1. Constantes del movimiento

Un sistema de dos grados de libertad está descrito por el Hamiltoniano

$$H = q_1 p_1 - q_2 p_2 - a q_1^2 + b q_2^2$$

donde a y b son constantes. Demostrar que

$$F_1 = \frac{p_1 - a q_1}{q_2} \text{ y } \quad F_2 = q_1 q_2$$

son constantes del movimiento.

2. Constante del movimiento

Demostrar mediante el uso de corchetes de Poisson que para un oscilador armónico unidimensional, existe una constante de movimiento u definida como

$$u(q,p,t) = \ln(p + im\omega q) - i\omega t, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

3. Transformación canónica

Utilizando los corchetes de Poisson, encontrar los valores de α y β para los que las ecuaciones

$$Q = q^\alpha \cos \beta p, \quad P = q^\alpha \sin \beta p$$

representan una transformación canónica.

4. Transformación compleja

Uno de los intentos de combinar dos conjuntos de ecuaciones de Hamilton en uno solo trata de tomar q y p como formando una cantidad compleja. Demostrar directamente a partir de las ecuaciones de movimiento de Hamilton que para un sistema de un grado de libertad la transformación

$$Q = q + ip, \quad P = Q^*$$

no es canónica si el Hamiltoniano se deja inalterado. Se puede encontrar otro conjunto de coordenadas Q' y P' que estén relacionadas con Q, P sólo por un cambio de escala, y que sean canónicas?