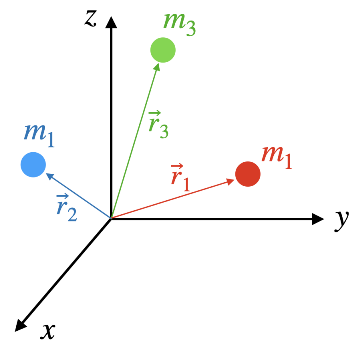
El problema restringido de los tres cuerpos

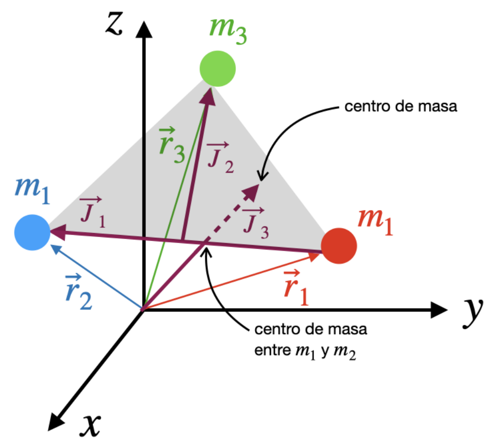


El problema de tres cuerpos no tiene solución en general, pero en algunas situaciones se puede resolver. En particular, Lagrange y Poincaré han estudiado el problema con una de las 3 masas mucho más pequeña que las 2 otras, lo que corresponde a un sistema tipo Sol-Tierra-Luna por ejemplo.
En ese problema, consideremos 3 masas (m_1, m_2, m_3) de posiciones $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)$.

1/ En primer lugar, para conocer el problema completo, se pide obtener el lagrangiano y las ecuaciones de movimiento de las 3 partículas.

2/ Usando las coordenadas de Jacobi, demostrar que se simplifica el sistema de un espacio de fase de 18 dimensiones a 12 dimensiones.

$$\vec{J}_1 = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$
$$\vec{J}_2 = \vec{r}_3 - \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$
$$\vec{J}_3 = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$



3/ Vamos a tratar de resolver el problema en una situación particular. En una primera parte, eliminaremos totalmente la masa 3. Consideramos el problema de 2 cuerpos. Encontrar la solución correspondiente a una trayectoria circular de radio r_0. Demostrar que las masas se mueven con velocidad angular $\omega^2 = G(m_1+m_2)/r_0^3$.

4/ En esta segunda parte, consideramos la tercera masa pero tan débil que no afecta la trayectoria de las 2 otras. Por lo tanto, la trayectoria anterior quedara circular. Trabajamos en el sistema de referencia no-inercial asociado al centro de masa del sistema binario con eje x, el eje que conecta las 2 masas. Este sistema de referencia tiene velocidad angular ω, es decir que las 2 masas quedan siempre en el eje x. Asumimos que la tercera masa se mueve en el mismo plano. Demostrar que el lagrangiano de la tercera masa, en el sistema de referencia no-inercial, sometida a la fuerza gravitacional del sistema binario es

$$L = \frac{1}{2}m_3\Big((\dot{x} - \omega y)^2 + (\dot{y} + \omega x)^2\Big) + \frac{Gm_1m_3}{\sqrt{\left(x - \frac{m_2}{m_1+m_2}r_0\right)^2 + y^2}} + \frac{Gm_2m_3}{\sqrt{\left(x + \frac{m_1}{m_1+m_2}r_0\right)^2 + y^2}}$$

5/ Escribir las ecuaciones de movimiento de la tercera masa

6/ Queremos buscar las posiciones estacionarias, llamados puntos de Lagrange. Escribir las ecuaciones para encontrar los puntos estacionarios

7/ Para $y = 0$, demostrar que tenemos 3 soluciones y encontrar sus localizaciones relativas a las masa 1 y 2.

8/ Los puntos previos se llaman L_1, L_2 y L_3, se encuentran en $y = 0$. Ahora, queremos buscar los puntos L_4 y L_5. Encontrar la posición de estos 2 últimos puntos de Lagrange