1. La historia del aro y el resorte

El lagrangiano en el sistema de referencia no inercial es

$$L = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + \frac{1}{2}m(\vec{\omega}\times\vec{r})^2 + m\vec{v}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}) - m\vec{r}\cdot\vec{A}(t) - U$$

Comenzamos con el calculo de la aceleración del punto O' considerado como el centro del sistema de referencia no inercial. El punto O' tiene una rotación con respecto al eje de rotación. Su velocidad es

$$\vec{V}(t) = \vec{\Omega}\times(-2R)\vec{e}_x = -2R\Omega\vec{e}_y\times\vec{e}_x = 2R\Omega\vec{e}_z$$

con $\vec{e}_x$ el vector a lo largo del eje $(O'O)$. La aceleración es

$$\vec{A}(t) = \vec{\Omega}\times\vec{V}(t) = 2R\Omega^2\vec{e}_x$$

Para el lagrangiano, necesitaremos

$$\begin{aligned}\vec{r}\cdot\vec{A}(t) &= 2R^2\Omega^2(\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y)\cdot\vec{e}_x \\ &= 2R^2\Omega^2\cos\theta\end{aligned}$$

con $\vec{r}$ la posición de la masa m. Las otras componentes son simple de calcular

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m\vec{v}^2 &= \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 \\ U &= mgR\sin\theta + \frac{1}{2}kR^2\theta^2 \\ \vec{\Omega}\times\vec{r} &= \Omega R\vec{e}_y\times(\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y) = -\Omega R\cos\theta\vec{e}_z \\ \vec{v}\cdot(\vec{\Omega}\times\vec{r}) &= 0\end{aligned}$$

Lo que nos permite obtener

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - mgR\sin\theta - \frac{1}{2}kR^2\theta^2 + \frac{1}{2}mR^2\Omega^2\cos^2\theta - 2mR^2\Omega^2\cos\theta$$

y la ecuación de la dinámica de la masa

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{R}\cos\theta - \frac{k}{m}\theta + 2\Omega^2\sin\theta - \frac{1}{2}\Omega^2\sin 2\theta$$

Cuando $\theta = \frac{\pi}{2}$, queremos $\ddot{\theta} = 0$, lo que nos da

$$\Omega^2 = \frac{k\pi}{4m}$$

2. Un tirador

En el sistema de referencia no inercial el punto B no se mueve, se encuentra siempre en $x = R$ y $y = 0$ y el punto A se encuentra en $(-R, 0)$. En este sistema de referencia, el lagrangiano que describe el movimiento de la bala es

$$L = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + \frac{1}{2}m(\vec{\omega}\times\vec{r})^2 + m\vec{v}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}) - m\vec{r}\cdot\vec{A}(t) - U$$

Tenemos dos sistemas de referencia. El sistema no inercial se encuentra centrado en O y gira a a una velocidad angular ω aunque el otro sistema, inercial, se encuentra en el centro O con ejes fijos. Por lo tanto, tenemos

$$\vec{A}(t) = \vec{0}$$

Podemos despreciar la energía potencial de gravitaci'on n este problema, $U = 0$.
Para las otras componentes del lagrangiano, tenemos

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x\vec{e}_x + y\vec{e}_y \\ \vec{\omega} &= \omega\vec{e}_z \\ \omega \times \vec{r} &= \omega(x\vec{e}_y - y\vec{e}_x) \end{aligned}$$

es decir

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2) + m\omega(x\dot{y} - y\dot{x})$$

Como asumimos que $v_0 \gg R\omega$, el segundo termino es despreciable en comparación con el tercer

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m\omega(x\dot{y} - y\dot{x})$$

lo que nos permite obtener el sistema

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} &= 0 \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} &= 0 \end{aligned}$$

que resolvemos fácilmente

$$\begin{aligned} x(t) &= A + \gamma\cos(2\omega t + \phi) \\ y(t) &= B - \gamma\sin(2\omega t + \phi) \end{aligned}$$

Usando las condiciones iniciales

$$x(t=0) = -R\,,\quad y(t=0) = 0\,,\quad \dot{x}(t=0) = v_0\cos\alpha\,,\quad \dot{y}(t=0) = v_0\sin\alpha$$

obtenemos

$$\begin{aligned} x(t) &= -R + \frac{v_0}{2\omega}\sin\alpha + \frac{v_0}{2\omega}\sin(2\omega t - \alpha) \\ y(t) &= -\frac{v_0}{2\omega}\cos\alpha + \frac{v_0}{2\omega}\cos(2\omega t - \alpha) \end{aligned}$$

Cuando la bala llega en B, en el tiempo τ, $x(\tau) = R$ y y $y(\tau) = 0$ lo que nos permite obtener $\tau = \alpha/\omega$, es decir

$$\frac{v_0}{\omega}\sin\alpha = 2R$$

Pero como α debe ser pequeño

$$\alpha \simeq \frac{2\omega R}{v_0}$$