1. Orbitas

Hemos visto que

$$\mu\ddot{r} = -\frac{k}{r^2} + \frac{\ell^2}{\mu r^3}$$

Multiplicamos esta ecuación por $\dot{r}$, obtenemos

$$\mu\dot{r}\ddot{r} = -k\frac{\dot{r}}{r^2} + \ell^2\frac{\dot{r}}{\mu r^3}$$

lo que se puede perfectamente integrar

$$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 = \frac{k}{r} - \frac{\ell^2}{2\mu r^2} + \text{constante}$$

Está constante es la energía total, de hecho

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\mu\|\vec{v}\|^2 - \frac{k}{r} \\ &= \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{k}{r}\,,\ \text{con } \ell = \mu r^2\dot{\theta} \\ &= \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r} \end{aligned}$$

Definiendo el potencial efectivo

$$V_{ef} = -\frac{k}{r} + \frac{\ell^2}{2\mu r^2}$$

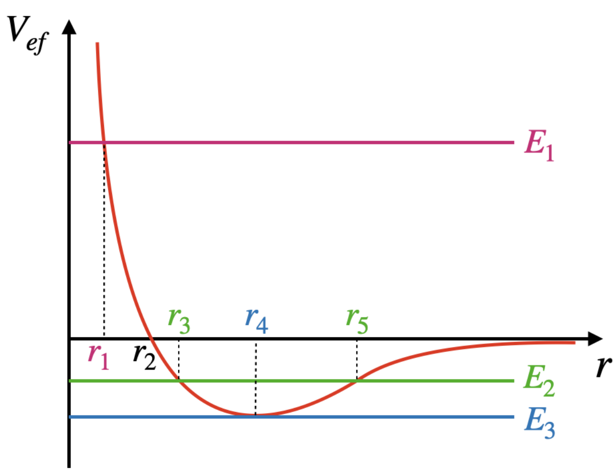
la ecuación previa se transforma en

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V_{ef}$$

lo que implica

$$E - V_{ef} = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 \geq 0$$

es decir que $E \geq V_{ef}$.



Observamos 4 situaciones diferentes

1. Cuando $E > 0$ es decir $E = E_1$. Si $r < r_1 \Rightarrow V_{\text{ef}} > E$ lo que es imposible, es decir que r puede ir de r_1 al infinito. Existe un valor mínimo de r que llamamos r_1 tal que $E_1 = V_{ef}(r_1) \Leftrightarrow E_1 = -\frac{k}{r_1} + \frac{\ell^2}{2\mu r_1^2}$

$$\Leftrightarrow \quad r_1 = \frac{k}{2E_1}\left[\sqrt{1 + \frac{2E_1 L^2}{\mu k^2}} - 1\right]$$

Como $\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V_{ef}(r) = E_1$, tenemos en r_1, $\dot{r} = 0$ (porque $E = V_{ef}(r_1)$). Eso no significa que la velocidad es nula porque hay también una velocidad angular $r^2\dot{\theta}^2$. r_1 es un punto de retorno, es decir que la distancia radial cambia de evolución en este punto. el objeto se acerca hasta r_1 y luego se aleja hasta el infinito. Es una órbita no acotada, llamada una hipérbola.

2. Cuando $E < 0$, tenemos un estado ligado. Para $E = E_2$, como $E_2 > V_{\text{ef}}$ obtenemos la condición $r_3 < r < r_5$. Tenemos 2 puntos de retorno r_3 y r_5. Es decir que la trayectoria es un elipse. De la misma manera, podemos calcular (r_3, r_4)

$$r_3 = \frac{k}{2|E_2|}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{2|E_2|\ell^2}{\mu k^2}}\right]$$
$$r_5 = \frac{k}{2|E_2|}\left[1 + \sqrt{1 - \frac{2|E_2|\ell^2}{\mu k^2}}\right]$$

El punto de menor distancia (r_2) es *el* periápside y de mayor distancia (r_5) es el apoápside. Esta palabras son genéricas para un elipse, pero cuando se hace referencia a una órbita alrededor de un cuerpo particular se llaman:

perihelio - afelio (Sol)

perigeo - apogeo (Tierra)

perigaláctico - apogaláctico (galaxia)

periposeidinion - apoposeidinion (Neptuno)

3. Cuando $E = 0$, tenemos un caso extremo entre una trayectoria abierta, la hipérbola y una trayectoria cerrada, el elipse. Corresponde a una parábola, es decir una trayectoria cerrada entre r_2 y el infinito. El punto al infinito es un punto de retorno.

4. Finalmente para $E = E_3$, un solo valor de r es compatible con la condición $E \geq V_{ef}$. La única solución es $r = r_4$ es decir que la trayectoria es circular.

2. Vector de Laplace-Runge-Lenz-Hermann-Bernoulli-Hamilton-Gibbs...

Definimos el eje z en la dirección del momento angular, es decir

$$\vec{L} = \mu r^2\dot{\theta}\vec{e}_z \equiv \ell\vec{e}_z$$

lo que implica

$$\vec{p} \times \vec{L} = \mu\vec{v} \times \vec{L} = \mu^2\left(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}\right) \times r^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z}$$
$$= \underbrace{\mu^2 r^2\dot{r}\dot{\theta}}_{\mu\dot{r}\ell}\underbrace{\overrightarrow{e_r} \times \overrightarrow{e_z}}_{-\overrightarrow{e_\theta}} + \underbrace{\mu^2 r^3\dot{\theta}^2}_{\frac{\ell^2}{r}}\underbrace{\overrightarrow{e_\theta} \times \overrightarrow{e_z}}_{\overrightarrow{e_r}} = \frac{\ell^2}{r}\overrightarrow{e_r} - \mu\ell\dot{r}\vec{e}_\theta$$

De esta expresión podemos calcular la derivada en el tiempo

$$\frac{d}{dt}(\vec{p} \times \vec{L}) = -\frac{\ell^2}{r^2}\dot{r}\vec{e}_r + \frac{\ell^2}{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta - \mu\ell\ddot{r}\vec{e}_\theta + \mu\ell\dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_r$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big(\frac{\ell^2}{r}\dot\theta - \mu\ell\ddot r\Big)\vec e_\theta \\
&= \frac{k\ell}{r^2}\vec e_\theta \\
&= \mu k\dot\theta\vec e_\theta \\
&= \mu k\frac{d}{dt}\vec e_r
\end{aligned}
$$

Lo que implica

$$\frac{d}{dt}\Big(\vec p\times\vec L - \mu k\vec e_r\Big) = \vec 0$$

Este vector puede ser definido por cualquier fuerza pero es conservado solamente por energías potenciales de tipo $V \propto 1/r$ es decir fuerzas de tipo $F \propto 1/r^2$.

$$\vec A = \vec p\times\vec L - \mu k\overrightarrow{e_r} = \left(\frac{\ell^2}{r} - \mu k\right)\overrightarrow{e_r} - \mu\ell\dot r\overrightarrow{e_\theta}$$

lo que implica

$$
\begin{aligned}
\|\vec A\|^2 &= \left(\frac{\ell^2}{r} - \mu k\right)^2 + \mu^2\ell^2\dot r^2 = \underbrace{\mu^2\ell^2\dot r^2 + \frac{\ell^4}{r^2} - 2\mu k\frac{\ell^2}{r}}_{2\mu E\ell^2} + \mu^2k^2 \\
&= \mu^2k^2\Big(1 + 2\frac{E\ell^2}{\mu k^2}\Big)
\end{aligned}
$$

lo que podemos relacionar a la excentricidad. De hecho,

$$r(\theta) = \frac{\ell^2/\mu k}{1 + e\cos\theta}$$

y la energía es

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot r^2 + \frac{\ell^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}$$

lo que nos permite obtener

$$E = \frac{\mu k^2e^2}{2\ell^2} - \frac{\mu k^2}{2\ell^2}$$

lo que implica

$$\|\vec A\|^2 = \mu^2k^2e^2$$

es decir $\|\vec A\| = \mu k e$. La conservación de ese vector tiene que ver con la conservación de e. La trayectoria guarda siempre la misma forma geométrica. Por ejemplo, la trayectoria no puede pasar de un elipse a un circulo.

3. Distancia mínima de un meteorito

Tenemos 2 cantidades conservadas (mas pero 2 que vamos a ocupar)

1. la energía

$$E = \frac{1}{2}\mu\vec v^2 - \frac{k}{r}\,, \quad \text{con} \quad k = GM_\oplus m$$

la masa de la Tierra es $M_\oplus$ y m es la masa del meteorito. Como la energía es constante, la podemos evaluar en cualquier punto, por ejemplo en el infinito

$$E = \frac{1}{2}\mu {V_0}^2$$

2. El momento angular

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \mu \vec{r} \times \vec{v}$$

De forma similar, como es conservado, podemos calcular su valor al infinito $\vec{r} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}$ con M un punto de la trayectoria. Cuando M se encuentra al infinito $\overrightarrow{HM} = -y\vec{e}_y \quad (y = \infty)$ y además $\vec{v} = V_0 \vec{e}_y$ lo que implica $\overrightarrow{HM} \times \vec{v} = \vec{0}$. Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \mu \overrightarrow{OH} \times \vec{V}_0 = \mu b V_0 \vec{e}_z \\ L &= \mu b V_0 \end{aligned}$$

Claramente $E > 0$ es decir que tenemos bien un movimiento hiperbólico. El punto mas cercano ($r_{\min}$) se calcula por $V_{\text{ef}}(r_{\min}) = E = \frac{1}{2}\mu v_0^2$

$$\frac{k}{r} - \frac{L^2}{2\mu r^2} + E = 0 \Leftrightarrow r^2 + \frac{k}{E} r - \frac{L^2}{2\mu E} = 0$$

El discriminante de esta ecuación es

$$\Delta = \frac{k^2}{E^2} + \frac{2L^2}{\mu E}$$

Obtenemos 2 soluciones

$$r_{\pm} = \frac{-\frac{k}{E} \pm \frac{k}{E}\sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{\mu k^2}}}{2}$$

Pero $r_- < 0$ es decir que no es una solución física

$$r_{\min} = r_+ = \frac{k}{2E}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{\mu k^2}}\right), \quad \text{con } E = \frac{1}{2}\mu V_0^2 \ \text{ y } k = GM_{\oplus} m$$

lo que nos permite obtener

$$r_{\min} = -\frac{G\left(M_{\oplus} + m\right)}{V_0^2} + \sqrt{\left(\frac{G\left(M_{\oplus} + m\right)}{V_0{}^2}\right)^2 + b^2}$$

En el caso de $M_{\oplus} \gg m$

$$r_{\min} = -G\frac{M_{\oplus}}{V_0^2} + \sqrt{\left(G\frac{M_{\oplus}}{V_0^2}\right)^2 + b^2}$$

El meteorito no cae si $r_{\min} > R_{\oplus}$: el radio de la Tierra

$$\begin{aligned} b^2 &> -\left(G\frac{M_{\oplus}}{V_0^2}\right)^2 + \left(R_{\oplus} + G\frac{M_{\oplus}}{V_0^2}\right)^2 \\ &> R_{\oplus}^2 + 2GR_{\oplus}\frac{M_{\oplus}}{V_0^2} = R_{\oplus}^2\left(1 + 2G\frac{M_{\oplus}}{R_{\oplus}V_0^2}\right) \end{aligned}$$

es decir, si

$$b > b_{\min} = R_{\oplus}\sqrt{1 + 2G\frac{M_{\oplus}}{R_{\oplus}V_0^2}}$$