

El problema restringido de los tres cuerpos

1/ De forma generica, tenemos

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{\vec{r}}_3^2 + \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} + \frac{Gm_1m_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} + \frac{Gm_2m_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|}$$

La variación con respecto a \vec{r}_1 nos da

$$\ddot{\vec{r}}_1 = Gm_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} + Gm_3 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3}$$

De forma similar, encontramos

$$\ddot{\vec{r}}_2 = Gm_1 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} + Gm_3 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^3}$$

y

$$\ddot{\vec{r}}_3 = Gm_1 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^3} + Gm_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3}$$

Lo que es un sistema muy complicado. Jacobi simplifico el problema con nuevas variables, llamadas coordenadas de Jacobi, donde se introduce el centro de masa

$$\begin{aligned} \vec{J}_1 &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \\ \vec{J}_2 &= \vec{r}_3 - \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \\ \vec{J}_3 &= \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3} \end{aligned}$$

El lagrangiano se transforma en

$$L = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{J}}_1^2 + \frac{(m_1 + m_2)m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \dot{\vec{J}}_2^2 + (m_1 + m_2 + m_3) \dot{\vec{J}}_3^2 + \frac{Gm_1m_2}{|\vec{J}_1|} + \frac{Gm_1m_3}{|\vec{J}_2 + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{J}_1|} + \frac{Gm_2m_3}{|\vec{J}_2 - \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{J}_1|}$$

De lo cual, vemos que la dinámica de \vec{J}_3 de desacopla por ser una variable cíclica. El centro de masa tiene un movimiento independiente.

2/ En el caso de 2 partículas (ver clase) sabemos que el movimiento es plano y se reduce al lagrangiano siguiente

$$L = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{Gm_1m_2}{r}$$

con (hemos definido $\vec{r}_{CM} = \vec{0}$)

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} \\ \vec{r}_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \\ \vec{r}_2 &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \end{aligned}$$

Las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned}\mu\ddot{r} &= \mu r\dot{\theta}^2 - \frac{Gm_1m_2}{r^2} \\ \mu r^2\dot{\theta} &= C^{\text{ste}} \equiv \ell \quad \text{el momento angular}\end{aligned}$$

Usando estas ecuaciones, llegamos a

$$\mu\ddot{r} = \frac{\ell^2}{\mu r^3} - \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

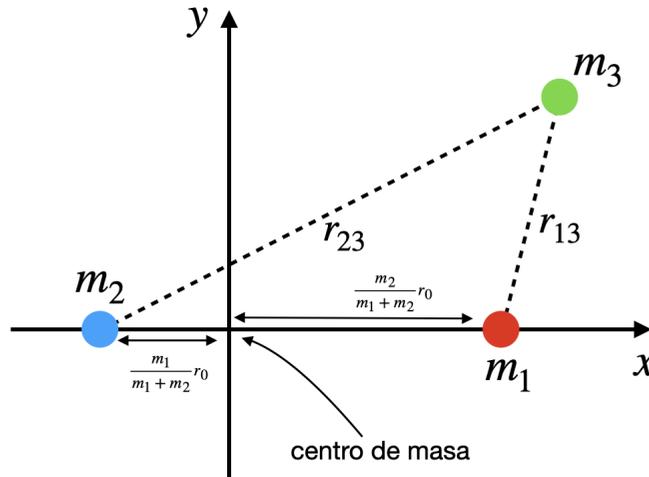
La trayectoria es circular si $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ es decir

$$\frac{\ell^2}{\mu r_0^3} - \frac{Gm_1m_2}{r_0^2} = 0 \quad \iff \quad r_0 = \frac{\ell^2}{\mu Gm_1m_2}$$

La velocidad angular es $\omega \equiv \dot{\theta} = \ell/\mu r_0^2$ es decir

$$\omega^2 = \frac{\ell^2}{\mu^2 r_0^4} = \frac{Gm_1m_2}{\mu r_0^3} = \frac{G(m_1 + m_2)}{r_0^3}$$

3/ Trabajando en el sistema de referencia no-inercial del sistema binario



tenemos para la tercera masa

$$\begin{aligned}L &= \frac{1}{2}m_3(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}m_3\omega^2(x^2 + y^2) + m_3\omega(xy - yx) + \frac{Gm_1m_3}{r_{13}} + \frac{Gm_2m_3}{r_{23}} \\ &= \frac{1}{2}m_3\left((\dot{x} - \omega y)^2 + (\dot{y} + \omega x)^2\right) + \frac{Gm_1m_3}{r_{13}} + \frac{Gm_2m_3}{r_{23}}\end{aligned}$$

con (por teorema de Pitágoras)

$$r_{13}^2 = \left(x - \frac{m_2}{m_1 + m_2}r_0\right)^2 + y^2, \quad r_{23}^2 = \left(x + \frac{m_1}{m_1 + m_2}r_0\right)^2 + y^2$$

Por lo tanto, el lagrangiano final es

$$L = \frac{1}{2}m_3\left((\dot{x} - \omega y)^2 + (\dot{y} + \omega x)^2\right) + \frac{Gm_1m_3}{\sqrt{\left(x - \frac{m_2}{m_1+m_2}r_0\right)^2 + y^2}} + \frac{Gm_2m_3}{\sqrt{\left(x + \frac{m_1}{m_1+m_2}r_0\right)^2 + y^2}}$$

4/ Obtenemos

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} = \omega^2 x - \frac{Gm_1 \left(x - \frac{m_2 r_0}{m_1 + m_2}\right)}{\left(\left(x - \frac{m_2 r_0}{m_1 + m_2}\right)^2 + y^2\right)^{3/2}} - \frac{Gm_2 \left(x + \frac{m_1 r_0}{m_1 + m_2}\right)}{\left(\left(x + \frac{m_1 r_0}{m_1 + m_2}\right)^2 + y^2\right)^{3/2}}$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} = \omega^2 y - y \frac{Gm_1}{\left(\left(x - \frac{m_2 r_0}{m_1 + m_2}\right)^2 + y^2\right)^{3/2}} - y \frac{Gm_2}{\left(\left(x + \frac{m_1 r_0}{m_1 + m_2}\right)^2 + y^2\right)^{3/2}}$$

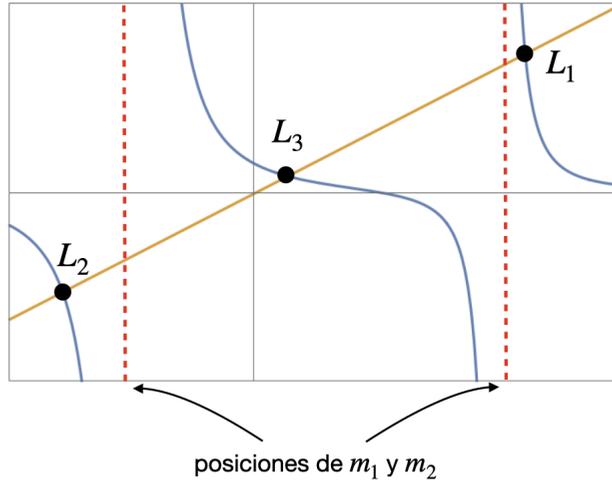
5/ Buscamos puntos tales que $\dot{x} = \dot{y} = \ddot{x} = \ddot{y} = 0$

$$\omega^2 x - \frac{Gm_1 \left(x - \frac{m_2 r_0}{m_1 + m_2}\right)}{\left(\left(x - \frac{m_2 r_0}{m_1 + m_2}\right)^2 + y^2\right)^{3/2}} - \frac{Gm_2 \left(x + \frac{m_1 r_0}{m_1 + m_2}\right)}{\left(\left(x + \frac{m_1 r_0}{m_1 + m_2}\right)^2 + y^2\right)^{3/2}} = 0$$

$$\omega^2 y - y \frac{Gm_1}{\left(\left(x - \frac{m_2 r_0}{m_1 + m_2}\right)^2 + y^2\right)^{3/2}} - y \frac{Gm_2}{\left(\left(x + \frac{m_1 r_0}{m_1 + m_2}\right)^2 + y^2\right)^{3/2}} = 0$$

6/ Para $y = 0$, tenemos

$$\omega^2 x = \frac{Gm_1 \left(x - \frac{m_2 r_0}{m_1 + m_2}\right)}{\left|x - \frac{m_2 r_0}{m_1 + m_2}\right|^3} + \frac{Gm_2 \left(x + \frac{m_1 r_0}{m_1 + m_2}\right)}{\left|x + \frac{m_1 r_0}{m_1 + m_2}\right|^3}$$



Representando la parte derecha y izquierda de la ecuación, vemos que hay 3 soluciones que se encuentran antes, entre y después de las 2 masas.

7/ Si $y \neq 0$, tenemos

$$\omega^2 = \frac{Gm_1}{\left(\left(x - \frac{m_2 r_0}{m_1 + m_2}\right)^2 + y^2\right)^{3/2}} + \frac{Gm_2}{\left(\left(x + \frac{m_1 r_0}{m_1 + m_2}\right)^2 + y^2\right)^{3/2}}$$

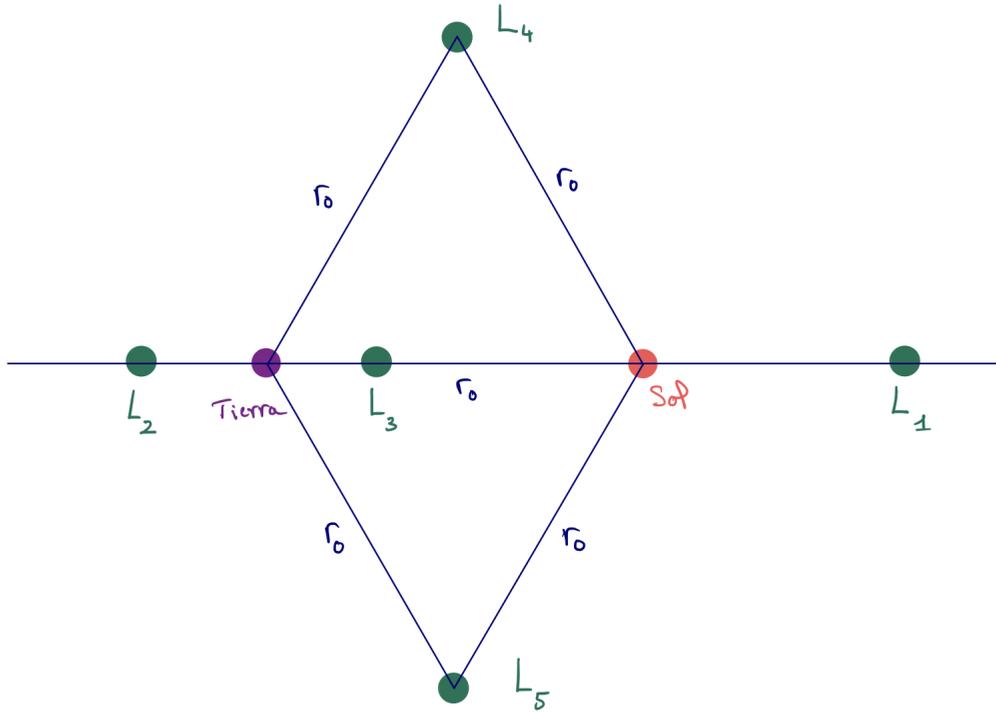
Ocupando esta ecuación con la primera, tenemos

$$\frac{1}{\left(\left(x - \frac{m_2 r_0}{m_1 + m_2}\right)^2 + y^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{\left(\left(x + \frac{m_1 r_0}{m_1 + m_2}\right)^2 + y^2\right)^{3/2}}$$

Es decir $r_{13} = r_{23}$, lo que implica

$$\omega^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{r_{13}^3} = \frac{G(m_1 + m_2)}{r_{23}^3}$$

Pero como lo hemos visto al principio $\omega^2 = \frac{G(m_1+m_2)}{r_0^3}$, es decir que tenemos $r_{13} = r_{23} = r_0$.



La NASA y la ESA utilizan los puntos de Lagrange L_2 y L_3 para colocar satélites. Hay observatorios solares en L_3 (dirigido hacia el sol); satélites como WMAP y PLANCK, que miden la radiación cósmica de fondo (el resplandor del Big Bang) recogen sus datos en L_2 (no dirigido hacia la luz del sol). Aparentemente, hay una gran colección de polvo cósmico que se ha acumulado en L_4 y L_5 . Estos últimos puntos son los únicos estables, L_1 , L_2 y L_3 son inestables. Otros sistemas planetarios (por ejemplo los sistemas sol-júpiter y sol-martes) tienen grandes asteroides conocidos como troyanos, atrapados en sus L_4 y L_5 .

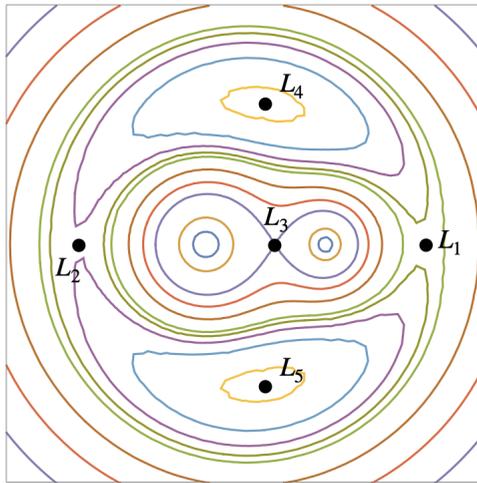
Del lagrangiano, podemos definir un potencial efectivo

$$V_{ef}(x, y) = -\frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) - \frac{Gm_1}{r_{13}} - \frac{Gm_2}{r_{23}}$$

Las ecuaciones se reescriben

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} &= -\frac{\partial V_{ef}}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} &= -\frac{\partial V_{ef}}{\partial y} \end{aligned}$$

Las líneas de nivel del potencial efectivo son



Veamos mejor porque solo L_4 y L_5 son estables.