1. Constantes del movimiento

Como tanto F_1 como F_2 no tienen dependencia explícita del tiempo $\left(\frac{\partial F_1}{\partial t} = \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0\right)$, por tanto, serán constantes del movimiento, si sus corchetes de Poisson con el Hamiltoniano son nulas, es decir,

$$\frac{dF_1}{dt} = \{F_1, H\} = 0$$
$$\frac{dF_2}{dt} = \{F_2, H\} = 0.$$

Tenemos

$$\begin{aligned}\{F_1, H\} &= \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial F_1}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F_1}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\\ &= \left(\left(-\frac{a}{q_2}\right)q_1 + \left(-\frac{p_1 - aq_1}{q_2^2}\right)(-q_2) - \left(\frac{1}{q_2}\right)(p_1 - 2aq_1) - 0\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\{F_2, H\} &= \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial F_2}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F_2}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\\ &= q_2 q_1 + q_1(-q_2) - 0 - 0\\ &= 0\end{aligned}$$

Por tanto, tanto F_1 como F_2 son constantes de movimiento.

2. Constante del movimiento

Sabemos que una cantidad u es una constante de movimiento siempre que

$$\frac{du}{dt} = \{u, H\} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Para el oscilador armónico simple 1D, el Hamiltoniano es

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2,$$

para que

$$\begin{aligned}\{u, H\} + \frac{\partial u}{\partial t} &= \left(\frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q}\right) - i\omega\\ &= \left(\frac{im\omega}{p + im\omega q}\right)\left(\frac{p}{m}\right) - \left(\frac{1}{p + im\omega q}\right)m\omega^2 q - i\omega\\ &= \frac{i\omega p - m\omega^2 q}{p + im\omega q} - i\omega\\ &= \frac{i\omega p - m\omega^2 q - i\omega p + m\omega^2 q}{p + im\omega q}\\ &= 0\end{aligned}$$

por lo tanto, u es una constante de movimiento.

3. Transformación canónica

Los corchetes de Poisson fundamentales deben permanecer invariantes bajo una transformación canónica, es decir,

$$
\begin{aligned}
& \{Q,P\}_{q,p} = 1 \\
\implies \quad & \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = 1 \\
\implies \quad & \left(\alpha q^{\alpha-1}\cos\beta p\right)\left(\beta q^{\alpha}\cos\beta p\right) - \left(-\beta q^{\alpha}\sin\beta p\right)\left(\alpha q^{\alpha-1}\sin\beta p\right) = 1 \\
\implies \quad & \alpha\beta q^{2\alpha-1}\left(\sin^2\beta p + \cos^2\beta p\right) = 1 \\
& \alpha\beta q^{2\alpha-1} = 1.
\end{aligned}
$$

Esta ecuación se satisface si $2\alpha - 1 = 0 \implies \alpha = 1/2$ y $\beta = 1/\alpha = 2$.

4. Transformación compleja

Una transformación dada es canónica si las ecuaciones de Hamilton se satisfacen en el sistema de coordenadas transformado $\frac{\partial H}{\partial Q}$ y $\frac{\partial H}{\partial P}$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial Q} &= \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial Q} + \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial Q} \\
\frac{\partial H}{\partial P} &= \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial P} + \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial P}
\end{aligned}
$$

Utilizando el hecho de que las variables canónicas (q,p) satisfacen las ecuaciones de Hamilton, obtenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial Q} &= -\dot{p}\frac{\partial q}{\partial Q} + \dot{q}\frac{\partial p}{\partial Q} \\
\frac{\partial H}{\partial P} &= -\dot{p}\frac{\partial q}{\partial P} + \dot{q}\frac{\partial p}{\partial P}
\end{aligned}
$$

Dado que

$$
\begin{aligned}
q &= \frac{1}{2}(P+Q) \\
p &= \frac{i}{2}(P-Q),
\end{aligned}
$$

tenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial q}{\partial Q} &= \frac{\partial q}{\partial P} = \frac{1}{2} \\
\frac{\partial p}{\partial Q} &= -\frac{\partial p}{\partial P} = -\frac{i}{2}
\end{aligned}
$$

Sustituyendo lo anterior, obtenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial Q} &= -\frac{1}{2}\dot{p} - \frac{i}{2}\dot{q} = -\frac{i}{2}(\dot{q} - i\dot{p}) = -\frac{i}{2}\dot{P} \\
\frac{\partial H}{\partial P} &= -\frac{1}{2}\dot{p} + \frac{i}{2}\dot{q} = \frac{i}{2}(\dot{q} + i\dot{p}) = \frac{i}{2}\dot{Q}
\end{aligned}
$$

Así, el Hamiltoniano H expresado en términos de Q y P no satisface las ecuaciones de Hamilton, haciendo que la transformación no sea canónica. Escalemos estas variables para definir $Q' = \lambda Q$, y $P' = \mu P$, para que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial Q'} &= \frac{\partial H}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial Q'} = -\frac{i\dot{P}}{2\lambda} = -\frac{i}{2\lambda\mu}\dot{P}' \\
\frac{\partial H}{\partial P'} &= \frac{\partial H}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial P'} = \frac{i\dot{Q}}{2\mu} = \frac{i}{2\lambda\mu}\dot{Q}'.
\end{aligned}
$$

Si elegimos λ y μ tales que $\lambda\mu = \frac{i}{2}$, las ecuaciones de Hamilton se satisfarán en las variables Q' y P', y la transformación se hará canónica. Una opción que lo conseguirá es

$$\lambda = \mu = \frac{i^{1/2}}{\sqrt{2}} = \frac{(1+i)}{2}$$