1. Ecuación de Hamilton-Jacobi

La ecuación de Hamilton-Jacobi es

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\Big(\frac{\partial S}{\partial q}\Big)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = 0$$

Podemos buscar una solución de la forma

$$S = -Et + F(q)$$

lo que implica que tenemos

$$F'(q) = \pm\sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2}$$

es decir que tenemos

$$S = -Et \pm \int_0^q \sqrt{2mE - m^2\omega^2\bar{q}^2}\, d\bar{q}$$

Como sabemos que la función generatriz es una función de (q, P, t) y que P es una constante, podemos identificar $E = P_0$, lo que nos da

$$S = -P_0 t \pm \int_0^q \sqrt{2mP_0 - m^2\omega^2\bar{q}^2}\, d\bar{q}$$

De esta función generatriz obtenemos

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}\,, \quad Q_0 = \frac{\partial S}{\partial P_0}$$

es decir

$$\begin{aligned} p &= \pm\sqrt{2mP_0 - m^2\omega^2 q^2} \\ Q_0 &= -t \pm \int_0^q \frac{m}{\sqrt{2mP_0 - m^2\omega^2\bar{q}^2}} d\bar{q} \\ &= -t \pm \sqrt{\frac{m}{2P_0}} \int_0^q \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{m\omega^2}{2P_0}\bar{q}^2}} d\bar{q} = -t \pm \frac{1}{\omega}\arcsin\Big(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2P_0}}q\Big) \end{aligned}$$

lo que implica

$$q(t) = \pm\sqrt{\frac{2P_0}{m\omega^2}}\sin\Big(\omega t + Q_0\omega\Big)$$

y

$$p(t) = \pm\sqrt{2mP_0 - m^2\omega^2 q^2} = \pm\sqrt{2mP_0}\cos\Big(\omega t + Q_0\omega\Big)$$

2. Un hamiltoniano bien no lineal

Las ecuaciones de Hamilton son

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = 4(p - q^2)$$
$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = 8q(p - q^2) - 1$$

Considerando la transformación

$$Q = q + \left(p - q^2\right)^2, \quad P = p - q^2.$$

podemos verificar que

$$\{Q, P\} = \{q + \left(p - q^2\right)^2, p - q^2\} = \{q, p - q^2\} = \{q, p\} = 1$$

Por lo tanto el nuevo hamiltoniano se puede obtener facilmente, ya que tenemos $H = q + (q - p^2)^2$

$$\tilde{H} = 2P^2 + Q - P^2 = Q + P^2$$

lo que nos permite obtener las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{Q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = 2P$$
$$\dot{P} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = -1$$

es decir

$$Q = -t^2 + 2At + B$$
$$P = -t + A$$

con (A, B) 2 constantes de integración, lo que nos permite obtener

$$q = Q - P^2 = -2t^2 + 4At + B - A^2$$
$$p = (Q - P^2)^2 + P = \left(-2t^2 + 4At + B - A^2\right)^2 - t + A$$