1. Fuerza central

El lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \left(r^2\sin^2\theta\right)\dot{\phi}^2\right] - V(r)$$

donde θ es el ángulo azimutal y ϕ es un ángulo. Los momentos conjugados se denominan p_r, p_θ y p_ϕ. Las ecuaciones que los definen son

$$\begin{aligned}
p_r &\equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r},\\
p_\theta &\equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta},\\
p_\phi &\equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m\left(r^2\sin^2\theta\right)\dot{\phi}.
\end{aligned}$$

Invirtiendo estas ecuaciones se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= \frac{p_r}{m},\\
\dot{\theta} &= \frac{p_\theta}{mr^2},\\
\dot{\phi} &= \frac{p_\phi}{mr^2\sin^2\theta}.
\end{aligned}$$

El hamiltoniano es

$$H = p_\alpha\dot{q}^\alpha - L = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2\sin^2\theta} + V(r) \equiv T + V,$$

donde la energía cinética T es la suma de los tres primeros términos. Las ecuaciones canónicas de Hamilton en estas variables son

$$\begin{aligned}
\dot{r} &\equiv \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}\,,\\
\dot{\theta} &\equiv \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}\,,\\
\dot{\phi} &\equiv \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2\sin^2\theta}\,,\\
\dot{p}_r &\equiv -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{1}{mr^3}\left[p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta}\right] - V'(r)\,,\\
\dot{p}_\theta &\equiv -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\phi^2\cos\theta}{mr^2\sin^3\theta}\,,\\
\dot{p}_\phi &\equiv -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0.
\end{aligned}$$

Si $p_\phi(0) = 0$, la última de las ecuaciones implica que $p_\phi(t) = 0$ para todo t. Entonces las ecuaciones canónicas pasan a ser

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}\,,$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\theta} &= \frac{p_\theta}{mr^2}\,, \\
\dot{\phi} &= 0\,, \\
\dot{p}_r &= \frac{p_\theta^2}{mr^3} - V'(r)\,, \\
\dot{p}_\theta &= 0\,, \\
\dot{p}_\phi &= 0.
\end{aligned}
$$

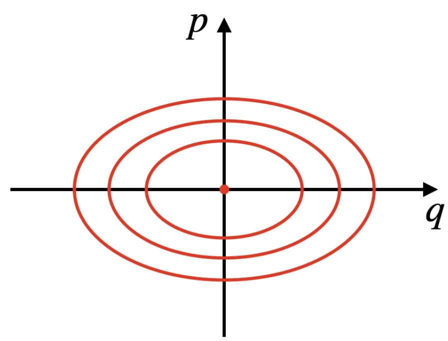
De $\phi(0) = 0$ y de estas ecuaciones se deduce que $\phi(t) = 0$ para todo t : el movimiento se mantiene en el plano $\phi = 0$. El resultado es el sistema de dos grados formado por las tres ecuaciones no triviales. Tenemos que p_θ es una constante del movimiento. Se trata del momento angular en el plano $\phi = 0$, llamado ℓ en el problema de 2 cuerpos.

2. Potencial cuadrático

Las ecuaciones de movimiento son

$$
\begin{aligned}
\dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}\,, \\
\dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2 q
\end{aligned}
$$

Claramente, hay un solo punto fijo en $q = 0$ y $p = 0$. Es un punto estacionario. En cualquier otro punto del espacio de fase, el sistema siempre evoluciona. Las curvas de energía (H) constante corresponden a elipses. El elipse de eje nulo corresponde al punto estacionario.



3. Potencial cuadrático repulsivo

Las ecuaciones de movimiento son

$$
\begin{aligned}
\dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}\,, \\
\dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = aq
\end{aligned}
$$

Claramente, hay de nuevo un solo punto fijo en $q = 0$ y $p = 0$. Pero si hacemos un estudio alrededor de este punto, obtenemos que este punto es hiperbólico según la nomenclatura de los sistemas dinámicos. En nuestro caso, el sistema es trivial ya que es lineal. En caso de un sistema no-lineal, podríamos linearizar el sistema alrededor del punto fijo y predecir el comportamiento alrededor de este punto. Se llama el teorema de Hartman–Grobman, ocurre cuando los valores propios del sistema linearizado no tienen una parte real nula.
De forma generica, el estudio alrededor de un punto fijo se hace de la forma siguiente. Consideramos el sistema dinamico siguiente

$$
\dot{x} = f(x, y)
$$

$$\dot{y} = g(x, y)$$

con un punto fijo en $(x, y) = x_0, y_0$ es decir $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$. Suponiendo que el punto fijo es hiperbolico, podemos escribir $x = x_0 + \delta x$ y $y = y_0 + \delta y$, lo que nos permite obtener

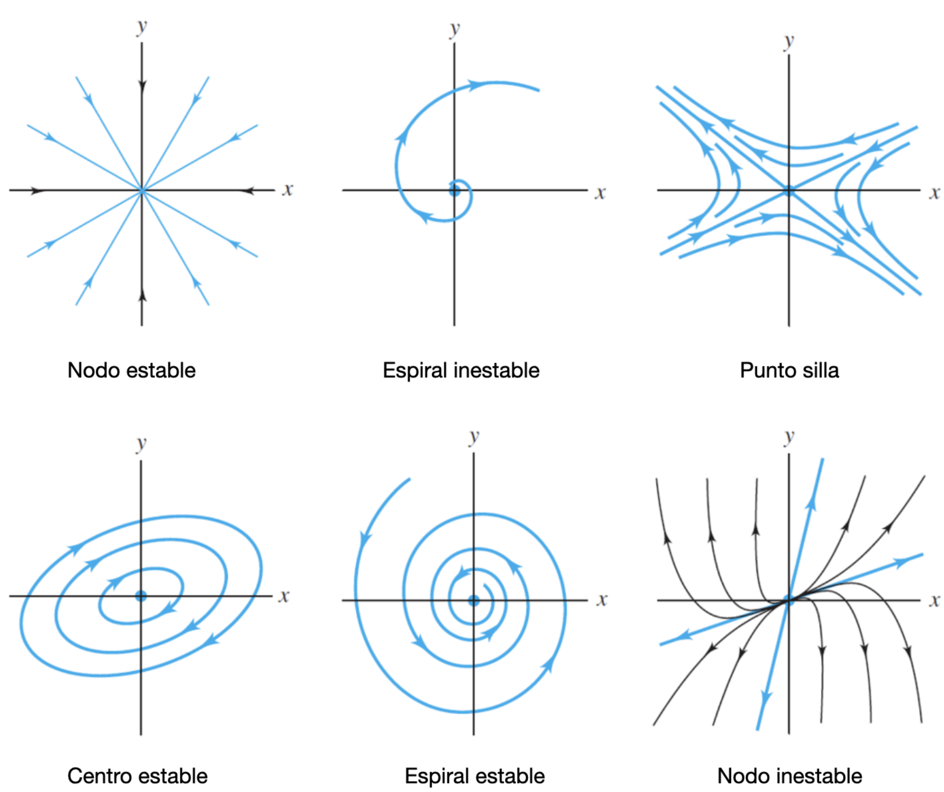
$$\dot{\delta x} = f(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y) \simeq \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\ \delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\ \delta y$$
$$\dot{\delta y} = g(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y) \simeq \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)\ \delta x + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)\ \delta y$$

es decir

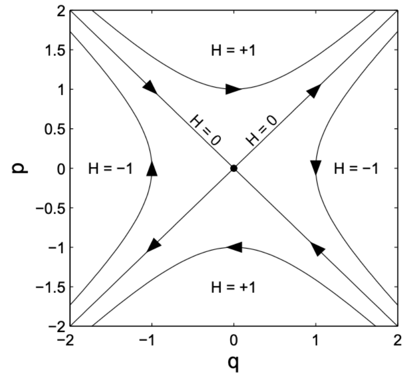
$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix}$$

El estudio de los valores propios y vectores propios de la matriz nos permite clasificar el tipo de punto fijo. Escribimos los dos valores propios como λ_1 y λ_2.

Valor propio	Comportamiento
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}; \quad \lambda_1, \lambda_2 < 0$	Nodo estable
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}; \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0$	Nodo inestable
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R};$ $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ o $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$	Punto silla (inestable)
$\lambda_1 = -a - bi, \lambda_2 = -a + bi$ or $\lambda_1 = -a + bi, \lambda_2 = -a - bi$ $a, b \in \mathbb{R}; a, b > 0$	Espiral estable
$\lambda_1 = a - bi, \lambda_2 = a + bi$ or $\lambda_1 = a + bi, \lambda_2 = a - bi$ $a, b \in \mathbb{R}; a, b > 0$	Espiral inestable
$\lambda_1 = -bi, \lambda_2 = bi$ or $\lambda_1 = bi, \lambda_2 = -bi$ $b \in \mathbb{R}; b > 0$	Centro estable



En nuestro problema, tenemos un punto silla



4. Péndulo simple

El lagrangiano de este sistema es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2 + mgL\cos\theta$$

y el hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \frac{p_\theta^2}{2mL^2} - mgL\cos\theta$$

las ecuaciones son

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mL^2}$$
$$\dot{p}_\theta = -mgL\sin\theta$$

Los puntos fijos se encuentran en $(\theta = n\pi, p_\theta = 0)$ con $n \in \mathbb{Z}$. Estudiaremos solamente los valores $n = \{-1, 0, 1\}$ ya que se repiten por periodicidad. La matriz del sistema linearizado cercano a los puntos fijos es

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{mL^2} \\ (-1)^{n+1} mgL & 0 \end{pmatrix}$$

con valores propios $(-1)^{(n+1)/2}\sqrt{g/L}$, lo que corresponde a un centro para $n = 0$ y para un punto silla para $n = \pm 1$.