

1. Helio 3

1. Sabemos que

$$d\Phi = -SdT - PdV - Nd\mu$$

Φ es una función de las variables T, V, μ . El volumen V es la única variable extensiva, por lo que Φ es proporcional a V . Puesto que $P = -\frac{\partial\Phi}{\partial V}$, tenemos $\Phi = -PV$, lo que implica

$$\begin{aligned} \Phi = -PV &\implies d\Phi = -PdV - VdP = -SdT - PdV - Nd\mu \\ &\implies SdT - VdP + Nd\mu = 0 \end{aligned}$$

y, por tanto, por partícula:

$$d\mu = vdP - sdT$$

2. En el equilibrio, la entropía es máxima en relación con los intercambios de energía, volumen o partículas.

$$\Delta S = \left(\frac{\partial S_1}{\partial E} - \frac{\partial S_2}{\partial E}\right) \Delta Q + \left(\frac{\partial S_1}{\partial V} - \frac{\partial S_2}{\partial V}\right) \Delta V + \left(\frac{\partial S_1}{\partial N} - \frac{\partial S_2}{\partial N}\right) \Delta N = 0$$

Por tanto, tenemos las ecuaciones

$$\frac{\partial S_1}{\partial X} = \frac{\partial S_2}{\partial X} \quad \text{pour, } X = E, V, N$$

Estas derivadas de la entropía con respecto a la energía, el volumen y el número de partículas están relacionadas con la temperatura, la presión y el potencial químico, respectivamente.

3. Como $d\mu_l = d\mu_s$, tenemos $v_l dP - s_l dT = v_s dP - s_s dT$, lo que corresponde a la relación de Clausius-Clapeyron:

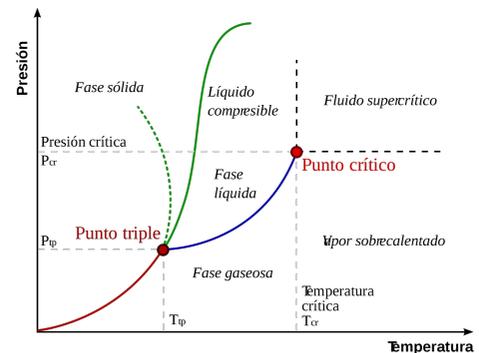
$$\frac{dP_c(T)}{dT} = \frac{s_l - s_s}{v_l - v_s}$$

4. En los cuerpos normales, la entropía de un sólido es menor que la de un líquido porque está más ordenado. Además, el volumen por partícula suele ser menor en los sólidos que en los líquidos:

$$s_s < s_l \quad \text{y} \quad v_s < v_l \implies \frac{dP_c}{dT} > 0$$

Un contraejemplo bien conocido es el del agua, para la que la densidad del sólido es menor que la del líquido:

$$v_s > v_l \implies \frac{dP_c}{dT} < 0$$



5. Sabemos que

$$\epsilon_F = k_B T_F = (3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\frac{N}{V} \right)^{2/3}$$

La masa de los átomos considerados como libres es $m^* = m = 3m_n$ donde m_n es la masa de un nucleón (protón o neutrón). Se desprecia la masa de los electrones. También $N/V = \rho/m_p$. Esto da

$$T_F \simeq 4,9 \text{ K}$$

6. Sabemos que

$$\Phi = -k_B T \int_0^\infty dE \rho(E) \log(1 + e^{-\beta(E-\mu)}), \quad S = -\frac{\partial \Phi}{\partial T}$$

Lo que puede ser reescrito como

$$\Phi = k_B T \int_0^\infty dE \rho(E) \log(1 - f_E), \quad f_E = \frac{1}{1 + e^{\beta(E-\mu)}}$$

Lo que implica

$$\begin{aligned} S &= -k_B \int_0^\infty dE \rho(E) [f_E \ln f_E + (1 - f_E) \ln(1 - f_E)] \\ &= k_B \int_0^\infty dE \rho(E) \frac{\ln(1 + e^{\beta(E-\mu)})}{1 + e^{\beta(E-\mu)}} + k_B \int_0^\infty dE \rho(E) \frac{\ln(1 + e^{-\beta(E-\mu)})}{1 + e^{-\beta(E-\mu)}} \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $x = \beta(E - \mu)$ en la primera integral y $x = -\beta(E - \mu)$, obtenemos

$$S = k_B^2 T \int_{-\beta\mu}^\infty dx \rho\left(\mu + \frac{x}{\beta}\right) \frac{\ln(1 + e^x)}{1 + e^x} - k_B^2 T \int_{\beta\mu}^{-\infty} dx \rho\left(\mu - \frac{x}{\beta}\right) \frac{\ln(1 + e^x)}{1 + e^x}$$

Lo que implica

$$S = k_B^2 T \left[\int_{-\beta\mu}^\infty \rho\left(\mu + \frac{x}{\beta}\right) F(x) dx + \int_{-\infty}^{\beta\mu} \rho\left(\mu - \frac{x}{\beta}\right) F(x) dx \right]$$

con $F(x) = \frac{\ln(e^x+1)}{e^x+1}$.

7. En el límite $T \rightarrow 0$, obtenemos

$$S \simeq 2k_B^2 T \rho(\mu) \int_{-\infty}^\infty F(x) dx$$

Sabiendo que

$$\int_{-\infty}^\infty F(x) dx = \frac{\pi^2}{6}$$

Obtenemos

$$S \simeq \frac{\pi^2}{3} k_B^2 T \rho(\mu), \quad \text{con } \mu = \epsilon_F$$

8. Según los apuntes, a temperatura nula, tenemos

$$N = \frac{2}{3} AV \epsilon_F^{3/2}, \quad A = \frac{g_s}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \quad \text{y } g_s = 2$$

Lo que implica

$$\rho(\epsilon_F) = AV \sqrt{\epsilon_F} = \frac{3}{2} \frac{N}{\epsilon_F}$$

Por lo tanto, tenemos

$$s \equiv \frac{S}{N} = \frac{\pi^2}{2} k_B^2 \frac{T}{\epsilon_F} = \frac{\pi^2}{2} k_B \frac{T}{T_F}$$

9. Para un conjunto de N espines independientes $1/2$, hay 2^N configuraciones y la entropía es por lo tanto

$$S_s = Nk_B \ln 2$$

10. La diferencia de entropía entre un líquido y un sólido es

$$s_l - s_s = k_B \left(\frac{\pi^2}{2} \frac{T}{T_F} - \ln 2 \right)$$

es negativa mientras la temperatura T esté por debajo de la temperatura T^* dada por

$$T^* = \frac{2 \ln 2}{\pi^2} T_F \simeq 0,14 T_F \simeq 700 \text{mK}$$

Esta temperatura es mayor que la temperatura observada en la figura ($T^* \simeq 300 \text{mK}$). Una posible explicación es que la masa efectiva m^* de un átomo ${}^3\text{He}$ en el líquido es mayor que la masa m de un átomo libre.

11. Un campo magnético ordena los espines de un sólido ${}^3\text{He}$. Su entropía, que era $Nk_B \ln 2$ desaparece. Ahora el sólido está mejor ordenado que el líquido. La línea de transición líquido-sólido tiene ahora una pendiente positiva.