FIS1422 - Física estadística

Licenciatura en Física
Licenciatura en Física mención Astronomía

Corrección - Ayudantía 08

1. Integral de Gauss

Para eso, es conveniente tomar el cuadrado de esta integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2}dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x^2+y^2)}dxdy$$

Como tenemos una exponencial con x^2+y^2, parece ser interesante usar el cambio de variables

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

Lo que permite escribir $e^{-a(x^2+y^2)} = e^{-ar^2}$. Por otro lado, tenemos que cambiar la medida de integración usando el jacobiano

$$dxdy = \text{Jacobiano } drd\theta$$

con

$$\text{Jacobiano} = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}\right| = |r| = r$$

Lo que implica

$$dxdy = rdrd\theta$$

Por lo tanto, tenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} e^{-ar^2}rdrd\theta = 2\pi\int_0^{+\infty} re^{-ar^2}dr = 2\pi\frac{e^{-ar^2}}{-2a}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{a} \qquad (a>0)$$

Lo que nos permite concluir que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

2. Función gamma

Tenemos

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x}dx = \int_0^\infty \Big[nx^{n-1}e^{-x} - \frac{d}{dx}(x^n e^{-x})\Big]dx = n\Gamma(n)$$

Demostramos fácilmente que

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1$$

y

$$\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx \qquad (x=y^2)$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-y^2}}{y} 2y dy = 2\int_0^\infty e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^\infty e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$$

3. Función zeta de Riemann

Para esta derivación, usaremos la forma de Euler (quién ha tenido mucha suerte porque no funciona siempre...). Sabemos que la expansión en serie de la función seno es

$$\sin x = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

lo que implica

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \cdots$$

Pero sabemos que $\frac{\sin x}{x}$ tiene un infinito numero de zeros en $x = n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}^*$ es decir $n = \{\cdots, -2\pi, -\pi, \pi, 2\pi, \cdots\}$. Por lo tanto, podemos escribir la función como producto de sus raices

$$\begin{aligned}
\frac{\sin x}{x} &= \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\cdots \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{(2\pi)^2}\right)\cdots \\
&= \prod_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{x^2}{(n\pi)^2}\right)
\end{aligned}$$

En realidad, una decomposición en productos de las raíces es permisible para polinomios y no para funciones (definidas por la serie como polinomios infinitos). Pero 100 años más tarde fue demostrado (teorema de factorización de Weierstrass) que se puede hacer por algunos tipos de funciones también.

$$\begin{aligned}
\frac{\sin x}{x} &= \prod_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{x^2}{(n\pi)^2}\right) \\
&= 1 - \sum_{n=1}^\infty \frac{x^2}{(n\pi)^2} + \sum_{n=1}^\infty \sum_{m=n+1}^\infty \frac{x^2}{(n\pi)^2}\frac{x^2}{(m\pi)^2} + \cdots
\end{aligned}$$

Pero como lo hemos visto

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \cdots$$

lo que implica, por identificación

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n\pi)^2} = \frac{1}{3!} \\
&\sum_{n=1}^\infty \sum_{m=n+1}^\infty \frac{1}{(n\pi)^2}\frac{1}{(m\pi)^2} = \frac{1}{5!} \\
&\cdots
\end{aligned}$$

es decir

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{n^2m^2}=\frac{\pi^4}{120}$$

Pero

$$\begin{aligned}\zeta(2)^2&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{n^2m^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{n^2m^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{n^2m^2}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}+2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{n^2m^2}=\zeta(4)+\frac{\pi^4}{60}\end{aligned}$$

lo que implica

$$\frac{\pi^4}{36}=\zeta(4)+\frac{\pi^4}{60}$$

es decir

$$\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$$

4. Función eta de Dirichlet

Tenemos

$$\eta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\Big((-1)^{n-1}+1-1\Big)=\zeta(s)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\Big((-1)^{n-1}-1\Big)$$

La última suma es nula excepto cuando n es par $(n=2p)$

$$\eta(s)=\zeta(s)-2\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(2p)^s}=\zeta(s)-2^{1-s}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^s}$$

es decir

$$\eta(s)=\Big(1-2^{1-s}\Big)\zeta(s)$$

5. Integrales de Fermi-Dirac y de Bose-Einstein

Tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx&=\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}e^{-x}}{1-e^{-x}}dx=\int_0^{\infty}x^{s-1}e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nx}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}x^{s-1}e^{-(n+1)x}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}x^{s-1}e^{-nx}dx\\(nx=y)\quad&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{y^{s-1}}{n^s}e^{-y}dy=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\int_0^{\infty}y^{s-1}e^{-y}dy=\zeta(s)\Gamma(s)\end{aligned}$$

De forma similar, tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x+1}dx&=\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}e^{-x}}{1+e^{-x}}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}x^{s-1}(-1)^ne^{-(n+1)x}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}(-1)^{n-1}x^{s-1}e^{-nx}dx\\(nx=y)\quad&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{y^{s-1}}{n^s}e^{-y}dy=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}\int_0^{\infty}y^{s-1}e^{-y}dy=\eta(s)\Gamma(s)\end{aligned}$$

Lo que nos permite calcular varias integrales, por ejemplo en el capitulo 13, tenemos

$$\int_0^{\infty}\frac{x^4e^x}{(e^x-1)^2}dx=-\int_0^{\infty}x^4\frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{e^x-1}\Big)dx=4\int_0^{\infty}\frac{x^3}{e^x-1}dx=4\zeta(4)\Gamma(4)=4\frac{\pi^4}{90}6=4\frac{\pi^4}{15}$$