1, p_2\} = 0 \\ \{P_1, P_2\} &= \{p_1, -q_2\} = 0 \\ \{Q_1, P_1\} &= \{q_1, p_1\} = 1 \\ \{Q_1, P_2\} &= \{q_1, -q_2\} = 0 \\ \{Q_2, P_1\} &= \{p_2, p_1\} = 0 \\ \{Q_2, P_2\} &= \{p_2, -q_2\} = -\{p_2, q_2\} = -(-1) = 1\end{aligned}$$

Por lo tanto, es una transformación canónica.

Para demostrar este teorema, consideramos dos funciones $f(x), g(x)$ con $x = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)^\top$ y queremos demostrar que el corchete de Poisson es invariante bajo transformaciones canónicas.

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} J_{ij} \frac{\partial g}{\partial x_j}$$

Consideramos una transformación $x_i \mapsto y_i(x)$ es decir $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial y_k} \mathcal{J}_{ki}$

$$\begin{aligned}\{f, g\} &= \frac{\partial f}{\partial x_i} J_{ij} \frac{\partial g}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial f}{\partial y_k} \mathcal{J}_{ki} J_{ij} \mathcal{J}_{lj} \frac{\partial g}{\partial y_l} \\ &= \frac{\partial f}{\partial y_k} J_{kl} \frac{\partial g}{\partial y_l}\end{aligned}$$

ya que $\mathcal{J}_{ki} J_{ij} \mathcal{J}_{lj} = \mathcal{J}_{ki} J_{ij} \mathcal{J}_{jl}^T = J_{kl}$ si es una transformación canónica.

Queremos ahora demostrar la relación inversa, es decir que si los corchetes de Poisson no cambian, la transformación es canónica. Considerando de nuevo la transformación $q_i \mapsto Q_i(q, p)$ y $p_i \mapsto P_i(q, p)$. El jacobiano de esta transformación es

$$\mathcal{J}_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} & \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \\ \frac{\partial P_i}{\partial q_j} & \frac{\partial P_i}{\partial p_j} \end{pmatrix}$$

obtenemos

$$\mathcal{J} \mathcal{J}^\top = \begin{pmatrix} \{Q_i, Q_j\} & \{Q_i, P_j\} \\ \{P_i, Q_j\} & \{P_i, P_j\} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, si las variables conservan la estructura de corchete de Poisson, obtenemos

$$\mathcal{J}\mathcal{J}^\top = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{n \times n} \\ -\mathbb{1}_{n \times n} & 0 \end{pmatrix} = J$$

es decir que la transformación es canónica.

Por ejemplo la transformación $Q = e^q$ y $P = e^{-q}p$ es canónica. Lo podemos demostrar de dos maneras, con los corchetes de Poisson o con el jacobiano. Usando los corchetes, tenemos

$$\begin{aligned} \{Q, Q\} &= \{P, P\} = 0 \\ \{Q, P\} &= \frac{\partial e^q}{\partial q} \frac{\partial e^{-q}p}{\partial p} = e^q e^{-q} = 1 \end{aligned}$$

lo que implica que es una transformación canónica. Por otro lado, usando el segundo método, obtenemos

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^q & 0 \\ -e^{-q}p & e^{-q} \end{pmatrix}$$

lo que implica

$$\begin{aligned} \mathcal{J}\mathcal{J}^\top &= \begin{pmatrix} e^q & 0 \\ -pe^{-q} & e^{-q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^q & -pe^{-q} \\ 0 & e^{-q} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^q & 0 \\ -pe^{-q} & e^{-q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e^{-q} \\ -e^q & pe^{-q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = J \end{aligned}$$

Las transformaciones canónicas significan que tenemos la misma física con 2 sistemas de variables diferentes. Por lo tanto, podemos usar estas transformaciones, para escribir el hamiltoniano de forma más simple. Por ejemplo si

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$$

Las ecuaciones de Hamilton son

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -kq \end{aligned}$$

Con el nuevo sistema, tenemos $Q = e^q$ y $P = pe^{-q}$, es decir $q = \ln Q$ y $p = QP$, lo que transforma el hamiltoniano en

$$\tilde{H} = \frac{Q^2 P^2}{2m} + \frac{1}{2}k(\ln Q)^2$$

con exactamente las mismas formas de las ecuaciones, es decir

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = \frac{Q^2 P}{m} \\ \dot{P} &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = -\frac{QP^2}{m} - k\frac{\ln Q}{Q}\end{aligned}$$

Parecen muy diferentes pero son las mismas ecuaciones del oscilador armónico, lo que se puede verificar muy simplemente. Algunas transformaciones canónicas pueden simplificar mucho el problema aunque en este ejemplo las ecuaciones se han vuelto más complejas.

Para cerrar esta sección, podemos ver como resolver un problema con un cambio de coordenadas. Consideramos el oscilador armónico con el hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2, \quad \text{con } \omega^2 = \frac{k}{m}$$

podemos proponer el cambio de coordenadas (q, p) a (Q, P) tal que

$$\begin{aligned}Q &= \arctan\left(m\omega\frac{q}{p}\right) \\ P &= \frac{1}{2m\omega}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right)\end{aligned}$$

Primero tenemos que verificar que es bien una transformación canónica. Es fácil verificar que $\{Q, P\} = 1$. Por lo tanto, sabemos que las ecuaciones de Hamilton guardan su forma con el nuevo hamiltoniano escrito con estas coordenadas $\tilde{H} = \omega P$. Obtenemos

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = \omega \\ \dot{P} &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = 0\end{aligned}$$

lo que implica la solución trivial

$$\begin{aligned}Q &= \omega t + \phi \\ P &= P_0 \equiv \frac{E}{\omega}\end{aligned}$$

con E la energía del sistema y ϕ una constante de integración. Sabiendo que la transformación inversa se escribe

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q \\ p &= \sqrt{2m\omega P} \cos Q \end{aligned}$$

obtenemos la solución en las coordenadas originales

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \phi) \\ p &= \sqrt{2mE} \cos(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

3.7 Transformaciones infinitesimales

Dentro de todas las transformaciones canónicas posible, podemos estudiar las transformaciones infinitesimales, es decir

$$\begin{aligned} q_i &\longmapsto q_i + \alpha Q_i(q, p) \equiv \tilde{q}_i \\ p_i &\longmapsto p_i + \alpha P_i(q, p) \equiv \tilde{p}_i \end{aligned}$$

con $\alpha \ll 1$. Buscamos las funciones Q_i, P_i tal que la transformación sea canónica. El jacobiano de la transformación es

$$\mathcal{J}_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q_j} & \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial p_j} \\ \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial q_j} & \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial p_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{ij} + \alpha \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} & \alpha \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \\ \alpha \frac{\partial P_i}{\partial q_j} & \delta_{ij} + \alpha \frac{\partial P_i}{\partial p_j} \end{pmatrix}$$

para que la transformación sea canónica, necesitamos $\mathcal{J}\mathcal{J}^\top = J$ es decir

$$\frac{\partial P_i}{\partial p_j} = -\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}$$

lo que significa que si existe una función $G(q, p)$ tal que

$$P_i = -\frac{\partial G}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial G}{\partial p_i}$$

Se dice que G genera la transformación. Estas visiones nos permite ver las transformaciones canónicas de otra manera. Por el momento, hemos visto un espacio de fase con coordenadas (q, p) y el cambio a (Q, P) era similar a un cambio de coordenadas en el mismo punto. Es una forma pasiva. Existe una visión activa en la cual consideramos una familia de transformaciones

$$\begin{aligned} q_i &\longmapsto Q_i(q, p, \alpha) \\ p_i &\longmapsto P_i(q, p, \alpha) \end{aligned}$$

tal que sea una transformación canónica para cualquier α y $Q_i(q, p, 0) = q_i$, $P_i(q, p, 0) = p_i$. En ese caso, veamos un desplazamiento en el espacio de fase del punto (q_i, p_i) a $(Q_i(q, p, \alpha), P_i(q, p, \alpha))$. El vector tangente a estas líneas tiene coordenadas $(\frac{dq_i}{d\alpha}, \frac{dp_i}{d\alpha})$. Pero, sabemos que alrededor de $\alpha = 0$, tenemos

$$Q_i = q_i + \alpha \frac{\partial G}{\partial p_i}$$

$$P_i = p_i - \alpha \frac{\partial G}{\partial q_i}$$

es decir

$$\frac{dq_i}{d\alpha} = \frac{\partial G}{\partial p_i} \tag{3.5}$$

$$\frac{dp_i}{d\alpha} = -\frac{\partial G}{\partial q_i} \tag{3.6}$$

Por ejemplo, dado una función $G(q, p)$ podemos obtener la órbita de un punto. Si consideramos $G = \frac{1}{2} (q^2 + p^2)$, obtenemos

$$\frac{dq}{d\alpha} = p$$

$$\frac{dp}{d\alpha} = -q$$

es decir

$$\frac{d^2q}{d\alpha^2} = -q$$

lo que implica

$$q(\alpha) = A \cos \alpha + B \sin \alpha$$

$$p(\alpha) = -A \sin \alpha + B \cos \alpha$$

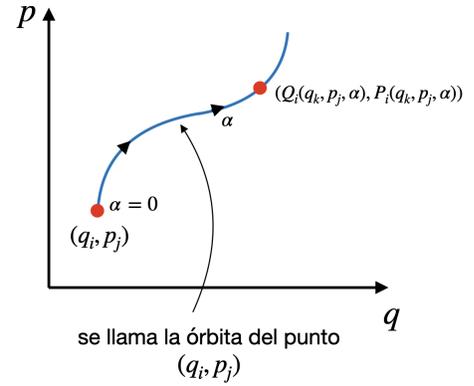
pero cuando $\alpha = 0$, tenemos $q(0) = q$ y $p(0) = p$

$$q(\alpha) = q \cos \alpha + p \sin \alpha$$

$$p(\alpha) = -q \sin \alpha + p \cos \alpha$$

lo que podemos escribir

$$q(x)^2 + p(x)^2 = 1$$



es decir que las orbitas son círculos.

Estas ecuaciones (3.5, 3.6) son muy parecidas a las ecuaciones de Hamilton. Por lo tanto, cada familia de transformaciones canónicas, con parámetro α , puede ser visto como un movimiento en el espacio de fase (un flujo) donde G juega el rol del hamiltoniano y α el parámetro de tiempo. De forma inversa, la evolución en el tiempo puede ser visto como una transformación canónica de $(q_i(t_0), p_i(t_0))$ a $(q_i(t), p_i(t))$ con H el generador de la evolución temporal.

Por ejemplo, si $G = p_j$

$$\begin{aligned} q_i &\longmapsto q_i + \alpha \frac{\partial G}{\partial p_i} = q_i + \alpha \delta_{ij} \\ p_i &\longmapsto p_i - \alpha \frac{\partial G}{\partial q_i} = p_i \end{aligned}$$

lo que corresponde a una traslación en el espacio de fase, es decir que la traslación q_i esta generada por el momento p_i (lo que parece al teorema de Noether).

También el generador de las rotaciones es el momento angular. De hecho, considerando la familia de transformaciones en el espacio de fase (q_1, q_2, p_1, p_2) correspondiendo a una rotación de ángulo α .

$$\begin{aligned} q_1(\alpha) &= q_1 \cos \alpha + q_2 \sin \alpha \\ q_2(\alpha) &= q_2 \cos \alpha - q_1 \sin \alpha \\ p_1(\alpha) &= p_1 \cos \alpha + p_2 \sin \alpha \\ p_2(\alpha) &= p_2 \cos \alpha - p_1 \sin \alpha \end{aligned}$$

De forma infinitesimal, tenemos

$$\begin{aligned} q_1(\alpha) &= q_1 + \alpha q_2 \\ q_2(\alpha) &= q_2 - \alpha q_1 \\ p_1(\alpha) &= p_1 + \alpha p_2 \\ p_2(\alpha) &= p_2 - \alpha p_1 \end{aligned}$$

lo que implica que el generador es G tal que

$$\begin{aligned} q_2 &= \frac{\partial G}{\partial p_1} \\ -q_1 &= \frac{\partial G}{\partial p_2} \\ p_2 &= -\frac{\partial G}{\partial q_1} \\ -p_1 &= -\frac{\partial G}{\partial q_2} \end{aligned}$$

es decir que $G = q_2p_1 - q_1p_2$, lo que corresponde al momento angular L_3 ($L_z = yp_x - xp_y$).

Eso nos motiva a ver el teorema de Noether de otra manera. Consideramos una transformación canónica infinitesimal generada por G . Bajo esta transformación, el hamiltoniano cambia de

$$\begin{aligned}\delta H &= \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \\ &= \alpha \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \alpha \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} = \alpha \{H, G\}\end{aligned}$$

Este generador G es una simetría si el hamiltoniano no cambia, es decir si $\delta H = 0$ o si $\{H, G\} = 0$. Pero hemos visto que $\dot{G} = \{G, H\}$ es decir $\dot{G} = 0$ lo que implica que G es conservado. En resumen,

- Si G es una simetría, G es conservado
- Si G es conservado, podemos siempre encontrar una transformación canónica que es una simetría.

3.8 Funciones generatrices

Una de las principales razones por las que el formalismo hamiltoniano es más útil que el lagrangiano es que el conjunto de transformaciones de coordenadas que dejan invariante la forma de las ecuaciones de Hamilton es mucho más amplio que el conjunto de transformaciones de coordenadas que dejan invariante la forma de las ecuaciones de Lagrange. En el caso de transformaciones canónicas infinitesimales, hemos encontrado una manera de obtenerlas con una función generatriz, $G(q, p)$ tal que

$$\begin{aligned}q_i &\longmapsto q_i + \alpha \frac{\partial G}{\partial p_i} \\ p_i &\longmapsto p_i - \alpha \frac{\partial G}{\partial q_i}\end{aligned}$$

Lo que sería bueno es tener una manera de obtener transformaciones canónicas (no infinitesimales) a partir de funciones generatrices. Para eso, vamos a hacer un análisis general es decir que el hamiltoniano o el cambio de coordenadas puede depender del tiempo. Para simplificar las notaciones, usaremos un sistema de un grado de libertad es decir que tenemos $H = H(q, p, t)$. Queremos encontrar transformaciones $Q = Q(q, p, t)$, $P = P(q, p, t)$ que mantengan la forma de las ecuaciones de Hamilton. Es decir de las ecuaciones

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}.$$

llegaremos a las ecuaciones

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P}, \quad \frac{dP}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q},$$

con \tilde{H} el nuevo hamiltoniano que podría ser el hamiltoniano anterior con las nuevas coordenadas o una nueva función. Suponiendo que la transformación $Q = Q(q, p, t)$, $P = P(q, p, t)$ es diferenciable y se puede invertir, es decir, es posible encontrar q y p en términos de Q, P , y t y, por lo tanto, H se puede ver también como una función de Q, P , y t . Haciendo uso repetidamente de la regla de la cadena, encontramos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} &= \frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial Q}{\partial t} \\ &= \frac{\partial Q}{\partial q} \left(\frac{\partial H}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial p} \right) - \frac{\partial Q}{\partial p} \left(\frac{\partial H}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial H}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial q} \right) + \frac{\partial Q}{\partial t} \\ &= \frac{\partial H}{\partial P} \left(\frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} \right) + \frac{\partial Q}{\partial t} \\ &= \frac{\partial H}{\partial P} \{Q, P\} + \frac{\partial Q}{\partial t}, \end{aligned}$$

De forma similar, tenemos

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = \frac{\partial H}{\partial Q} \{Q, P\} - \frac{\partial P}{\partial t}$$

Considerando que la transformación es canónica, tenemos $\{Q, P\} = 1$ lo que implica

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = \frac{\partial H}{\partial P} + \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = \frac{\partial H}{\partial Q} - \frac{\partial P}{\partial t} \quad (3.8)$$

Recubrimos el resultado anterior, es decir que en el caso de transformaciones que no dependen del tiempo, tenemos $\tilde{H} = H$. El nuevo hamiltoniano está obtenido a partir del hamiltoniano original usando las nuevas coordenadas.

Es fácil demostrar que la expresión $p \, dq - P \, dQ + (\tilde{H} - H) \, dt$ es una forma diferencial exacta, es decir que (al menos localmente) existe una función F tal que

$$dF = p \, dq - P \, dQ + (\tilde{H} - H) \, dt$$

De forma genérica, una forma diferencial exacta $dF = \sum_i A_i dx^i$ se puede demostrar usando que

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^j} = \frac{\partial A_j}{\partial x^i}$$

ya que las derivadas conmutan $\frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^j \partial x^i}$

Por lo tanto, para demostrar que nuestra expresión es una diferencial exacta, reescribimos

$$\begin{aligned} p \, dq - P \, dQ + (\tilde{H} - H) \, dt &= p \, dq - P \left(\frac{\partial Q}{\partial q} \, dq + \frac{\partial Q}{\partial p} \, dp + \frac{\partial Q}{\partial t} \, dt \right) + (\tilde{H} - H) \, dt \\ &= \left(p - P \frac{\partial Q}{\partial q} \right) \, dq - P \frac{\partial Q}{\partial p} \, dp + \left(-P \frac{\partial Q}{\partial t} + \tilde{H} - H \right) \, dt \end{aligned}$$

Podemos fácilmente verificar que

$$\frac{\partial}{\partial q} \left(P \frac{\partial Q}{\partial t} + H - \tilde{H} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(P \frac{\partial Q}{\partial q} - p \right)$$

De hecho,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q} \left(P \frac{\partial Q}{\partial t} + H - \tilde{H} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(P \frac{\partial Q}{\partial q} - p \right) &= \frac{\partial P}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial t} \frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial(H - \tilde{H})}{\partial q} \\ &= -\frac{\partial P}{\partial q} \frac{\partial(H - \tilde{H})}{\partial P} - \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial(H - \tilde{H})}{\partial Q} + \frac{\partial(H - \tilde{H})}{\partial q} = 0. \end{aligned}$$

donde hemos usado las relaciones (3.7, 3.8) y la relación $\partial p / \partial t = 0$ ya que (q, p, t) son 3 variables independientes.

De forma similar tenemos las otras relaciones como por ejemplo

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(P \frac{\partial Q}{\partial q} - p \right) = \frac{\partial}{\partial q} \left(P \frac{\partial Q}{\partial p} \right)$$

que corresponde a la condición de una transformación canónica $\{Q, P\} = 1$. Por lo tanto, existe localmente una función de (q, Q, t) tal que

$$dF = p \, dq - P \, dQ + (\tilde{H} - H) \, dt \tag{3.9}$$

lo que implica las ecuaciones

$$P = -\frac{\partial F}{\partial Q}, \quad p = \frac{\partial F}{\partial q}, \quad \tilde{H} - H = \frac{\partial F}{\partial t}$$

Esta función es llamada una función generatriz de primera categoría, y se denota $F_1(q, Q, t)$. En resumen, podemos definir una función $F_1(q, Q, t)$ tal que el nuevo hamiltonian es

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

y las otras coordenadas son

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q}, \quad p = \frac{\partial F_1}{\partial q}$$

de tal forma que las ecuaciones de Hamilton sean similares

$$\dot{Q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P}, \quad \dot{P} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q}$$

Por ejemplo, por la función $F_1(q, Q) = qQ$, tenemos

$$P = -q, \quad p = Q$$

es decir que esta función generatriz intercambia esencialmente las coordenadas y los momentos.

Podemos definir tres otras funciones generatrices (con una variable antigua y una variable nueva) tal que

$F_2(q, P)$	$F_3(p, Q)$	$F_4(p, P)$
$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$	$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}$	$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}$
$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$	$P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}$	$Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}$

Estas funciones pueden ser construidas como transformadas de Legendre de F_1 . Es decir $F_2(q, P) = F_1(q, Q) + QP$, $F_3(p, Q) = F_1(q, Q) - qp$ y $F_4(p, P) = F_3(p, Q) + QP = F_1(q, Q) - qp + QP$. Por ejemplo

$$dF_2 = dF_1 + Q dP + P dQ = p dq + Q dP + (\tilde{H} - H) dt$$

lo que implica bien las relaciones

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$$

Un ejemplo trivial, es la función $F_2 = qP$, por la cual tenemos

$$p = P, \quad Q = q$$

lo que corresponde a la transformación identidad.

De forma menos trivial, si tenemos el hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2q^2} + \frac{p^2 q^4}{2}$$

podemos usar una función generatriz de tercer tipo $F_3(p, Q) = p/Q$ tal que

$$q = -\frac{\partial F_3}{\partial p} = -\frac{1}{Q}, \quad P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q} = \frac{p}{Q^2}$$

lo que implica que

$$q = -\frac{1}{Q}, \quad p = PQ^2$$

el nuevo hamiltoniano es

$$\tilde{H} = \frac{P^2}{2} + \frac{Q^2}{2}$$

es decir el hamiltoniano del oscilador armónico que obviamente sabemos resolver.

3.9 Ecuación de Hamilton-Jacobi

Dentro de todas las transformaciones posibles, existe una transformación que transforma el hamiltoniano $H(q, p, t)$ en el nuevo hamiltoniano $\tilde{H}(Q, P, t) = 0$. En este caso, tendríamos las ecuaciones de Hamilton siguientes

$$\dot{Q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = 0, \quad \dot{P} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = 0$$

es decir que $Q = Q_0$ y $P = P_0$, dos constantes. El hamiltoniano es inicialmente una función de (q, p, t) , pero si consideramos que S es una función generatriz de segundo tipo, tenemos $p = \partial S / \partial q$, lo que implica que la ecuación $\tilde{H} = 0$ nos da

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0$$

Es la ecuación de Hamilton-Jacobi; transforma un problema de varias ecuaciones ordinarias, las ecuaciones de Hamilton, en una ecuación diferencial parcial para la función generatriz S .

Por ejemplo, si consideramos el caso de una partícula libre descrito por el hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2}$$

obtenemos la ecuación

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 = 0$$

Podemos buscar una solución usando un ansatz tal que $S = f(t) + g(q)$, lo que implica

$$f'(t) = -\frac{g'(q)^2}{2} = \text{constante} \equiv -E$$

es decir $f(t) = -Et$ y $g(q) = \pm\sqrt{2E}q + A$ con A una constante de integración. En resumen, nuestra función generatriz es (la constante A es irrelevante)

$$S(t, q, P) = -Et \pm \sqrt{2E}q$$

Podemos identificar la constante E con la constante $P = P_0$, ya que como el hamiltoniano es nulo, tenemos $Q = Q_0$ y $P = P_0$. Por ejemplo, podemos definir $E = P_0$ lo que implica

$$S = -P_0t \pm \sqrt{2P_0}q$$

Por ser una función generatriz de segundo tipo, tenemos

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \pm\sqrt{2P_0}, \quad Q_0 = \frac{\partial S}{\partial P_0} = -t \pm \frac{q}{\sqrt{2P_0}}$$

es decir

$$q = \pm\sqrt{2P_0}(t + Q_0), \quad p = \pm\sqrt{2P_0}$$

lo que corresponde bien a la solución de una partícula libre.

4. Mecánica simpléctica

4.1 Motivación

Es fácil pensar en un espacio de fase de dimensión $2N$ simplemente como \mathbb{R}^{2N} , y generalmente esto es lo que se hace en tratamientos elementales. Sin embargo, hay muchos espacios de fase que no se pueden poner en esta forma. Como hemos visto, el espacio de fase correspondiente a un péndulo simple no es \mathbb{R}^2 , sino más bien $S^1 \times \mathbb{R}$: un cilindro, no un plano infinito. Esto refleja el hecho de que la coordenada angular solo tiene sentido definida módulo 2π ; los puntos θ y $\theta + 2\pi$ son en realidad el mismo punto, por lo que no deberíamos modelar la coordenada angular como un punto en una línea, sino más bien como un punto en un círculo.

Esto nos motiva a intentar definir la dinámica hamiltoniana en espacios más generales que solo \mathbb{R}^{2N} . Como hemos visto, un punto en un espacio de fase de dimensión $2N$ se puede etiquetar con una colección de N coordenadas de posición y N coordenadas de momento. Si F y G son funciones suaves de los q y p , entonces el corchete de Poisson F, G está dado por

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i}$$

Prácticamente toda la mecánica hamiltoniana se puede expresar en términos del corchete de Poisson, así que si podemos generalizar esto a espacios más interesantes que solo \mathbb{R}^{2N} , habríamos logrado nuestro objetivo.

En términos muy generales, de una función F podemos definir fácilmente su diferencial dF , que conoceremos como una forma, pero también podemos asociar a un hamiltoniano H un vector que indique el flujo de este campo X_H .

Supongamos que M es un espacio que podría tener una topología muy complicada. ¿Qué estructura adicional se necesita para definir la dinámica en M ? Queremos convertir un hamiltoniano H (es decir, cualquier función suave en M) en un campo vectorial V . Entonces, la dinámica consiste en el flujo a lo largo de las curvas integrales de V .

Primero, notemos que el campo vectorial V debe depender solo del diferencial dH . Esto tiene sentido, ya que la dinámica debería depender solo de cómo cambia la energía localmente, y no, por ejemplo, de una constante aditiva global.

Segundo, V debería depender linealmente de dH . Esto equivale a afirmar que las leyes de Newton son ecuaciones diferenciales lineales, lo cual es cierto. Este objeto dH se llama una 1-forma, como veremos. Así que necesitamos introducir una estructura adicional, que pueda transformar nuestra 1-forma en un vector. Este objeto necesita ser invertible para asociar a cada vector una 1-forma y viceversa. Por lo tanto, podemos

asumir que la ecuación debe ser de la siguiente forma:

$$\forall X, \quad \omega(V, X) = dH(X)$$

Como hemos visto, dH es una 1-forma o covector, así que $dH(X)$ es un número real. Por lo tanto, si tenemos un número real en el lado derecho, necesitamos lo mismo en el lado izquierdo. Por lo tanto, hemos introducido un objeto que necesita ser una forma bilineal que asocie a dos vectores un número real.

Hasta ahora tenemos un espacio M con un campo tensorial no degenerado ω . Sin embargo, no todos esos campos tensoriales servirán, ya que aún no hemos usado mucha información sobre las leyes de la física. La siguiente restricción es la conservación de la energía. ¿Bajo qué condiciones sobre ω se conserva la energía?

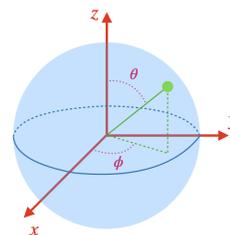
Lo que significa en nuestra situación es que el hamiltoniano H es constante a lo largo de las líneas de flujo de nuestro campo vectorial V . En otras palabras, $(dH)(V) = 0$. En términos de ω , eso significa que $\omega(V, V) = 0$. Esto debe ser válido para todos los campos vectoriales V que provienen de hamiltonianos, lo que significa que la forma bilineal en cada punto de M debe ser una forma alternante, conocida como una 2-forma.

Finalmente, queremos que nuestras leyes físicas sean invariantes en el tiempo. Eso significa que ω debería ser independiente del tiempo y, como veremos, se traduce en el requisito de tener una 2-forma cerrada, es decir, $d\omega = 0$. Esta 2-forma ω cerrada y no-degenerada nos permite introducir fácilmente un corchete de Poisson.

4.2 Variedad diferencial

En un espacio plano, ocupamos usualmente las coordenadas cartesianas o otras según las simetrías del problema. Pero para un espacio genérico, no hay simetrías, por lo tanto no hay un sistema de coordenadas preferido. Aun peor, puede ocurrir que no podemos ocupar un solo sistema de coordenadas

Si consideramos una 2-esfera, con coordenadas esféricas (θ, ϕ) , podemos ver que no son bien definidas en $\theta = 0, \pi$ ya que ϕ no es definido. Además la coordenada ϕ es discontinua en $\phi = 0$ o $\phi = 2\pi$. Por lo tanto, vamos a necesitar varias coordenadas que cubren todo el espacio. Esta idea es a la base de la noción de variedad.

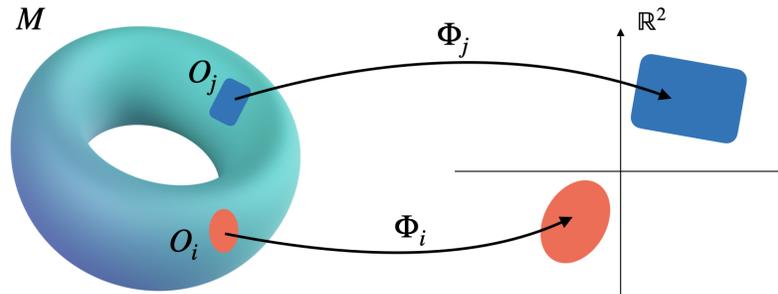


Una variedad diferenciable de dimensión n es un espacio M con una colección de subconjuntos abiertos O_i tal que

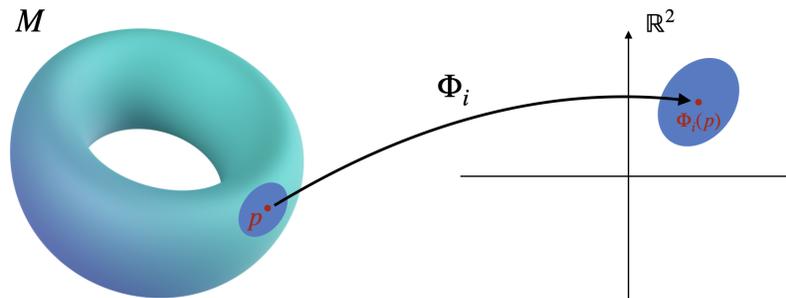
1. $\bigcup_{i=1}^n O_i = M$ (los O_i cubren M)
2. $\forall i$, existe una aplicación biyectiva $\Phi_i : O_i \mapsto U_i$ con U_i un abierto de \mathbb{R}^n (es decir que M es localmente como \mathbb{R}^n)

3. Si $O_i \cap O_j \neq \{\emptyset\}$, $\Phi_j \circ \Phi_i^{-1} : \Phi_i(O_i \cap O_j) \rightarrow \Phi_j(O_i \cap O_j)$ debe ser diferenciable (infinitamente)

Φ_i se llama una carta o sistema de coordenadas y el conjunto $\{\Phi_i\}$ se llama un atlas.



Estas funciones Φ_i nos permiten asociar M o sus partes a un espacio conocido. De esa manera, podemos asignar coordenadas a los puntos de la variedad.

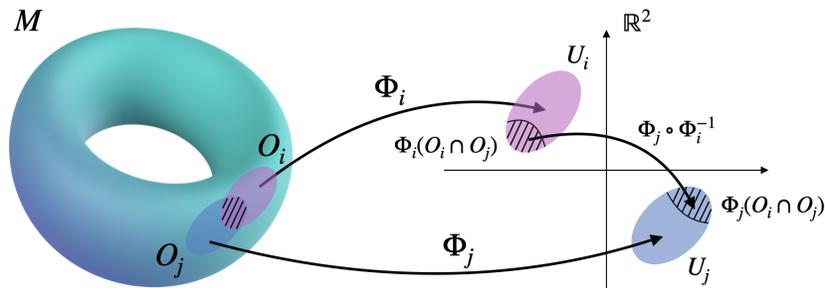


Como $\Phi_i(p)$ es un punto de \mathbb{R}^n (en este caso \mathbb{R}^2), tenemos

$$\Phi_i(p) = (x_i^1(p), x_i^2(p), \dots, x_i^n(p))$$

es decir que $x_i^\alpha(p)$ son las coordenadas de P . Elegir otra aplicación Φ_j que contiene el punto p es elegir otro sistema de coordenadas.

Para el tercer punto de la definición de una variedad, si $\Phi_i \cap \Phi_j \neq \{\emptyset\}$ es decir que existen puntos que pertenecen a ambas cartas, o de forma similar que tenemos dos coordenadas para estos puntos, tenemos que garantizar que podemos pasar de un sistema de coordenadas a otro de forma suave.



Podemos tener como ejemplos, el espacio \mathbb{R}^n que es obviamente una variedad con un atlas compuesto por una sola carta

$$\Phi : (x^1, \dots, x^n) \mapsto (x^1, \dots, x^n)$$

También podemos considerar el círculo S^1 . En ese caso, podríamos usar una sola carta $\phi : S^1 \mapsto [0, 2\pi[$ definido a partir del ángulo θ . Pero $[0, 2\pi[$ no es un abierto, por lo tanto debemos ocupar dos cartas

1. Excluyendo el punto $P = (1, 0)$, es decir $\Phi_1 : S^1 \setminus \{P\} \mapsto]0, 2\pi[$, con $\Phi_1(q) = \theta_1$
2. Excluyendo el punto $Q = (-1, 0)$, es decir $\Phi_2 : S^1 \setminus \{Q\} \mapsto]-\pi, \pi[$, con $\Phi_2(q) = \theta_2$

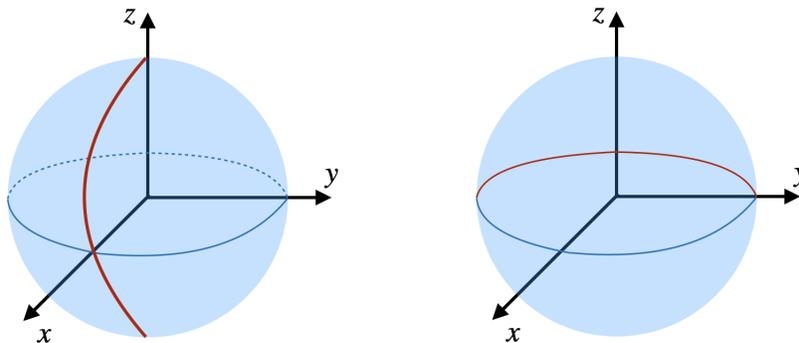
El conjunto de los dos atlas forman S^1 y tienen intersección para la parte arriba $\theta \in]0, \pi[$ y la parte abajo $]\pi, 2\pi[$.

$$\text{Para la primera intersección, } \theta_2 = \Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}(\theta_1) = \theta_1 \quad (\theta_1 \in]0, \pi[)$$

$$\text{Para el segundo caso, } \theta_2 = \Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}(\theta_1) = \theta_1 - 2\pi \quad (\theta_1 \in]\pi, 2\pi[)$$

Las 2 funciones son infinitamente diferenciable ($\theta_2 = \theta_1, \theta_2 = \theta_1 - 2\pi$), lo que nos permite concluir que S^1 es una variable diferenciable.

Para la 2-esfera, podemos hacer el mismo con 2 atlas.



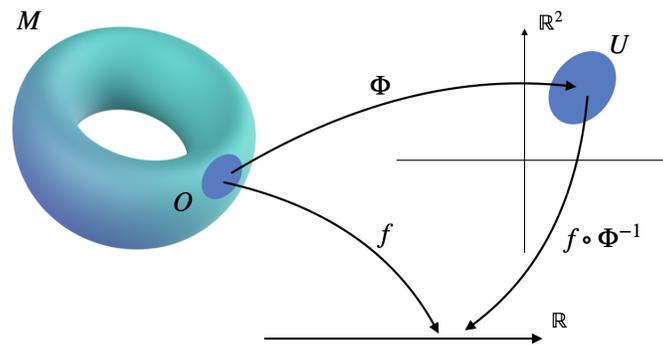
En cada caso, se elimina la línea roja

En el primer caso, con $x = \sin \theta_1 \cos \phi_1$, $y = \sin \theta_1 \sin \phi_1$ y $z = \cos \theta_1$, tenemos $\theta_1 \in]0, \pi[$ y $\phi_1 \in]0, 2\pi[$

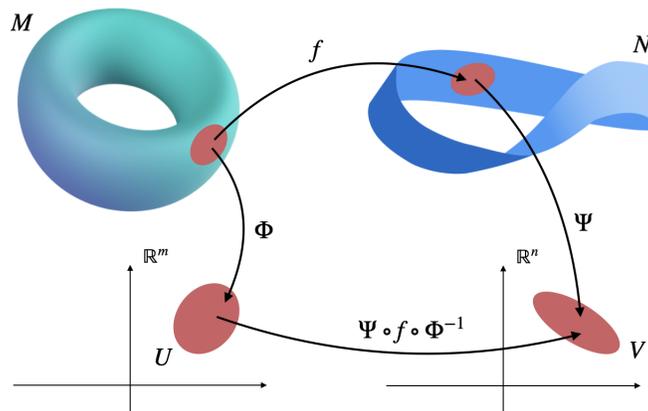
En el segundo caso, con $x = -\sin \theta_2 \cos \phi_2$, $y = \cos \theta_2$ y $z = \sin \theta_2 \sin \phi_2$, tenemos $\theta_2 \in]0, \pi[$ y $\phi_2 \in]0, 2\pi[$

Esta manera de relacionar una variedad M de dimensión n a un espacio \mathbb{R}^n , nos permite extender las nociones conocidas en \mathbb{R}^n a la variedad.

Se dice que $f : M \mapsto \mathbb{R}$ es suave (infinitamente diferenciable) si $f \circ \Phi^{-1} : U \mapsto \mathbb{R}$ es suave para $\forall \Phi$



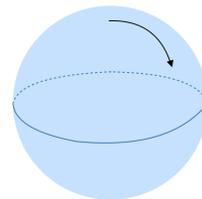
De forma similar $f : M \mapsto N$ es suave (M y N son variedades) si $\Psi \circ f \circ \Phi^{-1} : U \mapsto V$ es suave con $\Phi : M \mapsto U$ y $\Psi : N \mapsto V$



No necesariamente tenemos que $\dim M = \dim N$, pero en el caso que $\dim M = \dim N$ y que f es un homeomorfismo suave, es decir que su inverso existe y que es suave, f es un difeomorfismo. En este caso, se dice que M y N son difeomorfo, se denota $M \cong N$. Es decir que podemos deformar de forma suave M en N (y vice versa).

Como ahora, sabemos definir aplicaciones de un espacio a otro, podemos definir objetos mas complejos como vectores, tensores \dots

Los vectores se vean como flechas rectas que conectan 2 puntos, si este concepto geométrico es fácil imaginar en el espacio \mathbb{R}^n , parece difícil imaginar en un espacio curvo. De hecho, veamos que para una 2-esfera, este *vector* no parece ser una flecha muy recta.



Por lo tanto, es mejor ocupar la definición algebraica de un vector. Por ejemplo, la velocidad de una partícula $\vec{v} = \dot{\vec{x}}$ aparece como una derivada, como un objeto tangente a la curva que define la trayectoria de la partícula.

En dos dimensiones, en el plano (xy) , si consideramos una curva o la trayectoria, podemos aproximar esta curva alrededor de un punto x_0 con la relación

$$y = y(x_0) + a(x - x_0), \quad \text{con } a \equiv \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$$

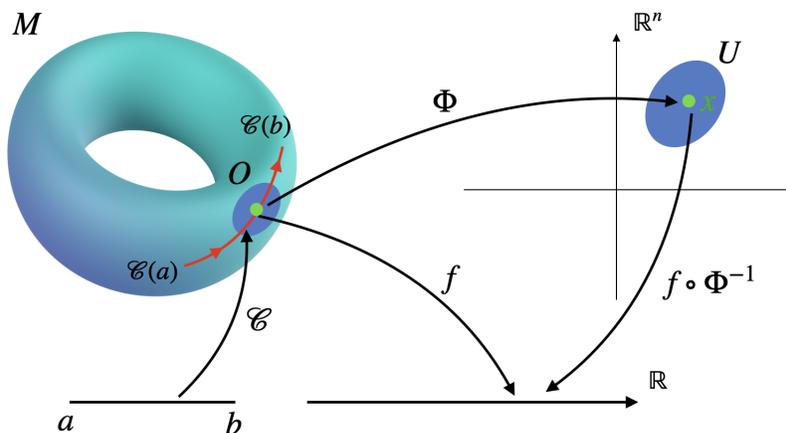
Queremos generalizar esta noción de vector tangente a una variedad. Por lo tanto, necesitamos una curva

$$\mathcal{C}:]a, b[\mapsto M$$

y una función

$$f: M \mapsto \mathbb{R}$$

para hacer cálculos.



Imaginamos que el punto verde se encuentra en $t = 0$, es decir que corresponde a $\mathcal{C}(0)$. Por lo tanto, queremos calcular $\left. \frac{df(\mathcal{C}(t))}{dt} \right|_{t=0}$. Es una cantidad perfectamente bien

definida. Nos dice como " f " cambia a lo largo de esta curva. Para continuar el calculo, tenemos que definir un sistema de coordenadas, es decir una carta Φ .

Por lo tanto, tenemos

$$\left. \frac{df(\mathcal{C}(t))}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial f \circ \Phi^{-1}(x)}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu(\mathcal{C}(t))}{dt} \right|_{t=0}$$

o por abuso de notación

$$\left. \frac{df(\mathcal{C}(t))}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu(\mathcal{C}(t))}{dt} \right|_{t=0}$$

Definiendo

$$V^\mu = \left. \frac{dx^\mu}{dt} \right|_{t=0}$$

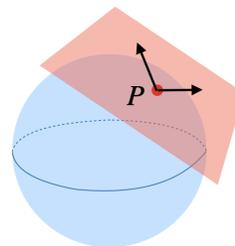
tenemos que el vector tangente es (ocuparemos siempre la notación de Einstein)

$$V^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu}$$

Veamos que independientemente de la variedad M o de la función f la derivada direccional $V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ tiene un significado intrínseco.

Para una nueva curva, pasando por el mismo punto, V^μ sera diferente porque $V^\mu = \left. \frac{dx^\mu(\mathcal{C}(t))}{dt} \right|_{t=0}$ es decir que depende de \mathcal{C} pero $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ queda lo mismo

Lo que nos permite concluir, que todos los vectores en un mismo punto forman un espacio vectorial llamado el espacio tangente a ese punto. Es el espacio tangente de M en p , $T_p M$. Una base de este espacio esta definido por $\{\partial_\mu\}$. Por lo tanto, tenemos que $\dim(M) = \dim(T_p M)$



Obviamente podemos siempre cambiar de base, es decir de aplicación Φ . En ese caso, tenemos

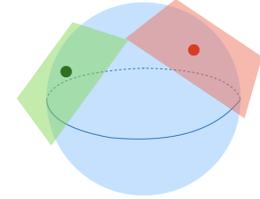
$$\begin{aligned} \left. \frac{df(\mathcal{C}(t))}{dt} \right|_{t=0} &= \left. \frac{\partial f \circ \Phi'^{-1}(x)}{\partial x'^\nu} \frac{dx'^\nu(\mathcal{C}(t))}{dt} \right|_{t=0} \equiv \left. \frac{\partial f}{\partial x'^\nu} \frac{dx'^\nu(\mathcal{C}(t))}{dt} \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{\partial f}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu(\mathcal{C}(t))}{dt} \right|_{t=0} \end{aligned}$$

Lo que implica la relación entre las dos bases

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu}$$

El espacio tangente aparece obviamente en mecánica clásica. Si consideramos un lagrangiano $L(q^i, \dot{q}^i)$ tenemos la derivada $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i}$, es decir que el espacio de velocidades es el espacio tangente al espacio de configuración. Si a este espacio de configuración (la variedad) tenemos las coordenadas q^i , entonces el espacio tangente tiene como base, $\{\partial_{q^i}\}$, y \dot{q}^i son las coordenadas.

Obviamente en cada punto de la variedad, tenemos un espacio tangente diferente. El conjunto de todos estos espacios tangente se llama el fibrado tangente



$$TM \equiv \bigcup_P T_p M$$

Este espacio se define por el punto elegido de la variedad y del espacio tangente, lo que implica que tiene una dimensión de $2n$.

Como los espacios tangente en diferentes puntos son diferentes, no tiene ningún sentido sumar dos vectores tangente que pertenecen a espacios diferentes. Se debe agregar una estructura adicional para definir estas operaciones.

Por el momento, hemos definido un vector tangente en un punto. Podemos definir un campo vectorial, es decir un vector tangente en cada punto, que escribimos en una base como

$$X = x^\mu \partial_\mu$$

Si consideramos dos campos vectoriales, el producto no es un campo vectorial porque aparecen derivadas de orden 2. De hecho, considerando el cálculo en una cierta base $\{\partial_\mu\}$, tenemos

$$XY = X^\nu \partial_\mu (Y^\nu \partial_\nu) = X^\mu \partial_\mu Y^\nu \partial_\nu + X^\mu Y^\nu \partial_{\mu\nu}$$

pero

$$YX = Y^\mu \partial_\mu (X^\nu \partial_\nu) = Y^\mu \partial_\mu X^\nu \partial_\nu + Y^\mu X^\nu \partial_{\mu\nu}$$

Podemos deducir que

$$XY - YX = (X^\mu \partial_\mu Y^\nu - Y^\mu \partial_\mu X^\nu) \partial_\nu$$

es un campo vectorial. Se llama el corchete de Lie $[X, Y]$.

Como $T_p M$ es un espacio vectorial, podemos definir su espacio dual en el punto P que se denota $T_p^* M$ y se llama el espacio cotangente. Consideramos una función de $T_p^* M$

$$(df)_p : T_p M \mapsto \mathbb{R}$$

es decir que actúa sobre un vector tangente para obtener un real. Definimos

$$(df)_p(V) \equiv V(f)(p) \quad \text{con } V \in T_pM$$

Según esta definición

$$dx^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\mu$$

lo que implica que $\{dx^\mu\}$ define una base del espacio cotangente T_p^*M .

Para verificar la consistencia, vemos que

$$df(V) = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu (V^\nu \partial_\nu) = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} V^\nu \underbrace{dx^\mu \partial_\nu}_{\delta_\nu^\mu} = V^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} = V(f)$$

Los elementos del espacio T_p^*M se llaman covectores o 1-forma

Finalmente, podemos definir tensores de rango $r + s$, o de tipo (r, s) como aplicaciones del producto tensorial

$$T : \underbrace{T_p^*M \otimes T_p^*M \otimes \dots \otimes T_p^*M}_r \otimes \underbrace{T_pM \otimes \dots \otimes T_pM}_s \mapsto \mathbb{R}$$

Considerando una base, se definen las componentes del tensor

$$T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} = T(dx^{\mu_1}, \dots, dx^{\mu_r}, \partial_{\nu_1}, \dots, \partial_{\nu_s})$$

Es decir que

$$T = T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} \partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_r} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_s}$$

Por ejemplo, un tensor de tipo $(0, 1)$ es una aplicación $T_pM \mapsto \mathbb{R}$, es decir un covector aunque un tensor de tipo $(1, 0)$ es una aplicación $T_p^*M \mapsto \mathbb{R}$, es decir un vector.

Antes de terminar esta sección, podemos introducir la definición de una curva integral. Sea X un campo vectorial sobre una variedad M . Una curva integral $\gamma : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ se define de tal manera que, para todo $P \in M$ por el que pasa,

$$\dot{\gamma}(0) = X(P) \quad \gamma(0) = P.$$

O, en coordenadas, se sigue que

$$\dot{x}^i(t) = X^i(P) \quad x^i(0) = P,$$

donde $x^i(t) = x^i(\gamma(t))$.

Por ejemplo, sea $X = y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ un campo vectorial en \mathbb{R}^2 . Entonces, una curva integral que pasa por $P = (1, 4)$ se obtiene resolviendo

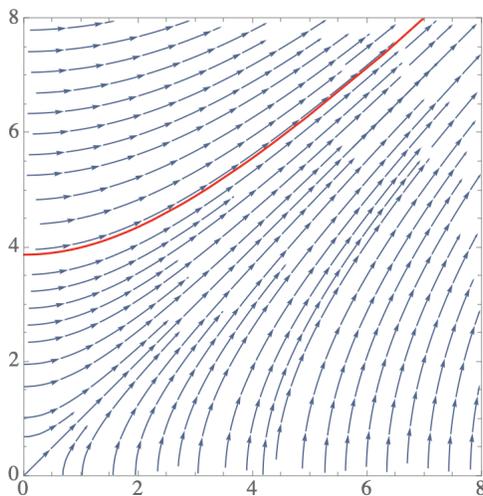
$$\dot{x} = y\frac{\partial}{\partial x} \equiv y\hat{x} \quad x(0) = 1.$$

$$\dot{y} = x\frac{\partial}{\partial y} \equiv x\hat{y} \quad y(0) = 4,$$

lo que nos da

$$x(t) = \frac{1}{2}(-3e^{-t} + 5e^t) \quad y(t) = \frac{1}{2}(3e^{-t} + 5e^t),$$

cuyo gráfico en \mathbb{R}^2 esta a continuación con la curva en rojo, la curva integral pasando por el punto $P = (1, 4)$.



A partir de esta figura, parece que en cada punto de la variedad \mathbb{R}^2 , el campo vectorial define una y solo una curva que pasa por él. Esto es genérico. Si X es un campo vectorial en una variedad M , entonces en cualquier punto P de M donde X esté definido, existe localmente una única curva integral de X que pasa por él. La prueba de esta afirmación se sigue de la aplicación de los teoremas de existencia y unicidad de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

4.3 Formas

Sea M una variedad, el conjunto de formas exteriores (diferenciales) de tipo p de M (o p -formas), denotado por $\Omega^p(M)$, tiene la propiedad de que para dos vectores cualesquiera $v, w \in T_P M$

$$\alpha \in \Omega^p_P(M) \Rightarrow \alpha_P(\dots, v, \dots, w, \dots) = -\alpha_P(\dots, w, \dots, v, \dots) \quad (\text{anti-simetría})$$

de modo que

$$\Omega_p^0(M) = \mathcal{F}(M) \quad \Omega_p^1(M) = \mathcal{X}^*(M)$$

donde se denota la colección de covectores de M por $\mathcal{X}^*(M)$ y $\mathcal{F}(M)$ la colección de funciones suave. También definimos el conjunto de todas las formas mediante

$$\Omega(M) = \bigcup \Omega^p(M)$$

Sea α una p -forma diferencial en una variedad M de dimensión n . Se sigue que:

1. la dimensión de $\Omega^p(M)$ es $\binom{n}{p}$, siendo estos los coeficientes binomiales de Newton;
2. si $p > n$, entonces $\alpha = 0$, es decir, no existen p -formas con p mayor que la dimensión de la variedad;
3. si $p = 2$ y $v \in TM$, entonces $\alpha(v, v) = 0$.

También existe un "producto" entre los elementos de $\Omega(M)$. Se podría sospechar que este es el producto tensorial, ya que el producto de un tensor $\binom{0}{p}$ y un tensor $\binom{0}{q}$ es un tensor $\binom{0}{p+q}$. Sin embargo, el producto tensorial de dos formas puede no ser una forma, es decir, puede no ser anti-simétrico. Por lo tanto, necesitamos una manera de anti-simetrizar tensores para adecuadamente definir una operación sobre formas. Sea α una p -forma y β una q -forma. El producto exterior (cuña) se define por

$$\begin{aligned} \wedge : \Omega^p(M) \times \Omega^q(M) &\rightarrow \Omega^{p+q}(M) \\ (\alpha \wedge \beta)(X_1, \dots, X_p, X_{p+1}, \dots, X_{p+q}) \\ &= \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \text{sign}(\sigma) \alpha(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(p)}) \beta(X_{\sigma(p+1)}, \dots, X_{\sigma(p+q)}) \end{aligned}$$

donde S_{p+q} es el conjunto de las permutaciones de $p+q$ elementos y $\text{sign}(\sigma)$ es $+1$ para permutaciones pares y -1 para permutaciones impares.

Aunque esta fórmula parece terriblemente complicada, resulta que nunca realmente la necesitaremos. Si α es una p -forma y β una q -forma, γ es una s -forma, δ y ϵ son 1-formas, y f es una 0-forma (función suave) en una variedad M de dimensión n , entonces:

1. $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha$;
2. $\delta \wedge \delta = 0$;
3. el producto cuña \wedge es distributivo sobre combinaciones lineales;
4. $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$;

5. $\delta \wedge \epsilon(v_1, v_2) = \delta(v_1)\epsilon(v_2) - \epsilon(v_1)\delta(v_2)$ para dos vectores cualesquiera v_1 y v_2 ;
6. $f \wedge \alpha = f\alpha$ para la multiplicación ordinaria de funciones;
7. $f\alpha \wedge \beta = \alpha \wedge f\beta = f(\alpha \wedge \beta)$.

Localmente, se seguirá que si $\{dx_a\}$ es la base local estándar de T_P^*M , entonces para cualquier conjunto de p elementos base $\{dx_{i_1}, \dots, dx_{i_p}\}$,

$$\{dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}\}$$

forma una base para $\Omega^p(M)$. En particular, si $\alpha \in \Omega^p(M)$, entonces

$$\alpha = \frac{1}{p!} \alpha_{a\dots b} dx^a \wedge \dots \wedge dx^b \equiv \frac{1}{p!} \alpha_{a\dots b} dx^a \dots dx^b$$

donde el factor de $\frac{1}{p!}$ proviene de las permutaciones en la definición del producto exterior. El producto cuña de α y β en forma de componentes se da por

$$\alpha \wedge \beta = \frac{(p+q)!}{p!q!} (\alpha \wedge \beta)_{a\dots bc\dots d} dx^a \wedge \dots \wedge dx^b \wedge dx^c \wedge \dots \wedge dx^d.$$

Ahora que hemos definido un álgebra para las formas, podemos definir una derivada, es decir, un operador que obedezca la regla del producto de Leibniz. Para eso, definimos la derivada exterior. La derivada exterior d es una aplicación $d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M)$ (es decir, mapea que aumenta el grado p de la forma en uno) tal que:

1. Propiedad de gradiente: para una función $f \in \Omega^0(M)$ tenemos que df es el gradiente de f ; es decir, si $\{x^i\}$ son coordenadas locales en M , entonces $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$. En particular, para coordenadas x^i , dx^i es un elemento de la base estándar de T_P^*M ;
2. Para cualquier p -forma α , $d(d\alpha) = 0$;
3. Regla del producto de Leibniz: para cualquier p -forma α , q -forma β y número real λ , d actúa como una derivada graduada con respecto al producto exterior, es decir,

$$d(\alpha + \lambda\beta) = d\alpha + \lambda d\beta, \quad d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta.$$

Por ejemplo, sea f una función escalar (es decir, una 0-forma) y X un campo vectorial. Entonces

$$(df)X = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \right) \left(x^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = x^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = X(f).$$

Obtenemos facilmente de estas propiedades, el teorema de Clairaut o teorema de Schwarz o teorema de la igualdad de las derivadas cruzadas. Sea f una función suave en una variedad M

$$\begin{aligned}
 d(df) &= d\left(\frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i\right) \\
 &= d\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) \wedge dx^i + \frac{\partial f}{\partial x^i} ddx^i \\
 &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i + 0 \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right) dx^j \wedge dx^i \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

implicando localmente que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$.

Podemos identificar todas las formas diferenciales de $\Omega(\mathbb{R}^3)$ con elementos del análisis ordinario de \mathbb{R}^3 . En esta vista, las tres derivadas de \mathbb{R}^3 -a saber, el gradiente, el rotacional y la divergencia- pueden expresarse como derivadas exteriores. Esto se puede ver, dejando que f sea una función y $\mathbf{a} = a_x \hat{\mathbf{x}} + a_y \hat{\mathbf{y}} + a_z \hat{\mathbf{z}}$ un vector en \mathbb{R}^3 , definimos la 1-forma $\alpha = a_x dx + a_y dy + a_z dz$ y la 2-forma $\alpha' = a_x dydz + a_y dzdx + a_z dxdy$, de modo que

$$\begin{aligned}
 df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \nabla f \cdot d\mathbf{V} \\
 d\alpha &= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) dxdy = (\nabla \times \mathbf{a}) d\mathbf{S} \\
 d\alpha' &= \frac{\partial a_x}{\partial x} dxdydz + \frac{\partial a_y}{\partial y} dydzdx + \frac{\partial a_z}{\partial z} dzdxdy = \nabla \cdot \mathbf{a} dV
 \end{aligned}$$

Dos tipos importantes de formas aparecen cuando se piensa en derivadas exteriores: las formas cerradas y las formas exactas. Una p -forma α se dice que es cerrada si y solo si $d\alpha = 0$. Además de ser cerrada, α es exacta si existe una $(p-1)$ -forma β tal que $\alpha = d\beta$. El hecho de que cada forma exacta sea cerrada es obvio ¿pero podemos preguntarnos si cada forma cerrada es exacta? La respuesta es: más o menos.

Lema de Poincaré: Cada forma cerrada es localmente exacta. Es decir, si $d\alpha = 0$ en todo M , es posible que no encontremos un único $\beta \in \Omega(M)$ tal que $d\beta = \alpha$, pero para cada carta local, podemos encontrar una estructura tal.

Lo que nos permite enunciar el teorema de los campos conservativos. Sea \mathbf{a} un campo vectorial sin rotación en \mathbb{R}^3 (es decir, $\nabla \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$). Entonces, el lema de Poincaré implica que

$$\alpha = df \iff \mathbf{a} = \nabla f$$

para alguna función f en \mathbb{R}^3 . Es decir, \mathbf{a} es un campo vectorial conservativo. La afirmación inversa, es decir, que cada campo conservativo no tiene rotación, sigue de forma trivial.

Antes de cerrar la sección, definimos el producto interior de un campo vectorial y una forma. Si X es un campo vectorial en una variedad M y α es una p -forma, entonces el producto interior de X y α , denotado $i_X\alpha$ (o $X \lrcorner \alpha$), es

$$i_X\alpha(v_1, \dots, v_{p-1}) = \alpha(X, v_1, \dots, v_{p-1}) \quad \text{si } p > 0$$

$$i_X\alpha = 0 \quad \text{si } p = 0$$

de modo que, en forma de componente para $p > 0$

$$(i_X\alpha)_{a\dots b} = X^c\alpha_{ca\dots b}.$$

El producto interior se puede ver como una "derivada exterior inversa" por ser una familia de mapas $\Omega^p \rightarrow \Omega^{p-1}$ con propiedades

$$\begin{aligned} i_X(\alpha + \lambda\beta) &= i_X\alpha + \lambda i_X\beta \\ i_X(\alpha \wedge \beta) &= i_X\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge i_X\beta \end{aligned}$$

para cualquier forma α, β y número real λ .

Por ejemplo, sea $V = \frac{\partial}{\partial x}$ un campo vectorial en \mathbb{R}^3 y $\alpha = xdx \wedge dy + 2dy \wedge dz + x^2ydz \wedge dx$ una 2-forma. Entonces

$$\begin{aligned} i_V\alpha &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) (xdx \wedge dy + 2dy \wedge dz + x^2ydz \wedge dx) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} xdx \wedge dy + \frac{\partial}{\partial x} 2dy \wedge dz + \frac{\partial}{\partial x} x^2ydz \wedge dx \\ &= xdy - 0 - x^2y \frac{\partial}{\partial x} dx \wedge dz \\ &= xdy - x^2ydz \end{aligned}$$

que es una 1-forma, como se esperaba.

Finalmente, podemos mencionar la noción de forma de volumen para conectarlo a lo que ya conocen. De hecho, aprendemos en calculo que si hacemos el cambio de variable $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, obtenemos

$$\begin{aligned} dx &= \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \\ dy &= \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta \end{aligned}$$

pero hemos todos verificado que si queremos usar la forma para el volumen infinitesimal $dx dy$ claramente no se puede obtener haciendo el producto de dx con dy , ya que encontraremos

$$dx dy = \cos \theta \sin \theta dr^2 - r^2 \sin \theta \cos \theta d\theta^2 - 2r^2 \cos \theta \sin \theta dr d\theta$$

En realidad, el volumen no debe ser definido por un producto pero por un producto cuña entre formas, es decir

$$dx \wedge dy = r \cos \theta^2 dr \wedge d\theta - r \sin \theta^2 d\theta \wedge dr = r dr \wedge d\theta$$

lo que llamamos la forma de volumen. De forma más genérica, una forma de volumen es una forma no nula de grado máximo. Por lo tanto, la n -ésima potencia exterior ω^n de cualquier forma simpléctica ω en una variedad M de dimensión $2n$ es una forma de volumen. La forma $\frac{\omega^n}{n!}$ se llama el volumen simpléctico de (M, ω) o forma de Liouville..

4.4 Derivada de Lie

Es apropiado desarrollar sistemas en los que dos variedades distintas puedan compartir estructuras. Por lo tanto, podemos preguntarnos como llevar las estructuras que ya hemos definido en una variedad M a una nueva variedad N y viceversa. Para lograr este objetivo, utilizaremos pullback y pushforward, formas de mapas que preservan estructuras.

El primer paso es elegir dos variedades M y N de modo que haya una función $f : M \rightarrow N$ que sea una biyección suave; llamaremos a tal f un difeomorfismo. Supongamos que $\phi : N \rightarrow \mathbb{R}$ es una función en N . Queremos construir una función en M que tenga en cuenta tanto a f como a ϕ . El candidato natural es la composición de f y ϕ , que llamaremos el pullback de ϕ con respecto a f .

Si $f : M \rightarrow N$ es un difeomorfismo y $\phi : N \rightarrow \mathbb{R}$ es una función en N , entonces la función en M dada por $f^*\phi = \phi \circ f$ se llama un pullback de ϕ (con respecto a f).

Llamamos a $f^*\phi$ un "pullback" porque transportamos un objeto, en este caso una función ϕ , en contra de la dirección de la "flecha" de f (f va de M a N).

Los vectores, por otro lado, para preservar su acción en las funciones, avanzan en la dirección de f , es decir, tomamos un vector v definido en un punto m en M y producimos otro vector f_*v en un punto $f(m)$ en N , preservando la propiedad direccional del vector. Esto se puede lograr si usamos f para llevar la curva integral $\gamma(t) : \mathbb{R} \rightarrow M$ a otra curva $f(\gamma)(t) : \mathbb{R} \rightarrow N$, de modo que $\gamma \in v$ da el vector empujado para obedecer $f(\dot{\gamma}) = f_*v$, preservando así las direcciones. Entonces decimos que los vectores se empujan (pushforward) hacia adelante con respecto a f .

Si $f : M \rightarrow N$ es un difeomorfismo y v es un vector en un punto m en M , entonces definimos el pushforward de v (con respecto a f) como

$$f_* : T_m M \rightarrow T_{f(m)} N$$

tal que

$$(f_* v)\phi = v(f^* \phi).$$

Nos gustaría saber cómo actúa sobre las formas. Si consideramos nuevamente dos variedades, M y M' con puntos respectivos p y p' . El mapa f induce un pullback entre los espacios cotangentes $T_{p'}^* M'$ y $T_p^* M$ según la siguiente regla: dada una 1-forma $\omega' \in T_{p'}^* M'$, entonces $f^* \omega' \in T_p^* M$ tal que su acción sobre vectores de $T_p M$ está dada por

$$\langle f^* \omega', V \rangle|_p := \langle \omega', f_* V \rangle|_{p'}$$

De hecho, las formas se definen por sus acciones sobre los vectores. Por eso estamos buscando su acción sobre un vector V . El pullback de la forma actuando sobre un vector en $T_p^* M$ está definido por la forma actuando sobre el pushforward del vector en $T_{p'}^* M'$.

En resumen, hemos visto tres fórmulas

$$\begin{aligned} \langle dg, V \rangle|_p &= V|_p(g) \\ (f_* V)|_{p'}(g') &= V|_p(f^* g') \\ \langle f^* \omega', V \rangle|_p &:= \langle \omega', f_* V \rangle|_{p'} \end{aligned}$$

De las cuales nos gustaría mostrar que

$$f^*(dg')|_p = d(f^* g')|_p$$

Tenemos la aplicación sobre un vector V

$$\langle f^*(dg'), V \rangle|_p = \langle dg', f_* V \rangle|_{p'} = (f_* V)|_{p'}(g') = V|_p(f^* g') = \langle d(f^* g'), V \rangle|_p$$

pero como esto es cierto para cualquier vector V , obtenemos

$$f^*(dg')|_p = d(f^* g')|_p$$

Terminemos esta sección con una noción importante, que es la derivada de Lie. Como ya hemos visto, necesitamos los isomorfismos de pullback y pushforward si queremos comparar tensores en dos puntos diferentes y, por lo tanto, el valor de un campo tensorial en dos puntos diferentes. Dada un difeomorfismo $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, establece un

isomorfismo $f^* : (T_{f(p)})_s^r \mathcal{M} \rightarrow (T_p)_s^r \mathcal{M}$ entre los espacios tensoriales en $f(p)$ y en p . Más explícitamente, el tensor en p

$$[f^* (T_{f(p)})]_p - T_p$$

nos informa sobre la diferencia entre el valor de un campo tensorial en $f(p)$ y su valor en p . Esta es una cantidad bien definida porque es una diferencia de dos tensores en el mismo punto p ya que hemos convertido $T_{f(p)}$ en otro tensor en p mediante el pullback. Sin embargo, esta cantidad depende del difeomorfismo f que estamos usando para relacionar ambos puntos y, si consideramos el flujo local f_t generado por un campo vectorial V , esta cantidad depende tanto de V como de t .

Definimos la derivada de Lie de un campo tensorial T a lo largo del campo vectorial V en el punto p mediante la expresión

$$\mathcal{L}_V T_p := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{[f_t^* (T_{f_t(p)})]_p - T_p}{t}.$$

La derivada de Lie tiene las siguientes propiedades

1. Es lineal.
2. Conserva el tipo, simetrías y contracción porque f^* lo hace.
3. Satisface la regla de Leibniz (y por lo tanto es una derivada):

$$\mathcal{L}_V (T \otimes S) = \mathcal{L}_V T \otimes S + T \otimes \mathcal{L}_V S.$$

La derivada de Lie de una función g a lo largo de un campo vectorial V está dada por la acción del vector sobre la función:

$$\mathcal{L}_V g = V(g),$$

como se puede ver directamente en la definición, ya que para valores suficientemente pequeños de t , $f_t^* g|_p = g[\gamma_p(t)] = g(p) + tV(g)|_p$. La derivada de Lie de un vector es

$$\mathcal{L}_V U = [V, U] = -\mathcal{L}_U V,$$

es decir, $\mathcal{L}_V U$ es un vector tal que, actuando sobre funciones g , da:

$$(\mathcal{L}_V U)(g) = V[U(g)] - U[V(g)].$$

Para probar esta afirmación, podemos elegir un pequeño truco. Consideremos la siguiente expresión

$$\mathcal{L}_V (U(g))$$

Como U es un operador lineal sobre f , tenemos

$$\mathcal{L}_V(U(g)) = (\mathcal{L}_V U)g + U(\mathcal{L}_V g)$$

pero en un sistema de coordenadas dado, tenemos

$$\mathcal{L}_V(U(g)) = \mathcal{L}_V(U^\mu \partial_\mu g)$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_V U)g &= \mathcal{L}_V(U^\mu \partial_\mu g) - U(\mathcal{L}_V g) \\ &= \mathcal{L}_V(U^\mu \partial_\mu g) - U(V^\mu \partial_\mu g) \\ &= V^\nu \partial_\nu (U^\mu \partial_\mu g) - U^\nu \partial_\nu (V^\mu \partial_\mu g) \\ &= (V^\nu \partial_\nu U^\mu - U^\nu \partial_\nu V^\mu) \partial_\mu g \end{aligned}$$

lo que es verdad por cualquiera función g , es decir

$$\mathcal{L}_V U = [V, U]$$

De la misma forma, podemos calcular la derivada de Lie de una 1-forma σ , $\mathcal{L}_V \sigma$. Usando la contracción entre la forma y un vector, obtenemos

$$\mathcal{L}_V \langle \sigma, X \rangle = \langle \mathcal{L}_V \sigma, X \rangle + \langle \sigma, \mathcal{L}_V X \rangle$$

pero $\langle \sigma, X \rangle$ es un real, lo que implica que

$$\mathcal{L}_V \langle \sigma, X \rangle = V^\mu \partial_\mu (\sigma_\nu X^\nu)$$

y tenemos

$$\langle \sigma, \mathcal{L}_V X \rangle = \langle \sigma, [V, X] \rangle = \sigma_\nu [V, X]^\nu = \sigma_\nu (V^\mu \partial_\mu X^\nu - X^\mu \partial_\mu V^\nu)$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_V \sigma, X \rangle &= V^\mu \partial_\mu (\sigma_\nu X^\nu) - \sigma_\nu (V^\mu \partial_\mu X^\nu - X^\mu \partial_\mu V^\nu) \\ &= V^\mu \partial_\mu \sigma_\nu X^\nu + \sigma_\nu X^\mu \partial_\mu V^\nu \end{aligned}$$

es decir

$$(\mathcal{L}_V \sigma)_\nu = V^\mu \partial_\mu \sigma_\nu + \sigma_\mu \partial_\nu V^\mu$$

o

$$\mathcal{L}_V \sigma = \left(V^\mu \partial_\mu \sigma_\nu + \sigma_\mu \partial_\nu V^\mu \right) dx^\nu$$

Haciendo un calculo similar para una 2-forma, obtenemos

$$\mathcal{L}_V \sigma = \frac{1}{2!} \left(V^\gamma \partial_\gamma \sigma_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\gamma} \partial_\beta V^\gamma + \sigma_{\gamma\beta} \partial_\alpha V^\gamma \right) dx^\alpha \wedge dx^\beta$$

De forma interesante, la derivada de Lie puede ser calculada con la derivada exterior y el producto interior, usando la identidad de Cartan, para cualquier n-forma ω

$$\mathcal{L}_X \omega = (\text{di}_X + \text{i}_X \text{d}) \omega$$

Lo podemos fácilmente verificar para una 1-forma, de hecho

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X \omega &= \left(X^\mu \partial_\mu \omega_\nu + \omega_\mu \partial_\nu X^\mu \right) dx^\nu \\ \text{di}_X \omega &= \text{di}_X \omega_\mu dx^\mu = \text{d} \left(X^\mu \omega_\mu \right) = \partial_\nu \left(X^\mu \omega_\mu \right) dx^\nu = \left(\omega_\mu \partial_\nu X^\mu + X^\mu \partial_\nu \omega_\mu \right) dx^\nu \\ \text{i}_X \text{d}\omega &= \text{i}_X \left(\partial_\nu \omega_\mu dx^\nu \wedge dx^\mu \right) = X^\nu \partial_\nu \omega_\mu dx^\mu - X^\mu \partial_\nu \omega_\mu dx^\nu \end{aligned}$$

4.5 Notación gráfica de Penrose

Existe todo un formalismo de representación gráfica de estos objetos. Lo podemos construir a partir de ejemplos en vez de ir en un formalismo abstracto. Los vectores $V = V^i \partial_i$ se denotan

$$\overset{i}{\text{---}} \textcircled{V}$$

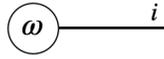
y una componente V^i

$$\textcircled{i=1} \text{---} \textcircled{V}$$

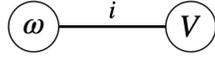
un tensor de tipo $(2,0)$ es

$$\overset{i}{\text{---}} \textcircled{T} \underset{j}{\text{---}}$$

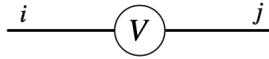
una forma se representa al revés



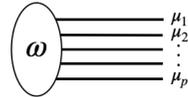
lo que nos permite obtener una contracción de un vector V y una forma ω



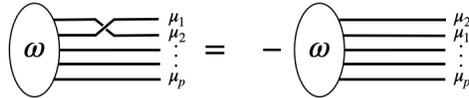
obviamente un tensor de tipo $(1, 1)$ se escribe de la forma



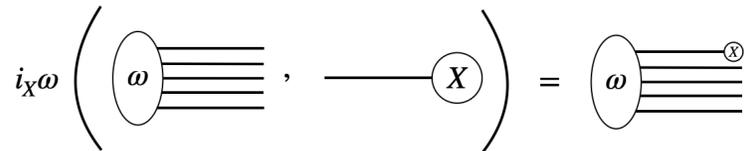
una p -forma es representado con p líneas



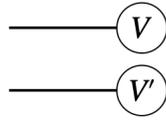
este objeto es completamente antisimétrico, lo que implica que el intercambio de índices produce un signo negativo



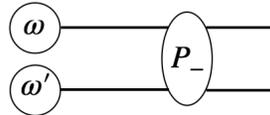
El producto interior sobre una p -forma nos da una $(p - 1)$ -forma



El producto tensorial es vertical, es decir que el producto tensorial de dos vectores $V \otimes V'$ es



lo podemos hacer para formas, pero en este caso si queremos obtener una forma necesitamos una operación adicional de antisimetrización, es decir el producto cuña, $\omega \wedge \omega'$, el operador P_- es un operador de antisimetrización



Una función no tiene índices, su derivada es una 1-forma

$$d \left(\text{circle } f \right) = \text{circle } df \text{ ---}$$

también la derivada de una 1-forma es

$$d \left(\text{circle } \omega \text{ ---} \right) = \text{circle } d\omega \text{ ===}$$

Considerando una 1-forma, ω , el producto interior con un vector X de su diferencial, $i_X d\omega$ es

$$d \left(\text{circle } \omega \text{ ---} \right) \text{ --- } \text{circle } X$$

aunque $di_X \omega$ es

$$d \left(\text{circle } \omega \text{ --- } \text{circle } X \right) \text{ ---}$$

la formula para una p -forma ω , $i_X(\omega \wedge \eta) = i_X \omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge i_X \eta$ se escribe

usando la regla

podemos ver simplemente que $i_X i_X = 0$

4.6 Variedad simpléctica y mecánica clásica

Sea ω una 2-forma en una variedad M , es decir, para cada $p \in M$, el mapa $\omega_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ es bilineal antisimétrico en el espacio tangente a M en p , y ω_p varía suavemente en p .

La 2-forma ω es simpléctica si ω es cerrada ($d\omega = 0$) y ω_p es simpléctica para todo $p \in M$. Si ω es simpléctica, entonces $\dim T_p M = \dim M$ debe ser par, ya que ω no es degenerada. En dimensiones impares, una matriz totalmente antisimétrica es degenerada en el sentido que tiene un valor propio nulo.

Por lo tanto, podemos definir que una variedad simpléctica es un par (M, ω) donde M es una variedad y ω es una forma simpléctica.

Por ejemplo, sea $M = \mathbb{R}^{2n}$ con coordenadas lineales $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$. La forma

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$$

es simpléctica.

Un simplectomorfismo entre (M_1, ω_1) y (M_2, ω_2) es un difeomorfismo $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ tal que $\varphi^*\omega_2 = \omega_1$. Recordemos que, por definición de pullback, en vectores tangentes $u, v \in T_p M_1$, tenemos $(\varphi^*\omega_2)_p(u, v) = (\omega_2)_{\varphi(p)}(d\varphi_p(u), d\varphi_p(v))$. Esto es relacionado a las transformaciones canónicas.

Nos gustaría clasificar las variedades simplécticas hasta simplectomorfismo. El teorema de Darboux se encarga de esta clasificación localmente: la dimensión es el único invariante local de las variedades simplécticas hasta simplectomorfismos. Así como cualquier variedad de dimensión n se ve localmente como \mathbb{R}^n , cualquier variedad simpléctica de dimensión $2n$ se ve localmente como $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$. Más precisamente, cualquier variedad simpléctica (M^{2n}, ω) es localmente simplectomórfica a $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.

Es el teorema de Darboux: Sea (M, ω) una variedad simpléctica de dimensión $2n$, y sea p cualquier punto en M . Entonces existe una carta de coordenadas $(\mathcal{U}, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ centrada en p tal que en \mathcal{U}

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i.$$

Para reproducir la mecánica clásica, debemos construir un vector que nos indica el flujo en este espacio de fase. Sabemos que a partir de una función H es fácil construir una forma dH , pero ahora gracias a la estructura simplectica, tenemos una forma única de construir un vector a partir de esta forma (en geometría riemanniana, usamos la métrica). Gracias al hecho que la 2-forma ω no es degenerada, existe un único campo vectorial X_H (campo vectorial hamiltoniano) tal que

$$i_{X_H}\omega = dH$$

o de forma equivalente

$$\begin{aligned} \forall Y, \quad i_{X_H}\omega(Y) &= dH(Y) \\ \Leftrightarrow \forall Y, \quad \omega(X_H, Y) &= dH(Y) \end{aligned}$$

Por ejemplo, si $M = \mathbb{R}^2$, $H = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2}$ y $\omega = dq \wedge dp$, en este caso podemos verificar que el vector

$$X_H = p \frac{\partial}{\partial q} - q \frac{\partial}{\partial p}$$

es el campo vectorial solución de la ecuación previa. De hecho,

$$i_{X_H}\omega = pdp - q(-dq) = dH$$

La conservación de la energía se traduce por la idea que el hamiltoniano se conserva a lo largo de las curvas X_H , es decir que

$$\mathcal{L}_{X_H} H = 0$$

Esta ecuación es trivial, ya que

$$\mathcal{L}_{X_H} H = i_{X_H} dH + di_{X_H} H = i_{X_H} dH = i_{X_H} i_{X_H} \omega = \omega(X_H, X_H) = 0$$

Sea $M = \mathbb{R}^{2n}$ con coordenadas $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$, una función $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ y una 2-forma

$$\omega = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$$

el campo vectorial hamiltoniano es

$$X_H = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right)$$

De hecho

$$i_{X_H} \omega = \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i = dH$$

Observamos que la curva integral de X_H es

$$\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned}$$

es decir las ecuaciones de Hamilton.

Podemos definir el corchete de Poisson de dos funciones f y g

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g)$$

De hecho como

$$\begin{aligned} X_f &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right) \\ X_g &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right) \end{aligned}$$

y usando la 2-forma canónica $\omega = \sum_i dq_i \wedge dp_i$, obtenemos

$$\omega(X_f, X_g) = i_{X_g} i_{X_f} \omega = i_{X_g} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_i} dp_i - \frac{\partial f}{\partial p_i} dq_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

Para terminar esta sección, es interesante ver la diferencia entre dos tipos de vectores. Sea (M, ω) una variedad simpléctica, un vector X que preserva la 2-forma

$$\mathcal{L}_X \omega = 0$$

se llama un campo vectorial simpléctico. Por otro lado, un campo vectorial X es de Hamilton si

$$i_X \omega = dH$$

Podemos preguntarnos cuando estas dos nociones son equivalentes. Veamos que un campo vectorial es simpléctico si la 1-forma $i_X \omega$ es cerrada, de hecho

$$di_X \omega = (di_X + i_X d)\omega = \mathcal{L}_X \omega = 0$$

pero si X es un campo vectorial hamiltoniano, por definición es exacto ya que $i_X \omega = dH$. Los espacios de formas cerradas y exactas no son necesariamente iguales, depende de la estructura global de nuestra variedad (ver un curso sobre la cohomología de de Rham). En conclusión un campo vectorial simpléctico es hamiltoniano depende de la estructura global y no local de la variedad, es decir si la variedad tiene huecos o no. Y podemos también concluir que si localmente, nuestros abiertos son contráctil, todas los campos simplécticos son hamiltoniano.

En consecuencia, todos los campos vectoriales hamiltonianos son simplécticos, pero lo contrario no es cierto. Localmente, sin embargo, el lema de Poincaré garantiza que todo campo vectorial simpléctico es hamiltoniano.

Esta diferencia tiene muchas aplicaciones en física. Por ejemplo, sobre las cantidades conservadas. Si el campo vectorial es hamiltoniano, tenemos una cantidad conservada, pero si el campo vectorial es simpléctico pero no hamiltoniano, tenemos que trabajar la topología de nuestro sistema para ver si una cantidad es conservada. También es un tema que aparece en sistemas con ligaduras. Existen ligaduras de dos tipos según la nomenclatura de Dirac, de primera clase, son ligaduras asociadas a un campo vectorial hamiltoniano y por lo tanto cantidad conservadas aunque las de segunda clase son asociadas a campos vectoriales simpléctico.

Para un campo vectorial simpléctico, la forma de Liouville ($L = \omega^n/n!$) es conservada. De hecho, es fácil de verificar que

$$L = \prod_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$$

es decir que la forma de volumen es conservada lo que corresponde al teorema de Liouville. Obviamente el hecho de conservar la forma simpléctica a lo largo de un vector simpléctico es más fuerte que el teorema de Liouville.

Las transformaciones canónicas son las transformaciones que preservan la forma de volumen, es decir que bajo una transformación $(q, p) \rightarrow (Q, P)$, tenemos

$$dq \wedge dp = dQ \wedge dP$$

Son transformaciones generadas por un vector simpléctico, son symplectomorfismos. De esta conservación de volumen, podemos identificar 4 formas que son cerradas

$$\begin{aligned}\theta_1 &= pdq - PdQ \\ \theta_2 &= pdq + QdP \\ \theta_3 &= -qdp - PdQ \\ \theta_4 &= -qdp + QdP\end{aligned}$$

De hecho $d\theta_1 = dp \wedge dq - dP \wedge dQ = -dq \wedge dp + dQ \wedge dP$. Pero, localmente por el teorema de Poincaré, son exactas, es decir que existe una función F_i tal que $dF_i = \theta_i$, es decir por ejemplo

$$dF_1 = pdq - PdQ$$

lo que corresponde a una función generatriz de primer tipo.

En el caso de tener una transformación canónica que depende del tiempo, tenemos que extender el espacio de fase para introducir dt y su momento conjugado. En este caso, podemos definir una forma (conocida como el invariante integral de Poincaré-Cartan)

$$\sigma^1 = p dq - H dt$$

Este espacio de fase extendido o un espacio \mathbb{R}^{2n+1} consiste en el espacio de fase (\mathbb{R}^{2n}) con la adición del tiempo o $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$. La derivada exterior $d\sigma^1$ es una 2-forma diferencial. La dimensión impar implica que siempre hay alguna dirección (o vector V) tal que $d\sigma^1(V, \eta) = 0$ para todos los vectores η y esta dirección, V , la asociamos con las ecuaciones de movimiento. Los flujos a lo largo de esta dirección también se llaman líneas de vórtice. La derivada exterior

$$d\sigma^1 = dp \wedge dq - \frac{\partial H}{\partial q} dq \wedge dt - \frac{\partial H}{\partial p} dp \wedge dt$$

Consideremos el vector

$$V = -\frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial t}$$

Insertemos esto en $d\sigma^1$

$$\begin{aligned} d\sigma^1(V, *) &= -\frac{\partial H}{\partial q}dq - \frac{\partial H}{\partial p}dp + \frac{\partial H}{\partial p}dp + \frac{\partial H}{\partial q}dq - \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p}dt + \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p}dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

Entonces, nuestro vector V es de hecho la dirección que define las líneas de vórtice. Pero observa nuevamente el vector V :

$$\begin{aligned} V &= -\frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial t} \\ &\rightarrow \dot{p}\frac{\partial}{\partial p} + \dot{q}\frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial t} \end{aligned}$$

El flujo generado por el vector V satisface las ecuaciones de Hamilton. En resumen, a lo largo de este flujo, tenemos que nuestra 2-forma $d\sigma^1$ se conserva. Podemos definir la 1-forma

$$\theta_1 = pdq - Hdt - PdQ + \tilde{H}dt$$

con \tilde{H} el nuevo hamiltoniano con las variables (Q, P) . Esta forma es cerrada $d\theta_1 = 0$ y por lo tanto localmente exacta

$$dF_1 = \theta_1 = pdq - Hdt - PdQ + \tilde{H}dt$$

lo que corresponde a la función generatriz de primer tipo dependiendo del tiempo.

4.7 Sistemas integrables

Sea M una variedad de dimensión $2n$, un sistema hamiltoniano (M, ω, H) es (completamente) integrable en el sentido de Liouville si existen n funciones (f_1, \dots, f_n) tal que

1. (f_1, \dots, f_n) son funciones independientes
2. $\forall i, j \quad \{f_i, f_j\} = 0$

Decimos que $f_1, \dots, f_n \in C^\infty(M)$ son independientes si $(df_1)_p, \dots, (df_n)_p$ son linealmente independientes en (casi) todos los puntos de algún subconjunto denso de M . Por ejemplo, si consideramos $M = \mathbb{R}^2$ y $f_1(x, y) = x$, $f_2(x, y) = (x^2 + y^2)/2$, obtenemos

$$\begin{aligned} df_1 &= dx \\ df_2 &= xdx + ydy \end{aligned}$$

Estos 2 formas son independientes en todo \mathbb{R}^2 excepto en la línea $y = 0$, por esa razón hemos usado en la definición la palabra "casi".

Un sistema definido en \mathbb{R}^4 con coordenadas (q_1, q_2, p_1, p_2) y hamiltoniano tal que $H = (p_1^2 + p_2^2)/2$ es integrable. Usando $f_1 = H$ y $f_2 = p_1q_2 - p_2q_1$, observamos que $\{f_1, f_2\} = 0$ y $df_1 = p_1dp_1 + p_2dp_2$ aunque $df_2 = -p_2dq_1 + p_1dq_2 + q_2dp_1 - q_1dp_2$ son libre o independientes si $(p_1, p_2) \neq 0$.

Sea $f = (f_1, \dots, f_n) : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ aplicaciones suave. Se dice que

- $a \in \mathbb{R}^n$ es un valor regular si $f^{-1}(a)$ forma una familia de funciones libre.
- $a \in \mathbb{R}^n$ es un valor critico si $f^{-1}(a)$ forma una familia de funciones no libre.

De lo cual podemos enunciar el teorema de Liouville-Arnold: Sea $(M, \omega, H, f_1, \dots, f_n)$ un sistema hamiltoniano integrable en el sentido de Liouville, localmente podemos encontrar un sistema de coordenadas canónicas $(\phi_1, \dots, \phi_n, I_1, \dots, I_n)$ tal que

$$H = H(I_1, \dots, I_n)$$

$$\forall i, f_i = f_i(I_1, \dots, I_n)$$

Sea $a \in \mathbb{R}^n$ un valor regular de $f = (f_1, \dots, f_n)$ tal que $f^{-1}(a)$ es compacto y conexo, entonces existe un abierto alrededor de a tal que $f^{-1}(a)$ es difeomorfo a un toro de dimensión n . Se dice que $(\phi_1, \dots, \phi_n, I_1, \dots, I_n)$ son coordenadas acción-ángulo y ϕ_i es 2π periódico, es decir que la trayectoria queda sobre un toro.

En este sistema de coordenadas, obtenemos

$$\dot{\phi}_i = \frac{\partial H}{\partial I_i}$$

$$\dot{I}_i = -\frac{\partial H}{\partial \phi_i} = 0$$

es decir que tenemos la solución

$$I_i(t) = I_i(0)$$

$$\phi_i(t) = \phi_i(0) + \omega_i t$$

con las frecuencias constantes $\omega_i = \partial H / \partial I_i$. En este caso, observamos que las frecuencias ω_i nos informan si las trayectorias son periódicas, es decir cerradas o si la trayectoria es densa sobre el toro. De hecho, si $n = 2$, y si el sistema es integrable, tenemos 2 frecuencias. Si ω_1/ω_2 es un racional, las trayectorias son cerradas y por lo tanto periódicas, pero si ω_1/ω_2 no es un racional, las trayectorias son densas sobre el toro.

Podemos obviamente tener más funciones integrables para un sistema. Por ejemplo, si tenemos $2n - 1$ funciones integrables, el sistema es llamado super-integrable y el movimiento del sistema es periódico. Es lo que tenemos por ejemplo para el problema de Kepler, por lo cual tenemos 8 cantidades conservadas, 3 momentos asociados al centro de masa, 3 momentos angulares, la energía y el vector de Laplace–Runge–Lenz, lo que implica que el sistema es super-integrable y por lo tanto periódico.

La física de los sistemas integrable es poco interesante ya que no representan sistemas físicos. Si definimos un sistema hamiltoniano que es una perturbación de un sistema integrable, queremos saber si los toros se deforman un poco o si el sistema cambia totalmente de naturaleza

$$H(\phi_1, \dots, \phi_n, I_1, \dots, I_n) = H_0(I_1, \dots, I_n) + \epsilon H_1(\phi_1, \dots, \phi_n, I_1, \dots, I_n)$$

La respuesta a esta pregunta viene por el teorema de Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM).

El teorema KAM afirma que, bajo ciertas condiciones, la mayoría de los toros invariantes del sistema no perturbado (aquellos para los cuales el vector de frecuencia $\omega(I)$ satisface una condición de no resonancia) sobrevivirán a la perturbación. Estas condiciones incluyen:

1. No degeneración: La matriz hessiana de (H_0) respecto a las variables de acción (I) es no degenerada en todos los puntos, es decir, la matriz hessiana es invertible

$$\det\left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial I_i \partial I_j}\right) \neq 0$$

2. Condición de no resonancia: El vector de frecuencia $\omega(I)$ debe satisfacer una condición diofantina, es decir, existen constantes $\gamma > 0$ y $\tau > n - 1$ (donde n es el número de grados de libertad) tales que:

$$|\langle k, \omega \rangle| \geq \frac{\gamma}{|k|^\tau}$$

para todos los vectores enteros $k \neq 0$, donde $\langle k, \omega \rangle$ denota el producto punto.

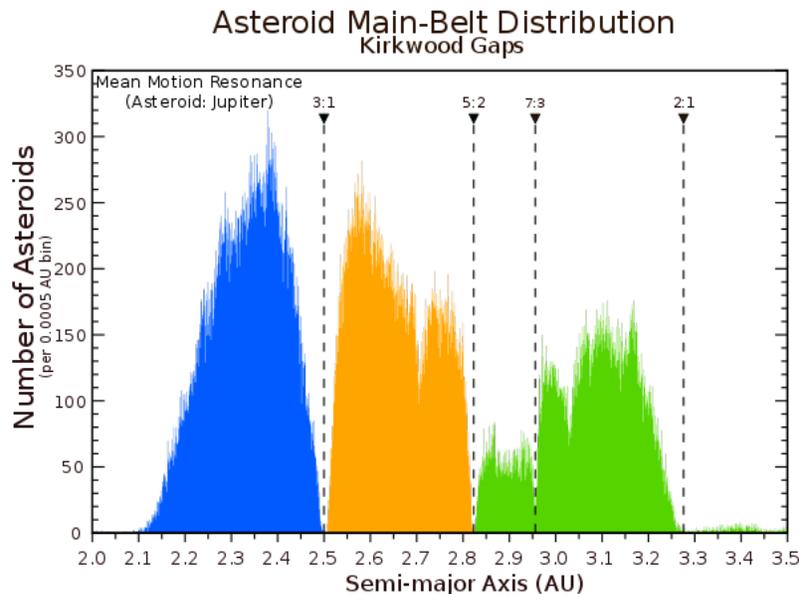
3. Suavidad: El hamiltoniano $H(I, \theta)$ debe ser suficientemente suave, típicamente requiriendo ser analítico o al menos C^∞ (infinitamente diferenciable).
4. Pequeñez de la perturbación: La perturbación ϵH_1 debe ser suficientemente pequeña en relación con el hamiltoniano no perturbado H_0 .

Para el caso $n = 2$, podemos reescribir la condición de no resonancia de la siguiente forma. Existe un real $m > 2$ y una aplicación $k : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, con $k(0) = 0$, tal que

$$\left| \frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{p}{q} \right| > \frac{k(\epsilon)}{q^m}$$

con p/q un racional. Es decir que ω_1/ω_2 debe ser suficientemente lejano de un racional.

Este teorema muy abstracto tiene una aplicación astrofísica maravillosa. Si consideramos el sistema sol-júpiter-asteroides. Sabemos que el sistema que describe el sol y júpiter o el sol y un asteroide es un sistema integrable descrito por el problema de Kepler a lo cual agregamos el hamiltoniano perturbativo que describe la interacción de los asteroides y de júpiter. Si llamamos ω_J la frecuencia de la órbita de júpiter y ω_A las frecuencias asociadas a los asteroides. El teorema KAM nos indica que los asteroides tendrán un movimiento poco deformado si ω_J/ω_A es suficientemente lejano de un racional pero que su movimiento podría ser caótico en el caso contrario. Eso implica que los asteroides presenten en el cinturón de Kuiper que han tenido una frecuencia cercana a la frecuencia de júpiter por un racional, se encontraron con una órbita caótica y fueron expulsadas del cinturón. En resumen, el teorema KAM predice que no deberían existir asteroides en el cinturón de Kuiper cuya frecuencia de órbita es proporcional a la frecuencia de órbita de júpiter.



Se observan asteroides que no existen en el cinturón de Kuiper, con exactamente las frecuencias predichas por el teorema KAM.