

1. Integral de Gauss

Demostrar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

2. Función gamma

Demostrar que la función gamma definida por $\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$ tiene las propiedades siguientes

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \quad (n > 0)$$

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

3. Función zeta de Riemann

La función de Riemann se define por la serie

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Obtener $\zeta(2)$ y $\zeta(4)$.

4. Función eta de Dirichlet

La función de Dirichlet corresponde a la función zeta de Riemann con signo alternado

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

Encontrar su relación con la función zeta de Riemann.

5. Integrales de Fermi-Dirac y de Bose-Einstein

Obtener a partir de los resultados pasados, las integrales

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x \pm 1} dx$$