1. Movimiento en la superficie de un cono

La partícula se encuentra a una distancia $r(t)$ del vértice del cono, y a un ángulo $\phi(t)$ respecto al eje x. Como la partícula está confinada en la superficie del cono, su ángulo θ con respecto al eje z es una constante; que vamos a denotar α.
El movimiento de la partícula se describe mejor en términos de coordenadas esféricas (r, θ, ϕ), con θ restringido en todo momento al valor α. La transformación de coordenadas entre (x, y, z) y (r, α, ϕ) es

$$\begin{aligned} x &= r\sin\alpha\cos\phi \\ y &= r\sin\alpha\sin\phi \\ z &= r\cos\alpha \end{aligned}$$

lo que implica

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sin\alpha\Big(\dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi\Big) \\ \dot{y} &= \sin\alpha\Big(\dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi\Big) \\ \dot{z} &= \dot{r}\cos\alpha \end{aligned}$$

Según estos resultados, la energía cinética es $T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\sin^2\alpha\dot{\phi}^2\right)$, y la energía potencial es $V = mgz = mgr\cos\alpha$. El lagrangiano es por tanto

$$L(r, \dot{r}; \phi, \dot{\phi}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\sin^2\alpha\dot{\phi}^2\right) - mgr\cos\alpha.$$

Las ecuaciones de movimiento para $r(t)$ y $\phi(t)$ se obtienen sustituyendo este lagrangiana en las ecuaciones d'Euler-Lagrange. Tenemos

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

de modo que

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r}$$

También tenemos

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\sin^2\alpha\dot{\phi}^2 - mg\cos\alpha,$$

y la ecuación d'Euler-Lagrange para r es

$$\ddot{r} - r\sin^2\alpha\dot{\phi}^2 + g\cos\alpha = 0.$$

Continuando, observamos que L es independiente de ϕ, y el hecho de que $\partial L/\partial\phi = 0$ significa que la ecuación d'Euler-Lagrange para ϕ se reduce a

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 0.$$

Esto implica que la cantidad $\partial L/\partial\dot{\phi}$ es una constante, que llamaremos mh. Calculando la derivada parcial obtenemos $\partial L/\partial\dot{\phi} = mr^2\sin^2\alpha\dot{\phi}$, y finalmente obtenemos la afirmación

$$r^2\sin^2\alpha\dot{\phi} = h = \text{ constante}.$$

Esta ecuación muestra que $\dot{\phi}$ es siempre del mismo signo; la parte angular del movimiento es monótona. Sustituyendo $\dot{\phi} = h/\left(r^2 \sin^2 \alpha\right)$ en la ecuación de r se obtiene

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3 \sin^2 \alpha} + g \cos \alpha = 0.$$

Esta ecuación puede integrarse utilizando el truco estándar de multiplicar cada término por $\dot{r}$. Tenemos

$$\ddot{r}\dot{r} - \frac{h^2 \dot{r}}{r^3 \sin^2 \alpha} + g\dot{r} \cos \alpha = 0,$$

o

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{h^2}{2r^2 \sin^2 \alpha} + gr \cos \alpha\right) = 0.$$

Esto nos da finalmente el enunciado de conservación

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \nu(r) = \varepsilon = \text{ constante}$$

donde ε es la energía mecánica total reducida de la partícula, y

$$\nu(r) = \frac{h^2}{2r^2 \sin^2 \alpha} + gr \cos \alpha$$

es un potencial efectivo para la parte radial del movimiento. Como $\dot{r}^2 > 0$, obtenemos que $\varepsilon > \nu(r)$, lo que implica del gráfico de $\nu(r)$ que el movimiento tiene lugar entre dos puntos de inflexión a $r = r_{\pm}$; éstos vienen determinados por la condición $\nu\left(r_{\pm}\right) = \varepsilon$, que dependen de la energía del sistema.

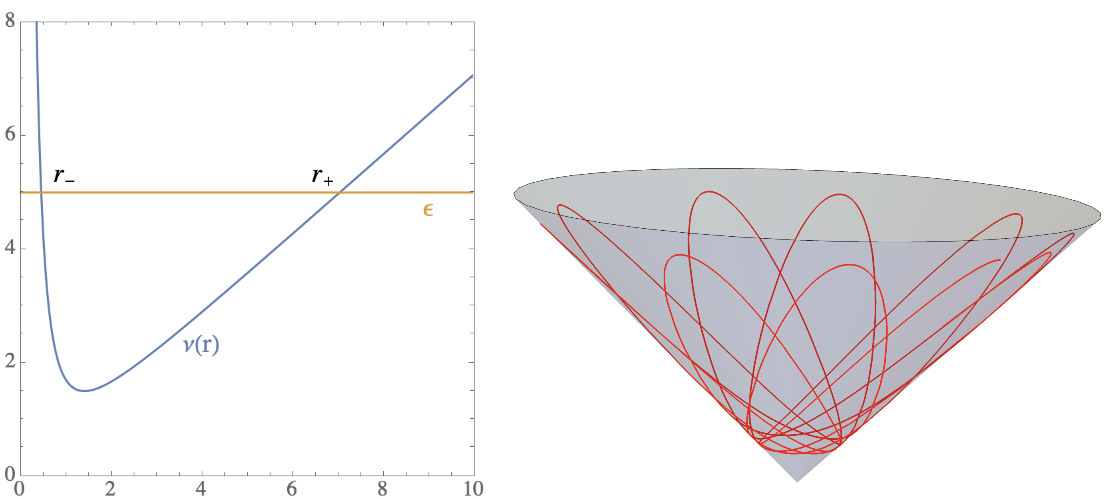

Figure 1: El movimiento de la partícula se encuentra restringido entre dos valores de r, para $h = g = 1$ y $\alpha = \pi/4$

2. Péndulo esférico

Estas coordenadas se relacionan con las coordenadas cartesianas estándar mediante

$$x = \ell \sin \theta \cos \phi, \quad y = \ell \sin \theta \sin \phi, \quad z = \ell \cos \theta.$$

Como se ve en la figura, el eje z apunta hacia abajo, en la dirección de la aceleración gravitatoria $\boldsymbol{g}$. Es evidente que se trata de nuevo de coordenadas esféricas. La energía cinética del péndulo es $T = \frac{1}{2}m\ell^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2\right)$. Su energía potencial es $V = -mgz = -mg\ell \cos \theta = -m\ell^2\omega^2 \cos \theta$, donde hemos introducido la cantidad

$$\omega = \sqrt{g/\ell}$$

El lagrangiano del péndulo es

$$L(\theta, \dot{\theta}; \phi, \dot{\phi}) = \frac{1}{2} m\ell^2 \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \dot{\phi}^2\right) + m\ell^2\omega^2 \cos\theta$$

Las ecuaciones de movimiento para $\theta(t)$ y $\phi(t)$ se obtienen sustituyendo este lagrangiano en las ecuaciones d'Euler-Lagrange. Calculamos

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\ell^2 \dot{\theta}$$

lo que implica

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\ell^2 \ddot{\theta}$$

También tenemos

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = m\ell^2 \sin\theta \cos\theta \dot{\phi}^2 - m\ell^2\omega^2 \sin\theta,$$

y la ecuación d'Euler-Lagrange para θ es

$$\ddot{\theta} - \sin\theta \cos\theta \dot{\phi}^2 + \omega^2 \sin\theta = 0.$$

Continuando, observamos que L es independiente de ϕ, y el hecho de que $\partial L / \partial \phi = 0$ significa que la ecuación d'Euler-Lagrange para ϕ se reduce a

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 0$$

Esto implica que la cantidad $\partial L / \partial \dot{\phi}$ es una constante, que llamaremos $m\ell^2 h$. Calculando la derivada parcial obtenemos

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m\ell^2 \sin^2\theta \dot{\phi}$$

y finalmente obtenemos la ecuación

$$\sin^2\theta \dot{\phi} = h = \text{ constante}$$

En el caso especial $h = 0$ se impide que el péndulo se mueva en la dirección ϕ, y la ecuación para θ se reduce a $\ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0$; es decir el movimiento de un péndulo plano. En el caso general $(h \neq 0)$ vemos que $\dot{\phi}$ es siempre del mismo signo, de modo que $\phi(t)$ es una función monótona del tiempo; esto significa que el péndulo gira en una dirección constante alrededor del eje z. Con la sustitución $\dot{\phi} = h / \sin^2\theta$ la ecuación de θ se convierte en

$$\ddot{\theta} - \frac{h^2 \cos\theta}{\sin^3\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0.$$

Multiplicando cada término por $\dot{\theta}$ nos permite integrar esta ecuación. El resultado es el enunciado de conservación

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \nu(\theta) = \varepsilon = \text{constante}$$

donde ε es la energía mecánica total reducida del péndulo, y

$$\nu(\theta) = \frac{h^2}{2\sin^2\theta} - \omega^2 \cos\theta$$

es un potencial efectivo para el movimiento en la dirección θ. Del gráfico podemos concluir inmediatamente que el movimiento tiene lugar entre dos puntos de inflexión en $\theta = \theta_{\pm}$; éstos vienen determinados por la condición $\nu\left(\theta_{\pm}\right) = \varepsilon$.

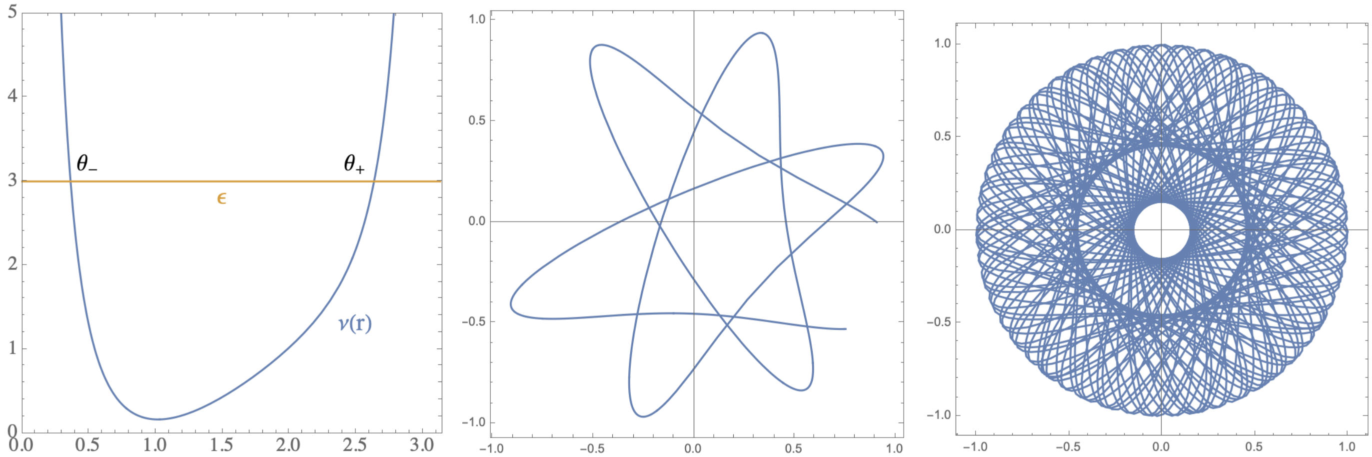

Figure 2: Potencial efectivo, movimiento en el plano (x, y) después de un tiempo de 5 y 100, para $h = 1$, $\omega = \pi$ y $\varepsilon = 3$