1. Caída libre

Hemos obtenido en clase, el lagrangiano bajo algunas aproximaciones

$$L \simeq \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)+m\omega(-y\dot{x}\cos\alpha+\dot{y}z\sin\alpha+\dot{y}x\cos\alpha-\dot{z}y\sin\alpha)-mgz$$

con α la latitud y ω la velocidad angular de la Tierra.
De lo cual podemos obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\begin{cases} m\ddot{x}=2m\omega\dot{y}\cos\alpha \\ m\ddot{y}=-2m\omega(\dot{x}\cos\alpha+\dot{z}\sin\alpha) \\ m\ddot{z}=-mg+2m\omega\dot{y}\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}=2\omega\dot{y}\cos\alpha \\ \ddot{y}=-2\omega(\dot{x}\cos\alpha+\dot{z}\sin\alpha) \\ \ddot{z}=-g+2\omega\dot{y}\sin\alpha \end{cases}$$

Haciendo una integración de estas ecuaciones, nos da

$$\begin{cases} \dot{x}=2\omega y\cos\alpha \\ \dot{y}=-2z\Big(x\cos\alpha+(z-h)\sin\alpha\Big) \\ \dot{z}=-gt+2\omega y\sin\alpha \end{cases}$$

donde hemos usado las condiciones iniciales que corresponden a velocidad inicial nula a partir de una altura $z=h$.
Usando las ecuaciones para $(\dot{x},\dot{z})$ en la ecuación de $\ddot{y}$, obtenemos

$$\ddot{y}+4\omega^2 y=2\omega gt\sin\alpha$$

La solución particular es

$$y_p=\frac{1}{2}\frac{g}{\omega}t\sin\alpha$$

lo que nos permite obtener la solución completa

$$y=\frac{1}{2}\frac{g}{\omega}t\sin\alpha+A\cos(2\omega t)+B\sin(2\omega t)$$

pero como $y(0)=0$, tenemos $A=0$, y de la condición $y'(0)=0$ obtenemos $B=-\frac{g}{4\omega^2}\sin\alpha$

$$y=\frac{1}{2}\frac{g}{\omega}t\sin\alpha-\frac{g}{4\omega^2}\sin\alpha\sin(2\omega t)$$

Como $\omega \ll 1$, obtenemos

$$y=\frac{1}{3}g\omega\sin\alpha\, t^3$$

A partir de lo cual podemos deducir (x,z) al primer orden en ω

$$\dot{x}=0+\mathcal{O}(\omega^2)$$
$$\dot{z}=-gt+\mathcal{O}(\omega^2)$$

es decir

$$x(t)=0+\mathcal{O}(\omega^2)$$

$$y(t) = \frac{1}{3} g\omega \sin\alpha\, t^3 + \mathcal{O}(\omega^2)$$
$$z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + h + \mathcal{O}(\omega^2)$$

Veamos que al primer orden, tenemos un desplazamiento hacia el este. El tiempo de caída τ se obtiene cuando $z = 0$, es decir

$$\tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

lo que implica que el desplazamiento hacia el este es

$$y = \frac{1}{3}\omega \frac{(2h)^{3/2}}{\sqrt{g}} \sin\alpha$$

Al nivel del ecuador, $\alpha = \pi/2$, obtenemos

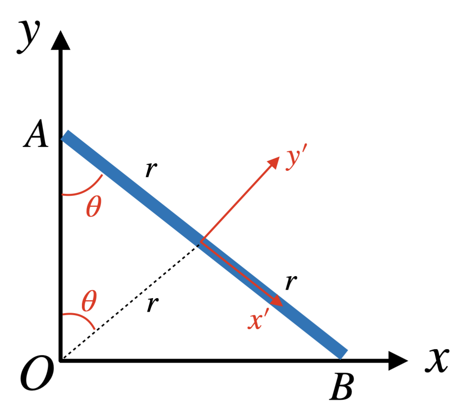
$$\text{si } h = 100 \text{ m}, \; y = 2 \text{ cm}$$
$$\text{si } h = 500 \text{ m}, \; y = 25 \text{ cm}$$

2. Escalera que desliza

Tenemos

$$\overrightarrow{OG} = r(\cos\theta \vec{e}_y + \sin\theta \vec{e}_x)$$
$$\vec{v}_G = r\dot{\theta}(-\sin\theta \vec{e}_y + \cos\theta \vec{e}_x)$$
$$\vec{a}_G = -r\dot{\theta}^2(\cos\theta \vec{e}_y + \sin\theta \vec{e}_x) + r\ddot{\theta}(-\sin\theta \vec{e}_y + \cos\theta \vec{e}_x)$$
$$= r\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2 \sin\theta\right)\vec{e}_x - r\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right)\vec{e}_y$$

El centro de masa tiene un movimiento circular hasta cuando la escalera no esta apoyada. Cuando la resultante de las fuerzas en la dirección x es nula, no hay contacto con la pared. Lo que implica que en ese momento de no contacto, su aceleración horizontal es nula.



La única componente no nula del tensor de inercia es

$$I_{33} = \int \lambda({x'}^2 + {y'}^2) dl$$

con dl a lo largo de la escalera, es decir $dl = dx'$ además de tener $y' = 0$.

$$I_{33} = \int_{-r}^{r} \lambda {x'}^2 dx' = \frac{2}{3}\lambda r^3 = \frac{1}{3} m r^2$$

La energía cinética es

$$T = T_{CM} + T_{rot}$$

con

$$T_{CM} = \frac{1}{2} m v_G^2 = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2$$

aunque la energía de rotación es

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_{ij} I_{ij}\omega_i\omega_j = \frac{1}{2}\omega_3^2 I_{33} = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 I_{33} = \frac{1}{6}mr^2\dot{\theta}^2$$

La energía potencial es

$$V = mgy_G = mgr\cos\theta$$

lo que implica

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{6}mr^2\dot{\theta}^2 - mgr\cos\theta \\ &= \frac{2}{3}mr^2\dot{\theta}^2 - mgr\cos\theta \end{aligned}$$

la ecuación es

$$\frac{4}{3}mr^2\ddot{\theta} = mgr\sin\theta$$

es decir

$$\ddot{\theta} = \frac{3g}{4r}\sin\theta$$

Integrando esta ecuación, obtenemos

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = -\frac{3g}{4r}\cos\theta + A$$

Sabiendo que el sistema comienza cuando $\theta = 0$ y $\dot{\theta} = 0$, es decir

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2r}(1 - \cos\theta)$$

Con las ecuaciones de $\ddot{\theta}$ y $\dot{\theta}$ y la ecuación de no contacto con la pared, obtenemos

$$\cos\theta = 2/3$$

es decir $\theta \simeq 48,2^\circ$.