1. Péndulo giratorio

Llamamos el centro del circulo O, el punto de pivote P y la masa M. Queremos obtener el vector $\overrightarrow{OM}$ para describir el movimiento del oscilador. Por eso, usamos la relación de Chasles, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}$, con

$$\overrightarrow{OP} = a\cos\Omega t\ \vec{e}_x + a\sin\Omega t\ \vec{e}_y$$

y

$$\overrightarrow{PM} = \ell\sin\theta\ \vec{e}_x - \ell\cos\theta\ \vec{e}_y$$

lo que nos permite obtener

$$\overrightarrow{OM} = \Big(a\cos\Omega t + \ell\sin\theta\Big)\ \vec{e}_x + \Big(a\sin\Omega t - \ell\cos\theta\Big)\ \vec{e}_y$$

a partir de lo cual podemos obtener la velocidad

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \Big(-a\Omega\sin\Omega t + \ell\dot{\theta}\cos\theta\Big)\ \vec{e}_x + \Big(a\Omega\cos\Omega t + \ell\dot{\theta}\sin\theta\Big)\ \vec{e}_y$$

la energía cinética

$$\begin{aligned} T \equiv \frac{1}{2}m\vec{v}^2 &= \Big(-a\Omega\sin\Omega t + \ell\dot{\theta}\cos\theta\Big)^2 + \Big(a\Omega\cos\Omega t + \ell\dot{\theta}\sin\theta\Big)^2 \\ &= a^2\Omega^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 + 2a\ell\Omega\dot{\theta}\Big(\sin\theta\cos\Omega t - \cos\theta\sin\Omega t\Big) \\ &= a^2\Omega^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 + 2a\ell\Omega\dot{\theta}\sin(\theta - \Omega t) \end{aligned}$$

la energía potencial

$$V \equiv mgy = mg\Big(a\sin\Omega t - \ell\cos\theta\Big)$$

Lo que nos permite obtener el lagrangiano

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m\Big(a^2\Omega^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 + 2a\ell\Omega\dot{\theta}\sin(\theta - \Omega t)\Big) - mg\Big(a\sin\Omega t - \ell\cos\theta\Big) \\ &\simeq \frac{1}{2}m\Big(\ell^2\dot{\theta}^2 + 2a\ell\Omega\dot{\theta}\sin(\theta - \Omega t)\Big) - mg\Big(a\sin\Omega t - \ell\cos\theta\Big) \end{aligned}$$

En la última igualdad, hemos eliminado la constante aditiva porque el lagrangiano es invariante.
Para obtener la ecuación del movimiento debemos calcular primero

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = m\ell^2\dot{\theta} + ma\ell\Omega\sin(\theta - \Omega t)$$

Diferenciando esto con respecto al tiempo se obtiene

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = m\ell^2\ddot{\theta} + ma\ell\Omega(\dot{\theta} - \Omega)\cos(\theta - \Omega t)$$

A continuación calculamos

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = ma\ell\Omega\dot{\theta}\cos(\theta - \Omega t) - mg\ell\sin\theta$$

y sustituyendo todo esto en la ecuación d'Euler-Lagrange se obtiene

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta - \frac{a}{\ell}\Omega^2 \cos(\theta - \Omega t) = 0$$

hemos introducido $\omega^2 = g/\ell$. Esta es la ecuación del movimiento de un péndulo en rotación.
Obviamente está ecuación no tiene soluciones triviales. No podemos usar el truco de multiplicar por $\dot{\theta}$ y hacer una integración, ya que tenemos una dependencia explicita en el tiempo, t. Podemos tener una buena intuición de lo que ocurre si nos restringimos a pequeñas oscilaciones. Está hipótesis no es necesariamente siempre valida, pero será una buena aproximación durante un cierto rango de tiempo. Para $\theta \ll 1$, la ecuación se reduce a

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta - \frac{a}{\ell}\Omega^2 \cos\Omega t = 0$$

es decir una ecuación de tipo

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = A\cos\Omega t$$

por la cual sabemos que existe una resonancia. Podemos resolver esta ecuación con el uso de la solución homogénea y una solución particular. La solución homogénea ($\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$) es

$$\theta_{\mathrm{h}}(t) = \alpha\cos(\omega t + \phi)$$

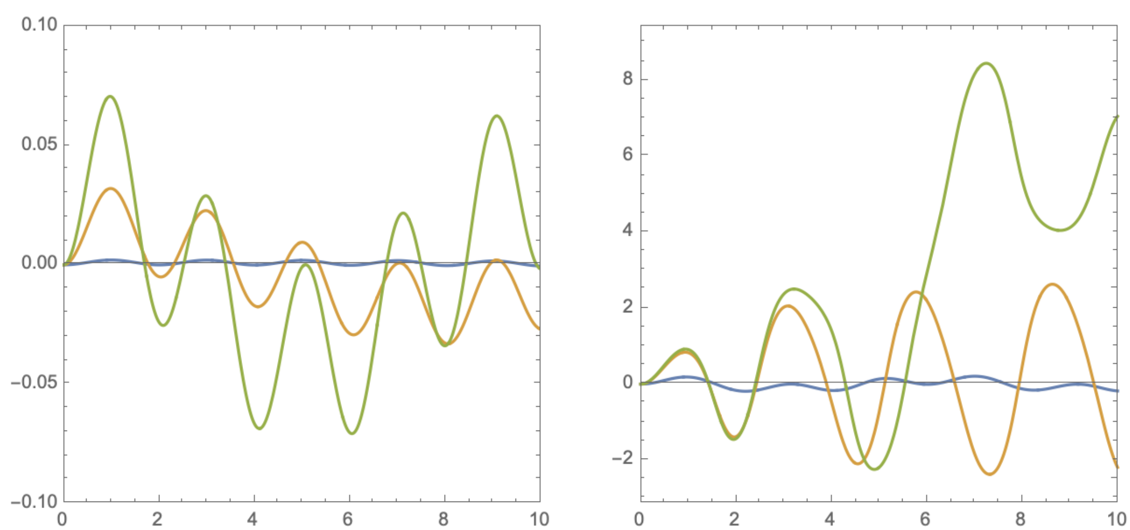
aunque la solución particular es, para el caso $\Omega \neq \omega$

$$\theta_{\mathrm{p}}(t) = \frac{A}{\omega^2 - \Omega^2}\cos\omega t$$

y para el caso $\Omega = \omega$

$$\theta_{\mathrm{p}}(t) = \frac{At}{2\omega}\sin\omega t$$

Observamos que para una frecuencia particular $\Omega = \omega$, el sistema tiene una amplitud que crece con el tiempo, es la resonancia. En el caso general, podemos esperar el mismo comportamiento, es decir de resonancia. De hecho, numéricamente encontramos



Solución numérica para $\Omega = \{0.1, 0.4, 0.6\}$ y $a = \ell = 1$, $g = 9.8$ en el primer gráfico y para el segundo $\Omega = \{1, 2.2, 2.3\}$

2. Péndulo acoplado a un oscilador

Llamaremos la posición de las masas por M y m y O el punto de intersección de los ejes (x, y). Por lo tanto, la posición de cada masa es

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= x\,\vec{e}_x \\ \overrightarrow{Om} &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{Mm} = x\ \vec{e}_x + \ell\Big(\sin\theta\,\vec{e}_x - \cos\theta\,\vec{e}_y\Big)\end{aligned}$$

Las velocidades se deducen fácilmente

$$\begin{aligned}\vec{v}_M &= \dot{x}\,\vec{e}_x \\ \vec{v}_m &= (\dot{x} + \ell\dot{\theta}\cos\theta)\ \vec{e}_x + \ell\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{e}_y\end{aligned}$$

lo que implica la energía cinética total

$$T = \frac{1}{2}(m+M)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\ell^2\dot{\theta}^2 + M\ell\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta$$

El tercer termino corresponde al acoplamiento. La energía potencial es

$$V = \frac{1}{2}kx^2 - Mg\ell\cos\theta$$

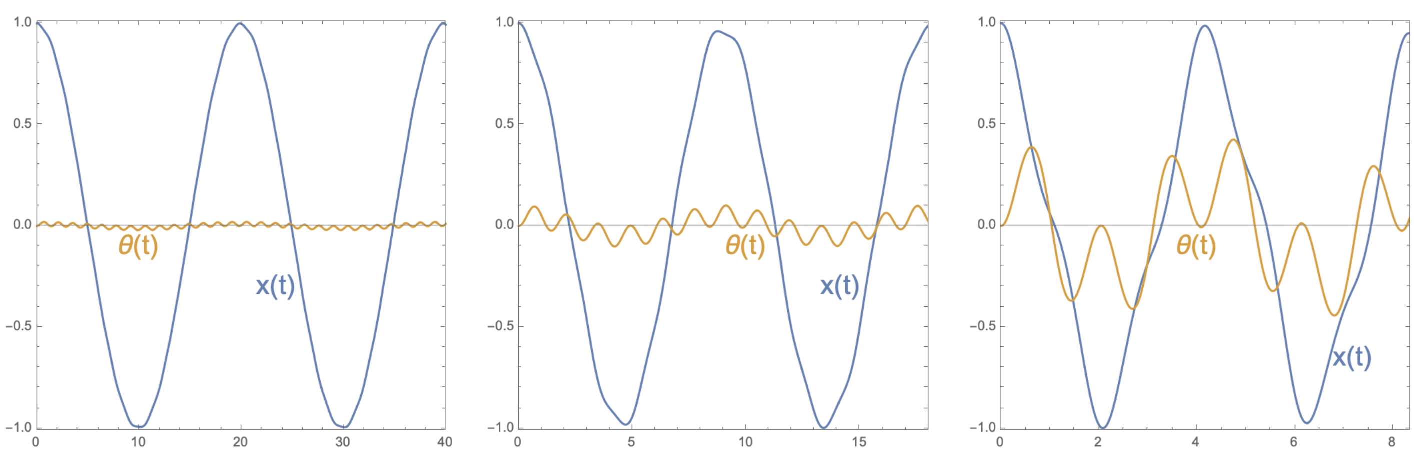
Por lo tanto, el lagrangiano de nuestro sistema es

$$L = \frac{1}{2}(m+M)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\ell^2\dot{\theta}^2 + M\ell\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta - \frac{1}{2}kx^2 + Mg\ell\cos\theta$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange se deducen

$$\begin{aligned}&(m+M)\ddot{x} + \ell M\ddot{\theta}\cos\theta = -kx + \ell M\sin\theta\dot{\theta}^2 \\ &\ell\ddot{\theta} + \ddot{x}\cos\theta = -g\sin\theta\end{aligned}$$

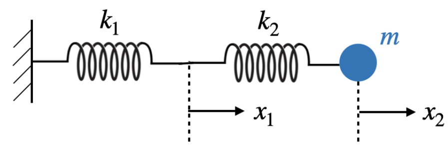
Si consideramos condiciones iniciales tales que $\theta(t=0) = \theta'(t=0) = 0$ y $x(t=0) = 1$, $x'(t=0) = 0$, podemos imaginar fácilmente que el péndulo no va a moverse de su posición de equilibrio si $k = 0$ y por lo tanto su amplitud de oscilación debería crecer con k.



Solución numérica para $k = \{0.2, 1, 5\}$ y $\ell = M = m = 1$, $g = 9.8$

3. Osciladores en serie

El lagrangiano de este sistema es



$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_1 x_1^2 - \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2$$

donde las coordenadas han sido definido en el dibujo. La variación con respecto a x_1 nos da

$$\begin{aligned} &- k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x_1 = \frac{k_2}{k_1 + k_2} x_2 \end{aligned}$$

Reemplazamos esta expresión en el lagrangiano para obtener

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_1\Big(\frac{k_2}{k_1+k_2}\Big)^2 x_2^2 - \frac{1}{2}k_2\Big(\frac{k_1}{k_1+k_2}\Big)^2 x_2^2 \\ &= \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}\frac{k_1 k_2}{k_1+k_2} x_2^2 \\ &= \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_{ef} x_2^2 \end{aligned}$$

con

$$k_{ef} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

o de forma equivalente

$$\frac{1}{k_{ef}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

4. Osciladores en paralelo

En este caso, el sistema es aún más trivial. El lagramgiano se escribe

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k_1 x^2 - \frac{1}{2}k_2 x^2 \\ &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}(k_1 + k_2)x^2 \\ &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k_{ef} x^2 \end{aligned}$$

con $k_{ef} = k_1 + k_2$