1. Movimiento amortiguado aperiódico crítico

Hay dos fuerzas que actúan sobre la masa en la dirección x

- la fuerza del resorte $-kx$
- la fricción $-\alpha\dot{x}$

Por lo tanto, usando Newton, obtenemos

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x} \tag{1}$$

o

$$\ddot{x} + 2\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{2}$$

Buscamos una solución de la forma, $x(t) = Ae^{\Omega t}$

$$Ae^{i\Omega t}\Big(\Omega^2 + 2\omega_0\Omega + \omega_0^2\Big) = 0 \tag{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad Ae^{i\Omega t}\Big(\Omega + \omega_0\Big)^2 = 0 \tag{4}$$

es decir que tenemos una sola solución, $\Omega = -\omega_0$, o

$$x(t) = Ae^{-\omega_0 t} \tag{5}$$

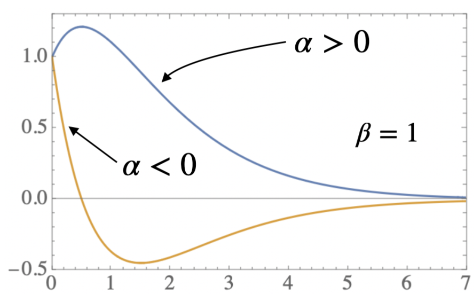
No puede ser la solución final, ya que sabemos que por una ecuación diferencial de segundo orden, necesitamos dos soluciones independientes. Podemos obtener la segunda usando la variación de la constante, es decir que promovemos la constante A a una función $A(x)$ y buscamos una solución de la forma $x(t) = A(t)e^{-\omega_0 t}$. Reemplazando en la ec.(2), obtenemos

$$\ddot{A} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A(t) = a_1 t + a_2 \tag{6}$$

Nuestra solución final es

$$x(t) = (a_1 t + a_2)e^{-\omega_0 t} \tag{7}$$

Se llama un movimiento amortiguado aperiódico critico.



2. Oscilaciones forzadas

La ecuación que describe el movimiento es

$$m\ddot{x} = -k(x - l_0) - \alpha\dot{x} + F_e(t) \tag{8}$$

con l_0 la longitud natural del resorte. Definiendo $\xi = x - l_0\,, \quad \omega_0^2 = k/m\,, \quad 2\lambda = \alpha/m$

$$\ddot{\xi} + 2\lambda\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = \frac{F_e(t)}{m} = \frac{C}{m}\cos(\omega t) \tag{9}$$

Este tipo de ecuaciones diferenciales se resuelven en dos pasos

- una solución homogénea ξ_h solución de

$$\ddot{\xi}_h + 2\lambda\dot{\xi}_h + \omega_0^2\xi_h = 0$$

- Una solución particular ξ_p de

$$\ddot{\xi}_p + 2\lambda\dot{\xi}_p + \omega_0^2\xi_p = \frac{C}{m}\cos(\omega t)$$

La solución final es $\xi = \xi_h + \xi_p$. Vamos a considerar solamente el caso cuando tenemos oscilaciones, es decir cuando $\omega_0 > \lambda$, es decir

$$\xi_h(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\Omega t + \phi) \qquad \text{con } \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

La solución particular depende de $F_e(t)$, en nuestro caso, tenemos que encontrar una solución a la ecuación

$$\ddot{\xi}_p + 2\lambda\dot{\xi}_p + \omega_0^2\xi_p = \frac{C}{m}\cos(\omega t) \tag{10}$$

Buscamos una solución particular de la forma de la fuerza, es decir

$$\begin{aligned} & \xi_p(t) = \alpha\cos(\omega t + \beta) \\ \Rightarrow\quad & \dot{\xi}_p(t) = -\alpha\omega\sin(\omega t + \beta) \\ \Rightarrow\quad & \ddot{\xi}_p(t) = -\alpha\omega^2\cos(\omega t + \beta) \end{aligned}$$

lo que implica

$$\begin{aligned} & -\alpha\omega^2\cos(\omega t + \beta) - 2\alpha\omega\lambda\sin(\omega t + \beta) + \alpha\omega_0^2\cos(\omega t + \beta) = \frac{C}{m}\cos(\omega t) \\ \Rightarrow\quad & \alpha\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) \underbrace{\cos(\omega t + \beta)}_{\cos\omega t\cos\beta - \sin\omega t\sin\beta} - 2\alpha\omega\lambda \underbrace{\sin(\omega t + \beta)}_{\sin\omega t\cos\beta + \cos\omega t\sin\beta} = \frac{C}{m}\cos(\omega t) \end{aligned}$$

$$\cos\omega t\left[\alpha\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\cos\beta - 2\alpha\omega\lambda\sin\omega t\sin\beta - \frac{C}{m}\right] - \sin\omega t\Big[\alpha\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\sin\beta + 2\alpha\omega\lambda\cos\beta\Big] = 0$$

$$\begin{cases} \alpha\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\cos^2\beta - 2\alpha\omega\lambda\sin\beta - \frac{C}{m} = 0 \\ \alpha\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\sin\beta + 2\alpha\omega\lambda\cos\beta = 0 \end{cases}$$

lo que implica que

$$\tan\beta = \frac{2\omega\lambda}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

y

$$\alpha = \pm\frac{C}{m\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\omega^2\lambda^2}}$$

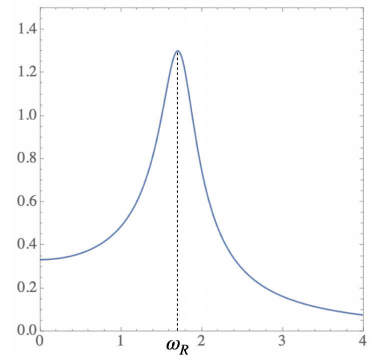
con el signo positivo si $\omega < \omega_0$ y el signo negativo si $\omega > \omega_0$.

Con las constantes (α, β) obtenidas, la solución final es

$$\xi(t) = \alpha \cos(\omega t + \beta) + Ae^{-\lambda t} \cos(\Omega t + \phi)$$

Observamos que para un tiempo suficientemente grande, el segundo termino desaparece $\xi(t) \simeq \alpha \cos(\omega t + \beta)$, es decir que el estado asintótico del sistema es una oscilación con la misma frecuencia que la frecuencia de la fuerza externa. La única diferencia con la fuerza externa es un desfaso de un factor β tal que $\tan \beta = \frac{2\omega\lambda}{\omega^2 - \omega_0^2}$. El desfaso depende de la fricción λ, sin fricción, no hay desfaso.
Podemos ver que la amplitud de oscilaciones α, depende de la frecuencia externa

$$\alpha = \frac{C}{m\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\omega^2\lambda^2}}$$



Por lo tanto, existe una frecuencia externa ω tal que la amplitud sea máxima. En ese caso, la condición de resonancia es $\frac{d\alpha}{d\omega} = 0$, es decir el máximo. Obtenemos

$$\omega_R^2 = \omega_0^2 - 2\lambda^2$$

La fricción disminuye la frecuencia de resonancia en comparación con la frecuencia propia del sistema.

3. Modo de traslación

Tenemos 3 masas lo que significa que tendremos 3 modos normales. Sobre la primera masa, ejerce solamente una fuerza

$$+k\left(x_2 - x_1\right)$$

Sobre la segunda masa, tenemos 2 fuerzas

$$\begin{aligned} &-k\left(x_2 - x_1\right) \\ &+k\left(x_3 - x_2\right) \end{aligned}$$

Sobre la tercera masa, hay una sola fuerza

$$-k\left(x_3 - x_2\right)$$

lo que implica las ecuaciones siguientes

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = k\left(x_2 - x_1\right) \\ M\ddot{x}_2 = -k\left(x_2 - x_1\right) + k\left(x_3 - x_2\right) \\ m\ddot{x}_3 = -k\left(x_3 - x_2\right) \end{cases}$$

Definiendo las matrices

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbb{K} = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix}$$

el sistema se reescribe $\mathbb{M}\ddot{X} = -\mathbb{K}X$ con

$$\text{con} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Buscamos soluciones de la forma $X(t) = Ae^{i\omega t}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \dot{X}(t) = i\omega A e^{i\omega t} \quad \ddot{X}(t) = -\omega^2 A e^{i\omega t} \\ &\Rightarrow \left(\omega^2 \mathbb{M} - \mathbb{K}\right) A = 0 \end{aligned}$$

Hay una solución no trivial si $\det\left(\omega^2\mathbb{M}-\mathbb{K}\right)=0$ es decir

$$
\begin{aligned}
&\det\begin{bmatrix} \omega^2 m-k & k & 0 \\ k & \omega^2 M-2k & k \\ 0 & k & \omega^2 m-k \end{bmatrix} \\
&=\left(\omega^2 m-k\right)\begin{vmatrix} \omega^2 M-2k & k \\ k & \omega^2 m-k \end{vmatrix} - k \begin{vmatrix} k & 0 \\ k & \omega^2 m-k \end{vmatrix} \\
&=\left(\omega^2 m-k\right)\left[\left(\omega^2 m-k\right)\left(\omega^2 M-2k\right)-k^2\right]-k^2\left(\omega^2 m-k\right) \\
&=\left(\omega^2 m-k\right)\left(\left(\omega^2 m-k\right)\left(\omega^2 M-2k\right)-2k^2\right) \\
&=\omega^2\left(\omega^2 m-k\right)\left(mM\omega^2-k(2m+M)\right)=0
\end{aligned}
$$

lo que implica los 3 modos

$$
\begin{cases} \omega^2=0 \\ \omega^2=\frac{k}{m} \\ \omega^2=\frac{k}{m}+2\frac{k}{M} \end{cases}
$$

Lo que nos interesa es el modo sin oscilación $\omega=0$ que podria ser el modo de translación. En la ecuación $\left(\omega^2\mathbb{M}-\mathbb{K}\right)A=0$, con $\omega^2=0$ tenemos

$$
-\begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\Rightarrow \quad a_1=a_2=a_3 \Rightarrow A= \text{ constante } \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

Tenemos una solución $\quad X(t)=\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\underbrace{e^{i0t}}_{=1}$

$$
\Rightarrow \quad X(t)=\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

Pero sabemos que por una ecuación diferencial de segundo orden, 2 soluciones independientes existen. Usando la variación de la constante como en ele ejercicio previo, obtenemos

$$
X(t)=(\alpha+\beta t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

es decir $x_1(t)=x_2(t)=x_3(t)=\alpha+\beta t$, lo que significa que las 3 masas se desplazan hacia la misma dirección sin oscilaciones. Se llama el modo de traslación