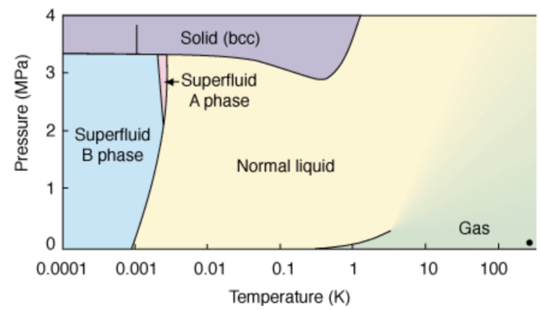
1. Helio 3



El helio-3 tiene una característica notable y única en la naturaleza, como se muestra en la figura: por debajo de una temperatura del orden de 300mK, la curva crítica de fusión $P_c(T)$ disminuye a medida que aumenta la temperatura, lo que significa que, a presión constante, ¡el sólido puede licuarse enfriándolo! El objetivo de este problema es describir el origen de este efecto, denominado "efecto Pomeranchuk" en honor al físico ruso que lo predijo en 1950 antes de observarlo varios años más tarde.

Una primera característica del helio (común a sus dos isótopos ^{3}He y ^{4}He) es que, a presión ambiente, en lugar de solidificarse como los cuerpos normales, el helio permanece líquido hasta temperatura cero. Esto se debe, por un lado, a la débil interacción entre los átomos de helio y, por otro, al fuerte movimiento cuántico de punto cero ligado a la baja masa de los átomos. Por consiguiente, incluso a temperatura cero, es decir, en ausencia de agitación térmica, las fluctuaciones cuánticas no permiten estabilizar cada átomo en el potencial mínimo inducido por sus vecinos y el helio permanece líquido (y posiblemente superfluido, pero no es el tema de este problema). Se necesita una presión de unos 30 bares (3MPa) para solidificar ^{3}He.

1. Obtener la relación de Gibbs-Duhem entre las variaciones del potencial químico, la presión y la temperatura:

$$d\mu = vdP - sdT$$

con $v = V/N$ y $s = S/N$ el volumen y la entropía por partículas.

2. Recordar brevemente cómo la física estadística permite justificar que dos sistemas (1) y (2) que intercambian energía, volumen y partículas están en equilibrio:

$$T_1 = T_2 \quad , \quad P_1 = P_2 \quad , \quad \mu_1 = \mu_2$$

3. Consideramos el equilibrio termodinámico entre dos fases de un mismo cuerpo, la fase sólida y la fase líquida. La coexistencia de estas dos fases puede describirse como el equilibrio entre dos subsistemas. Nos movemos infinitesimalmente en el plano T, P, a lo largo de la línea de fusión $P_c(T)$. Utilizando la relación de Gibbs-Duhem en el líquido y en el sólido, mostrar que tenemos la relación:

$$\frac{dP_c(T)}{dT} = \frac{s_l - s_s}{v_l - v_s}$$

que relaciona la pendiente de la línea de equilibrio $P_c(T)$ con la diferencia de entropía por partícula y volumen por partícula entre las dos fases. Es la llamada relación Clausius-Clapeyron.

4. Deduzca que para los cuerpos usuales la recta de equilibrio $P_c(T)$ es una función creciente de la temperatura. ¿Conoces al menos una excepción?

Ahora necesitamos entender por qué $\frac{dP_c(T)}{dT} < 0$ para la línea de fusión de ^{3}He a baja temperatura. El volumen molar (o volumen por partícula) del sólido es menor que el del líquido, por lo que la entropía del sólido es mayor que la del líquido:
Para responder a esta pregunta, ahora tenemos que calcular la entropía a baja temperatura en las fases líquida y sólida. Se supone que v_s y v_l son independientes de la temperatura. Recordemos que ^{3}He es un fermión de espín 1/2.

En estado líquido, el helio-3 está formado por átomos que interactúan entre sí. Tener en cuenta estas interacciones es difícil. Sin embargo, una buena aproximación es considerar este sistema como un gas de átomos no interactuantes, pero con una masa efectiva m^* diferente de la masa real de los átomos ^{3}He.

5. La densidad ^{3}He líquida es $82,6$ kg $\cdot$ m^{-3}. Estimar su temperatura de Fermi, suponiendo que la masa efectiva m^* es igual a la masa m del átomo libre.

6. Demuestre que la entropía puede escribirse como

$$S = k_B^2 T \left[\int_{-\beta\mu}^{\infty} \rho\left(\mu + \frac{x}{\beta}\right) F(x) dx + \int_{-\infty}^{\beta\mu} \rho\left(\mu - \frac{x}{\beta}\right) F(x) dx \right]$$

   Dar la expresión para $F(x)$.

7. Demuestre que en el límite $T \to 0$,

$$S = \frac{\pi^2}{3} \rho\left(\epsilon_F\right) k_B^2 T$$

8. Demuestre que $\rho\left(\epsilon_F\right) = \frac{3}{2}\frac{N}{\epsilon_F}$ y que finalmente la entropía por partícula $s = S/N$ puede escribirse como

$$s = \frac{\pi^2}{2} k_B \frac{T}{T_F}$$

9. En la fase sólida de ^{3}He a muy baja temperatura, podemos despreciar los movimientos de los átomos cuyas posiciones están situadas en los nodos de una red cristalina regular. Por lo tanto, estos átomos pueden considerarse como distinguibles y sus espines como no interactuantes. Deduzca que a baja temperatura, la entropía del sólido viene dada por:

$$s_s = k_B \ln 2$$

10. Demostrar que la línea de fusión tiene pendiente negativa hasta una temperatura T^*, cuya expresión se da en función de la temperatura de Fermi. Comparar la expresión numérica para esta temperatura T^* con el resultado experimental de la figura. ¿Cómo puede explicarse esta diferencia?

11. En su opinión, ¿qué ocurre cuando se aplica un campo magnético que tiende a ordenar los espines de ^{3}He sólido?