1. La caída de un cubo

Podemos hacer el calculo a partir del centro de masa o a partir del punto de contacto. A partir del punto de contacto, tenemos

$$T = \frac{1}{2} I_{yy}^{(O)} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\Big(\frac{2}{3} ML^2\Big)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{3} ML^2 \dot{\theta}^2$$

A partir del centro de masa, tenemos

$$\begin{aligned} T = T_{rot} + T_{CM} &= \frac{1}{2} I_{yy}^{(CM)} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M\Big(\frac{L}{\sqrt{2}}\Big)^2 \dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{6} ML^2\Big)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M\Big(\frac{L}{\sqrt{2}}\Big)^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{3} ML^2 \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

Por otro lado, la energía potencial es

$$U = Mg\frac{L}{\sqrt{2}}\cos\theta$$

lo que nos permite obtener el lagrangiano

$$L = \frac{1}{3} ML^2 \dot{\theta}^2 - Mg\frac{L}{\sqrt{2}}\cos\theta$$

y la ecuación

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{L}\frac{3}{2\sqrt{2}}\sin\theta$$

que podemos integrar para obtener

$$\dot{\theta}^2 = \frac{g}{L}\frac{3}{\sqrt{2}}\Big(1 - \cos\theta\Big)$$

donde hemos usado la condición inicial, $\dot{\theta}(t=0) = 0$. Al momento del impacto, $\theta = \pi/4$, lo que nos da

$$\dot{\theta}^2 = \frac{g}{L}\frac{3}{2}(\sqrt{2} - 1)$$

2. Disco que rueda por encima de una sección semicircular

El centro de masa se encuentra en $\vec{R}_{CM} = (R+a)\vec{e}_r$, lo que implica

$$T_{CM} = \frac{1}{2} m(R+a)^2 \dot{\theta}^2$$

Tenemos también la energía de rotación de la pequeña esfera

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 I_{33}$$

$$I_{33} = \sigma \int \left(x^2 + y^2\right) dxdy = \sigma \int r^2 r dr d\theta = \sigma 2\pi \frac{a^4}{4} = \frac{1}{2} m a^2$$

donde hemos usado que $\sigma = m/\pi a^2$. La energía potencial es $mg(R + a)\cos\theta$.
Es importante ver que los dos ángulos (θ, ϕ) no son independiente. La velocidad del centro de masa es $(R+a)\dot{\theta}$ pero al mismo tiempo es $a\dot{\phi}$ es decir

$$(R + a)\dot{\theta} = a\dot{\phi}$$

lo que implica

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m (R + a)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{4} m a^2 \dot{\phi}^2 - mg(R + a)\cos\theta \\ &= \frac{3}{4} m (R + a)^2 \dot{\theta}^2 - mg(R + a)\cos\theta \end{aligned}$$

lo que nos permite obtener

$$\ddot{\theta} - \frac{2g}{3(R + a)} \sin\theta = 0$$

Integrando esta ecuación, tenemos

$$\dot{\theta}^2 = \frac{4g}{3(R + a)} (1 - \cos\theta)$$

donde hemos usado la condición inicial, $\dot{\theta} = 0$ cuando $\theta = 0$. Para resolver el problema, necesitamos la condición de no contacto entre los dos discos, es decir que no tenemos fuerza normal en la dirección radial. Sabemos que la ecuación de Newton en la dirección radial es

$$m a_r = F_r = N_r - mg\cos\theta$$

con N_r la fuerza normal. La condición de no contacto es entonces $a_r = -g\cos\theta$. Pero como

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= (R + a)\vec{e}_r \\ \vec{v} &= (R + a)\dot{\theta}\vec{e}_\theta \\ \vec{a} &= (R + a)\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - (R + a)\dot{\theta}^2\vec{e}_r \end{aligned}$$

es decir $a_r = -(R + a)\dot{\theta}^2$, lo que implica

$$\dot{\theta}^2 = \frac{g}{R + a} \cos\theta$$

Usando las dos ecuaciones, obtenemos

$$\frac{g}{R + a} \cos\theta = \frac{4g}{3(R + a)} (1 - \cos\theta)$$

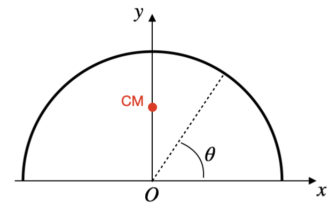
es decir $\cos\theta = 4/7$ o $\theta \simeq 55°$

3. Disco semicircular

Primero buscamos la posición del centro de masa.
Para un sistema discreto

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

lo que implica que para un sistema continuo



$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r}dm}{\int dm} = \frac{1}{M}\int \vec{r}dm$$

con $dm = \sigma r dr d\theta$, lo que nos permite obtener

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int xdm = \frac{\sigma}{M}\int r\cos\theta r dr d\theta = \frac{\sigma}{M}\int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \cos\theta d\theta = 0$$

y

$$y_{CM} = \frac{\sigma}{M}\int r\sin\theta r dr d\theta = \frac{\sigma}{M}\int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^r r^2 dr = \frac{2}{3}\frac{\sigma}{M}r^3$$

usando

$$\sigma = \frac{M}{\frac{1}{2}\pi r^2}$$

obtenemos

$$y_{CM} = \frac{4}{3\pi}r$$

Según el teorema de los ejes paralelos $I_{33}^{(O)}$ y $I_{33}^{(CM)}$ están relacionados, gracias al vector

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -y_{CM} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$I_{33}^{(0)} = I_{33}^{(CM)} + \int \sigma dS \underbrace{\left(a^2\delta_{33} - a_3 a_3\right)}_{y_{CM}^2} = My_{CM}^2 + I_{33}^{(CM)}$$

Pero

$$I_{33}^{(0)} = \sigma\int dS\left(r^2\delta_{33} - z^2\right) = \sigma\int r^2 dS = \sigma\pi\int_0^r r^3 dr = \sigma\pi\frac{r^4}{4} = \frac{1}{2}Mr^2$$

lo que nos da

$$I_{33}^{(CM)} = \frac{1}{2}Mr^2 - My_{CM}^2 = \frac{1}{2}Mr^2 - \frac{16}{9\pi^2}Mr^2 = \frac{1}{2}Mr^2\left[1 - \frac{32}{9\pi^2}\right]$$

La energía de rotación es

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 I_{33}^{CM} = \frac{1}{4}Mr^2\left[1 - \frac{32}{9\pi^2}\right]\dot{\theta}^2$$

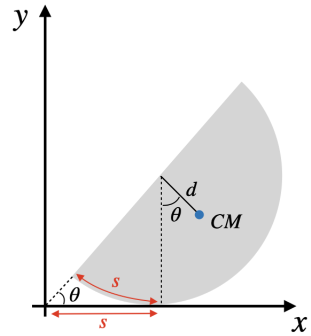
y la energía potencial

$$V = Mgh_{CM} = Mg\Big(r - y_{CM}\cos\theta\Big) = Mgr\Big(1 - \frac{4}{3\pi}\cos\theta\Big)$$

A la energía de rotación, debemos sumar la energía cinética del centro de masa

$$T_{CM} = \frac{1}{2}M\Big(\dot{x}_{CM}^2 + \dot{y}_{CM}^2\Big)$$

Observamos de la figura que



$$
\begin{aligned}
x_{CM} &= s + d\sin\theta \\
y_{CM} &= r - d\cos\theta
\end{aligned}
$$

es decir

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_{CM} &= \dot{s} + d\dot{\theta}\cos\theta \\
\dot{y}_{CM} &= d\dot{\theta}\sin\theta
\end{aligned}
$$

con s la longitud del arco, es decir $s = r\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ o $\dot{s} = -r\dot{\theta}$, lo que implica

$$\dot{x}_{CM} = \dot{\theta}(d\cos\theta - r)$$

o

$$T_{CM} = \frac{1}{2}M\left(d^2 + r^2 - 2rd\cos\theta\right)$$

El lagrangiano final es

$$L = \frac{1}{2}M\left(d^2 + r^2 - 2rd\cos\theta\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}Mr^2\left[1 - \frac{32}{9\pi^2}\right]\dot{\theta}^2 - mgr\left(1 - \frac{4}{3\pi}\cos\theta\right)$$

con $d = 4r/3\pi$. Podemos derivar la ecuación e integrarla o bien directamente considerar que es la energía y que se conserva. La energía es

$$E = \frac{1}{2}M\left(d^2 + r^2 - 2rd\cos\theta\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}Mr^2\left[1 - \frac{32}{9\pi^2}\right]\dot{\theta}^2 + mgr\left(1 - \frac{4}{3\pi}\cos\theta\right)$$

la energía inicial es $E = mgr$, lo que implica

$$\frac{1}{2}M\left(d^2 + r^2 - 2rd\cos\theta\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}Mr^2\left[1 - \frac{32}{9\pi^2}\right]\dot{\theta}^2 - \frac{4}{3\pi}mgr\cos\theta = 0$$

Cuando $\theta = 0$, obtenemos

$$\frac{1}{2}M\left(d^2 + r^2 - 2rd\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}Mr^2\left[1 - \frac{32}{9\pi^2}\right]\dot{\theta}^2 = \frac{4}{3\pi}mgr$$

es decir

$$\dot{\theta}^2 = \frac{16}{9\pi - 16}\frac{g}{r}$$