1. Trayectoria a lo largo de una superficie

1/ El lagrangiano del sistema es

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz + \lambda(z - x^2 - y^2 + xy)$$

con λ un multiplicador de Lagrange. La variación del sistema con respecto a (x, y, z, λ) es

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= (y - 2x)\lambda \\ m\ddot{y} &= (x - 2y)\lambda \\ m\ddot{z} &= -mg + \lambda \\ 0 &= z - x^2 - y^2 + xy \end{aligned}$$

Usando las 2 últimas ecuaciones, tenemos

$$\lambda = mg + m\ddot{z} = mg + m\Big(\ddot{x}(2x - y) + \ddot{y}(2y - x) + 2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \dot{x}\dot{y})\Big)$$

lo que nos permite obtener a partir de las 2 primeras ecuaciones, el sistema siguiente

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= g(y - 2x) + (y - 2x)\Big(\ddot{x}(2x - y) + \ddot{y}(2y - x) + 2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \dot{x}\dot{y})\Big) \\ \ddot{y} &= g(x - 2y) + (x - 2y)\Big(\ddot{x}(2x - y) + \ddot{y}(2y - x) + 2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \dot{x}\dot{y})\Big) \end{aligned}$$

2/ El punto de equilibrio, se encuentra para $\dot{x} = \dot{y} = \ddot{x} = \ddot{y} = 0$, lo que implica $y - 2x = x - 2y = 0$, es decir $x = y = 0$.

3/ Como el punto de equilibrio se encuentra en $x = y = 0$, la expansión alrededor de este punto será la siguiente

$$x = 0 + \delta x\,, \quad y = 0 + \delta y$$

Al primer orden, tenemos

$$\begin{aligned} \ddot{\delta x} + 2g\delta x - g\delta y &= 0 \\ \ddot{\delta y} + 2g\delta y - g\delta x &= 0 \end{aligned}$$

Buscamos una solución de la forma $\delta x = \delta x_0 e^{i\omega t}$ y $\delta y = \delta y_0 e^{i\omega t}$, lo que implica

$$\begin{aligned} (2g - \omega^2)\delta x_0 - g\delta y_0 &= 0 \\ -g\delta x_0 + (2g - \omega^2)\delta y_0 &= 0 \end{aligned}$$

Este problema, tiene una solución trivial $\delta x_0 = \delta y_0 = 0$ que no buscamos. Por lo tanto, hay una solución no trivial si el determinante del sistema siguiente es nulo

$$\begin{pmatrix} 2g - \omega^2 & -g \\ -g & 2g - \omega^2 \end{pmatrix}$$

Lo que corresponde a $(2g - \omega)^2 - g^2 = 0$, es decir $\omega = \{-\sqrt{3g}, -\sqrt{g}, \sqrt{g}, \sqrt{3g}\}$. Los modos normales son $(\sqrt{g}, \sqrt{3g})$

4/ Para resolver completamente el problema, tenemos que encontrar los valores de δx_0 y δy_0 para cada modo normal. Para $\omega = \pm\sqrt{g}$, tenemos

$$\begin{aligned} g\delta x_0 - g\delta y_0 &= 0 \\ -g\delta x_0 + g\delta y_0 &= 0 \end{aligned}$$

es decir $\delta x_0 = \delta y_0$. Y para $\omega = \pm\sqrt{3g}$, tenemos

$$\begin{aligned} -g\delta x_0 - g\delta y_0 &= 0 \\ -g\delta x_0 - g\delta y_0 &= 0 \end{aligned}$$

es decir $\delta x_0 = -\delta y_0$. Por lo tanto las soluciones finales son

$$\begin{aligned} x &= Ae^{i\sqrt{g}t} + Be^{-i\sqrt{g}t} + Ce^{i\sqrt{3g}t} + De^{-i\sqrt{3g}t} \\ y &= Ae^{i\sqrt{g}t} + Be^{-i\sqrt{g}t} - Ce^{i\sqrt{3g}t} - De^{-i\sqrt{3g}t} \end{aligned}$$

lo que podemos también escribir (después de una redefinición de las constantes)

$$\begin{aligned} x &= \alpha\cos(\sqrt{g}t) + \beta\sin(\sqrt{g}t) + \gamma\cos(\sqrt{3g}t) + \delta\sin(\sqrt{3g}t) \\ y &= \alpha\cos(\sqrt{g}t) + \beta\sin(\sqrt{g}t) - \gamma\cos(\sqrt{3g}t) - \delta\sin(\sqrt{3g}t) \end{aligned}$$

Inicialmente, la partícula es dejada de una posición sin velocidad, por lo tanto $\beta = \delta = 0$, es decir

$$\begin{aligned} x &= \alpha\cos(\sqrt{g}t) + \gamma\cos(\sqrt{3g}t) \\ y &= \alpha\cos(\sqrt{g}t) - \gamma\cos(\sqrt{3g}t) \end{aligned}$$

Si queremos una oscilación solamente del modo más alto, tenemos que tener $\alpha = 0$ es decir una condición inicial $x_0 = -y_0$.

2. Oscilaciones acopladas

La posición de la primera masa es, $\ell\sin\theta_1\vec{e}_x - \ell\cos\theta_1\vec{e}_y$, aunque la posición de la segunda masa es, $a\vec{e}_x + \ell\sin\theta_2\vec{e}_x - \ell\cos\theta_2\vec{e}_y$, con a la distancia entre los dos hilos cuando $\theta_1 = \theta_2 = 0$. La energía potencial total es

$$V = -mg\ell\cos\theta_1 - mg\ell\cos\theta_2 + \frac{1}{2}k\ell^2\Big((\cos\theta_2 - \cos\theta_1)^2 + (\sin\theta_2 - \sin\theta_1)^2\Big)$$

y la energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}m\ell^2\left(\dot\theta_1^2 + \dot\theta_2^2\right)$$

El lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2}m\ell^2\left(\dot\theta_1^2 + \dot\theta_2^2\right) + mg\ell\cos\theta_1 + mg\ell\cos\theta_2 - \frac{1}{2}k\ell^2\Big((\cos\theta_2 - \cos\theta_1)^2 + (\sin\theta_2 - \sin\theta_1)^2\Big)$$

En la aproximación de pequeñas oscilaciones, el lagrangiano se reduce a

$$L = \frac{1}{2}m\ell^2(\dot\theta_1^2 + \dot\theta_2^2) - \frac{1}{2}mg\ell(\theta_1^2 + \theta_2^2) - \frac{1}{2}k\ell^2(\theta_2 - \theta_1)^2$$

lo que nos permite obtener las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} \ddot\theta_1 + \Big(\frac{g}{\ell} + \frac{k}{m}\Big)\theta_1 - \frac{k}{m}\theta_2 &= 0 \\ \ddot\theta_2 - \frac{k}{m}\theta_1 + \Big(\frac{g}{\ell} + \frac{k}{m}\Big)\theta_2 &= 0 \end{aligned}$$

A partir de lo cual podemos facilmente obtener los modos normales $\{g/\ell, g/\ell + 2k/m\}$